

Probability and Statistics for Electrical Engineering
3rd Edition

機率與統計

第三版

Alberto Leon-Garcia 原著
陳常侃 編譯

EARSON

 全華圖書股份有限公司

機率與統計－第三版

PROBABILITY AND STATISTICS
FOR ELECTRICAL ENGINEERING
3rd Edition

Alberto Leon-Garcia 原著

陳常侃 編譯

 全華圖書股份有限公司 印行

 PEARSON

台灣培生教育出版股份有限公司
Pearson Education Taiwan Ltd.

國家圖書館出版品預行編目資料

機率與統計 / Alberto Leon-Garcia 原著 ; 陳常侃 編譯. --
初版. -- 臺北市 : 臺灣培生教育出版 ;
臺北縣土城市 : 全華圖書發行, 2009.09
面 : 公分
參考書目 : 面
譯自 : Probability, Statistics, and Random Processes for
Electrical Engineering, 3rd Ed.
ISBN 978-986-154-883-8(平裝)

1. 機率

319.1

98012357

機率與統計—第三版

PROBABILITY AND STATISTICS

FOR ELECTRICAL ENGINEERING, 3rd Edition

原 著 Alberto Leon-Garcia

編 譯 陳常侃

執行編輯 曾鴻祥・潘韻丞

出 版 者 台灣培生教育出版股份有限公司

地址 : 台北市重慶南路一段 147 號 5 樓

電話 : (02) 2370-8168

傳真 : (02) 2370-8169

網址 : www.pearson.com.tw

E-mail : Hed.srv.TW@Pearson.com

發 行 所 全華圖書股份有限公司

總 代 理 全華圖書股份有限公司

地址 : 23671 台北縣土城市忠義路 21 號

電話 : (02) 2262-5666 (總機)

傳真 : (02) 2262-8333

網址 : <http://www.chwa.com.tw> | www.opentech.com.tw

E-mail : book@chwa.com.tw

郵政帳號 : 0100836-1 號

初版一刷 2009 年 09 月

I S B N 978-986-154-883-8 (平裝)

圖書編號 06093

定 價 新台幣 620 元

有著作權・侵害必究

版權聲明 (如有破損或裝訂錯誤, 請寄回總代理更換)

Authorized translation from the English language edition, entitled PROBABILITY, STATISTICS, AND RANDOM PROCESSES FOR ELECTRICAL ENGINEERING, 3rd Edition, 9780132336215 by Leon-Garcia, Alberto, published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall. Copyright ©2009 by Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE TRADITIONAL language edition published by PEARSON EDUCATION TAIWAN, and CHUAN HWA BOOK CO., LTD. Copyright © 2009

原著序

Preface

這本書以一種具啟發性、易懂、和有趣的方式為電機和電腦工程師介紹機率與統計。在實際的工程應用中，我們所遭遇到的系統是很複雜的，因此我們需要對機率有清楚的認知，並且也要熟悉如何使用分析機率的工具。因此，本入門課程的目標在教導基本理論的概念和解決實際應用問題的技巧。除了保留本書先前版本已有的特色之外，本書的第三版達到了這個目標。本書先前版本已有的特色為：

- 介紹和工程應用的相關性。
- 對機率做清楚易懂的介紹。
- 有大量的電腦練習題以增進讀者對隨機性的直覺。
- 涵蓋大量各式各樣的習題。
- 豐富的題材選擇，課程深具彈性。
- 對於隨機程序的概念有仔細的引導過程。

本書的第三版更加入了兩個新的特色：

- 介紹統計學。
- 大量的使用 MATLAB[®]/Octave。

介紹和工程應用的相關性

在機率的入門課程裡，激起學生的學習動機是最主要的挑戰。指導老師必須向學生說明機率理論和工程應用的相關性。在第一章中，為了激起學生的學習動機，我們將討論在工程設計中，機率模型所扮演的角色。在電機工程和計算機工程中的實際應用將被運用來說明平均值和相對次數的概念如何提供適當的工具來處理隨機系統的設計。這些應用包含了無線和數位通訊、數位媒體和信號處理、系統可靠度、電腦網路、和網路系統。本書的例子和問題涵蓋了這些領域。

對機率做清楚易懂的介紹

機率理論本質上是一門數學課程，所以概念要以仔細，簡單，和漸進的方式來做呈現，以清楚仔細的方式推導機率的公設和推論。在討論有關於離散和連續樣本空間的機率法則時，引入了模型建立的觀點。單一離散隨機變數的概念被完整的建立，讓學生可以不用做複雜的分

析即可聚焦在基礎的機率概念上。同樣地，隨機變數對和向量隨機變數會在不同的章節中來討論。

最重要的隨機變數和隨機程序是以一種有系統的方式，使用模型建立的論述來逐步建立的。例如，我們在每章的一開始都會討論硬幣投擲問題和 Bernoulli 試驗，透過 Gaussian 隨機變數，中央極限定理，直到本書最後章節中會提到的信賴區間。我們教導學生的目標不只是介紹機率方法的基本概念，還有認識關鍵模型和了解它們彼此之間的關係。

有大量的電腦練習題以增進讀者對隨機性的直覺

讀者需要發展出對變化性和隨機性的直覺，才算是真正的了解機率。要發展出這樣的直覺，我們可以借助於隨機資料的引進和分析，經由使用經實證過的資料可以強化重要的應用概念和學習動機。每一章將會介紹一個或多個數值或模擬技巧，使學生可以運用和驗證這些概念。這些主題包含：隨機數、隨機變數、和隨機向量的產生；線性轉換和 FFT 的應用；統計檢定的應用。

電腦數值計算方法的部份是可以做選擇性學習或教授的。然而，我們發現由電腦所產生的資料可以有效引起對每一個新主題的學習動機，而且計算機方法可以併入到學生現有的課程中。電腦練習題可以使用 MATLAB 或 Octave 來做。我們選擇在例題中使用 Octave，因為用它來呈現我們的練習題就夠了，而且它是免費的，可以很容易地在網路上得到。能取得 MATLAB 的學生則可使用 MATLAB。

在機率模型與真實世界之間做連接的統計學

統計學是在機率模型與真實世界之間做連接的關鍵角色。就是因為這個原因，在大學部的機率入門課程中，傾向於在課程中包含對統計學的介紹。此版本包含全新的一章，涵蓋統計學的全部重要主題：取樣分佈，參數估計，最大概似估計，信賴區間，假設檢定，Bayesian 判定法，和適合度檢定。因為有了前幾章隨機變數的基礎，我們可以用嚴謹的方式導入統計學的方法，而不是像「食譜」那樣的講解方式。該章也證明了 MATLAB/Octave 在產生隨機資料和應用統計學的方法上是極度有用的。

範例和習題

在每一章節中，我們使用大量的範例來說明分析和解決問題的技巧，使用簡化的情況來推導概念，並說明了許多的應用。這本書包含的習題量幾乎達之前版本的兩倍。許多新的習題需要使用 MATLAB 或 Octave 以獲取數值和模擬的結果。習題是以節次做分類的，便於授課教授選擇做為家庭作業。有一些習題需要用到前面章節的知識才能完成，我們把它們放在每一章的最後。有完整的習題解答可供授課教授們索取。

主題豐富具彈性

這本書的設計給予教書者在選擇主題上有最大的彈性。除了在一般入門課程中會介紹的機率，隨機變數，和統計學等一般主題之外，這本書還包含了以下的主題：模型化，電腦模擬，可靠度，估計，和熵。

建議的課程綱要

這本書提供大學部和研究所學生各式各樣的課程綱要。目錄也提供了每一章內各節的詳細描述。

前五章(沒有星號，即不是選讀)為大學一學期對機率介紹的基礎課程內容。從第五章到第七章前三節和第八章是著重在機率與統計的課程內容。從第五章到 6.1 及 7.1 至 7.3 等是機率與隨機程序簡介的入門課程內容。許多其它的課程綱要可以使用不同的可選擇性章節。

初級的研究所隨機程序的課程內容是先快速地複習機率公設和隨機變數的概念，包括一些有星號的章節：事件類別(2.8)，Borel 場，和機率的連續性(2.9)，隨機變數的正式定義(3.1)，和 cdf 的極限特性(4.1)。接下來是進入第六章的向量隨機變數，包括它們的聯合分佈，和它們的轉換。在第七章討論的是中央及限定定理和收斂的概念。統計信號處理的課程會強調的章節為隨機變數的估計(6.5)，最大概似估計，Cramer-Rao 下限(8.3)，和 Bayesian 判定法(8.6)。排隊理論課程會強調的章節為更新程序(7.5)。

第三版所做的改變

這個版本經歷了數個重要的改變：

- 對於隨機變數這個概念的介紹現在分成兩個階段：單一隨機變數(第三章)和連續隨機變數(第四章)。
- 隨機變數對和向量隨機變數現在分別在不同的章(第五章和第六章)中做介紹。第六章會涵蓋更多進階的主題，例如：一般轉換，聯合特徵函數。
- 第八章是新的一章，著重在對統計學所有基本主題的介紹。

致謝

我想要感謝為第三版的準備工作提供協助的許多人。首先也是最重要的，我要感謝前二版的使用者，無論是教授還是學生，他們所提供的建議有很多已經併入在此版中。我尤其要感謝數年來我在世界各地所遇到的學生，他們所提供的正面評價鼓勵了我進行這次的改版。我也要感謝我的研究生和研究所後研究生在各方面提供的回饋與協助，尤其是 Hadi Bannazadeh, Nadeem Abji, Ramy Farha, Khash Khavari, Ivonne Olavarrieta, Shad Sharma, 及 Ali Tizghadam, 和 Dr. Yu Cheng。我在通訊組裡一起工作的夥伴，Frank Kschischang, Pas Pasupathy, Sharokh

Valaee, Parham Aarabi, Elvino Sousa 和 T.J. Lim 等諸位教授，提供了實用的意見和建議。Delbert Dueck 提供了尤其有用和深入的意見。我特別要感謝 Ben Liang 教授，因為他對初稿提供了仔細且有價值的回饋。

以下的審稿者對第三版的意見和建議也對我很有幫助：William Bard (University of Texas at Austin), In Soo Ahn (Bradley University), Harvey Bruce (Florida A&M University and Florida State University College of Engineering), V. Chandrasekar (Colorado State University), YangQuan Chen (Utah State University), Suparna Datta (Northeastern University), Sohail Dianat (Rochester Institute of Technology), Petar Djuric (Stony Brook University), Ralph Hippenstiel (University of Texas at Tyler), Fan Jiang (Tuskegee University), Todd Moon (Utah State University), Steven Nardone (University of Massachusetts), Martin Plonus (Northwestern University), Jim Ritcey (University of Washington), Robert W. Scharstein (University of Alabama), Frank Severance (Western Michigan University), John Shea (University of Florida), Surendra Singh (The University of Tulsa), and Xinhui Zhang (Wright State University).

我要感謝 Scott Disanno，Craig Little，和 Laserwords 印刷公司的整個生產團隊，因為他們的努力，這本書能準時印刷出版。最重要的是，我想要感謝我的夥伴 Karen Carlyle，給我的愛，支持，與夥伴情誼，如果沒有她的協助，就不會有這本書的存在。

譯者序

Preface

這是一本探討機率與統計的書籍，但是和坊間的類似書籍不太一樣。

本書的作者以精確而淺顯生動的文字來解釋複雜的名詞和概念，和一般的書籍只對特定主題做一鱗半爪的解說不同。本書對機率與統計採用全面性，系統性的說明，這些說明足以讓讀者可以清楚的回答機率與統計其最基本的一直到最複雜的問題。

本書最適合以下兩種讀者閱讀：

1. 想修習機率與統計的學生或一般人士，可以將本書當成入門書籍。書中清晰的說明和範例可以讓讀者在不知不覺中就建立許多重要又清楚的概念。書中的每一章都提供有大量經過分門別類的習題，做完之後足以讓讀者應付各種型態的考試。
2. 對於專業人士，本書也提供有許多具深度的課題，本書絕對是您在書架上應有的一本有關於機率與統計之優良的參考書籍。

最後，希望讀者在每次翻閱本書後，都可以獲得新的斬獲。

致謝

翻譯這本書是一種協同合作的工作，雖然封面會出現譯者的名字，但是，光靠譯者是無法完成這本譯著的。

首先，感謝全華圖書公司再次提供機會，讓我得以翻譯本人深感興趣主題的書籍。其中，要特別感謝編輯部的曾鴻祥先生，若沒有他在背後提供的協助，完成這本譯著只會是一個夢想。

在翻譯本書期間，受到北臺灣科學技術學院電子工程系同仁的鼓勵與支持，在此地一併致謝。

最後，我要感謝我的家人。因為他們必須容忍當我需要專注於處理家庭事務時，腦袋中還會思考「原文書的那一句話，要如何詮釋作者的意思才好？」。感謝我的家人在我翻譯本書期間對我的關懷，諒解，與支持。

陳常侃

於北臺灣科學技術學院電子工程系

編輯部序

Preface

「系統編輯」是我們的編輯方針，我們所提供給讀者的，絕不只是一本書，而是關於這門學科的所有知識，由淺入深並循序漸進。

本書譯自 Alberto Leon-Garcia 所著之 Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering (3/E)，從機率的基本概念開始，內容涵蓋離散隨機變數、單一隨機變數及統計等一般機率的教材範圍，取材全面性且系統性，足以讓讀者學習到機率與統計從最基本到最複雜的問題解決概念，同時嘗試應用到電子電機等工程領域。本書適合作為公私立大學、科技大學與技術學院等，電子電機工程、資訊工程或工業資訊管理等相關科系之「機率統計」課程使用，亦可供作高中數理資優生的數學進階參考教材。

此外，受限於篇幅，經諮詢教學經驗豐富的老師及學者等意見後，原著第 9 章之後的章節(9 至 12 章)於此次中譯本中未加以翻譯，如對讀者或教師造成不便，敬請見諒。若對本書內容及其他方面有任何意見，歡迎來函聯繫，我們將竭誠為您服務。

目錄

Contents

第 1 章 電機與電腦工程中的機率模型 1-1

1.1 以數學模型做為分析和設計的工具	1-1
1.2 確定模型	1-3
1.3 機率模型	1-4
1.4 一個詳細的例子：封包式語音傳輸系統	1-8
1.5 其他的例子	1-10
1.6 本書的概要	1-14
摘要	1-15
習題	1-17

第 2 章 機率理論的基本概念 2-1

2.1 描述隨機實驗	2-1
2.2 機率公理	2-11
*2.3 使用計數方法來計算機率	2-21
2.4 條件機率	2-28
2.5 事件的獨立	2-34
2.6 循序實驗	2-40
*2.7 合成隨機特性的電腦方法：隨機數產生器	2-48
*2.8 細節：事件類別	2-52
*2.9 細節：事件數列的機率	2-57
摘要	2-61
習題	2-63

第 3 章 離散隨機變數 3-1

3.1 一個隨機變數的概念.....	3-1
3.2 離散隨機變數和機率質量函數	3-4
3.3 離散隨機變數的期望值和動差	3-9
3.4 條件機率質量函數	3-17
3.5 重要的離散隨機變數.....	3-21
3.6 離散隨機變數的產生.....	3-35
摘要	3-36
習題	3-37

第 4 章 單一隨機變數 4-1

4.1 累積分佈函數	4-1
4.2 機率密度函數	4-8
4.3 X 的期望值	4-15
4.4 重要的連續隨機變數.....	4-24
4.5 一個隨機變數的函數.....	4-35
4.6 馬可夫不等式和柴比雪夫不等式.....	4-42
4.7 轉換方法	4-45
4.8 基本的可靠度計算	4-51
4.9 產生隨機變數的計算機方法.....	4-56
*4.10 熵(ENTROPY).....	4-64
摘要	4-74
習題	4-76

第 5 章 隨機變數對 5-1

5.1 兩隨機變數.....	5-1
5.2 離散隨機變數對.....	5-5
5.3 X 和 Y 的聯合 CDF.....	5-10

5.4	兩個連續的隨機變數的聯合 PDF	5-16
5.5	兩隨機變數的獨立	5-22
5.6	聯合動差和兩個隨機變數其函數的期望值	5-25
5.7	條件機率和條件期望	5-29
5.8	兩隨機變數的函數	5-39
5.9	聯合 GAUSSIAN 隨機變數對	5-47
*5.10	產生獨立的 GAUSSIAN 隨機變數	5-52
摘要		5-55
習題		5-56

第 6 章 向量隨機變數 6-1

6.1	向量隨機變數	6-1
6.2	多個隨機變數的函數	6-8
6.3	向量隨機變數期望值	6-17
6.4	聯合 GAUSSIAN 隨機向量	6-25
6.5	隨機變數的估計	6-32
*6.6	產生相關的向量隨機變數	6-43
摘要		6-47
習題		6-49

第 7 章 隨機變數的和與長期平均 7-1

7.1	隨機變數的和	7-1
7.2	樣本平均值和大數法則	7-7
7.3	中央極限定理	7-11
*7.4	隨機變數數列的收斂	7-20
*7.5	長期到達率和伴隨的平均	7-29
*7.6	使用離散傅立葉轉換計算分佈	7-34
摘要		7-43
習題		7-44

第 8 章

統計

8-1

8.1

樣本和取樣分佈.....

8-1

8.2

參數估計

8-5

8.3

最大概似估計

8-9

8.4

信賴區間

8-21

8.5

假設檢定

8-31

8.6

BAYESIAN 判定方法.....

8-47

8.7

資料的分佈配適檢定.....

8-53

摘要

.....

8-59

習題

.....

8-62

※ 原著 9 至 12 章未於此次中譯本翻譯。

附錄 A

常用數學算式

附-1

A.

三角恆等式

附-1

B.

不定積分

附-2

C.

定積分

附-3

附錄 B

傅立葉轉換公式表

附-4

A.

傅立葉轉換定義

附-4

B.

特性

附-4

C.

傅立葉轉換對.....

附-5

附錄 C

矩陣和線性代數

附-6

A.

基本的定義

附-6

B.

對角化.....

附-6

C.

二次式

附-8

電機與電腦工程中的 機率模型

電機和電腦工程師在現代的資訊與通訊系統中扮演了關鍵的角色。這些系統雖處於高度變化與混亂的環境中，但卻已達到高度可信與可預期的成功：

- 無線通訊網路在具有嚴重干擾的環境中提供語音與資料的通訊給行動用戶。
- 大量的媒體信號，語音，聲音，影像，和視訊是以數位的方式處理。
- 大型的 Web 伺服器群集(server farms)傳送大量具高度特定性的資訊給使用者。

由於這些成功，今日的設計者面對著更巨大的挑戰。他們建造的系統在規模上是空前的，他們所要操控的混亂環境是一片未開發的領域：

- 網路資訊被加速地創造和刊登；未來的研究應用必須更具辨識力，能從大量的資訊中正確地找出想要的回應。
- 電腦駭客入侵電腦和運用電腦資訊以達到非法的目的，所以必須要能夠分辨和遏制這些威脅。
- 機器學習系統不能只是做瀏覽和採購的應用程式，必須超越它們以做到健康與環境的即時觀測和監控。
- 高度分散式的系統是以同儕(peer-to-peer)和格子運算(grid computing)的群體出現，並且改變了媒體傳送、玩遊戲和社交互動的本質和模式。我們尚不了解或知道如何控制和處理這樣的系統。

機率模型是可以讓設計者理出這些混亂，並且成功地建立出有效率，可信賴，和具成本效益的系統的工具之一。這本書介紹了機率模型，以及發展這樣的模型所需使用的基本技術。

這章介紹機率模型，並且說明它們和廣泛地使用在工程應用中的確定模型兩者之間差異。我們會發展機率概念的關鍵特性，各式各樣的電機和電腦工程的例子，在其中機率模型扮演了關鍵的角色，將會被討論到。在 1.6 節中提供了本書的概要。

1.1 以數學模型做為分析和設計的工具

任何複雜系統的設計或改良牽涉到從可用的選項中做出選擇，依據的是基本的標準，例如成本，可靠度，和效能。這些基本標準的定量評估很少是透過對可用的選項做實際的實現

和做實驗性的評估。取而代之的是，它們反而都是得自於對可用的選項使用模型做評估的結果。然後，我們根據這些評估做出最後的裁決。

一個**模型(model)**就是實際情況的一種近似的呈現。一個模型企圖要用一組簡單易懂的規則來解釋被觀察到的行為。這些規則可以用來預測在某特定的實際情況之下的實驗結果。一個有用的模型說明了在某特定情況下所有相關的狀況。這樣的模型可以取代實際的實驗來回答在某些特定情況下的問題。模型因此使工程師免除了實驗的成本，也就是說，節省了勞力，設備，和時間。

當所觀察的現象已經有可測量的特性時，則**數學模型(Mathematical models)**就可以被使用。一個數學模型是一組有關於一個系統或實際程序是如何運作的假設，這些假設是用數學關係式來描述的，關係式中包含有此系統的重要參數和變數。這個系統的部份實驗結果決定了數學關係式中的「給定」。這些關係式的解答使我們可以預測當我們真正去做實驗時會得到的測量結果。

數學模型被工程師們廣泛地運用在系統的設計和改良上。以直覺和基本法則來預測複雜且新穎的系統其運作方式未必是可靠的，而且，在系統設計的初期，要做實驗通常是不可能的。再者，在現存的系統中做大規模的實驗其成本經常過高。把複雜的系統元件和它們互動的相關知識做結合，所建立出的適當模型，可以使科學家和工程師為複雜的系統發展出整體的數學模型。如此一來，若要快速地而且符合成本效益地回答出有關於複雜系統其運作結果的相關問題，是有可能的。事實上，為了解出數學模型而發展出來的電腦程式，是很多電腦輔助分析和設計系統的基礎。

為了要達到實用目的，模型必須要符合某特定情況的實際狀況。因此，一個模型的開發程序必須包含一連串的實驗和模型改良，如圖 1.1 所示。每一個實驗是研究某個欲調查之特定現象的一小部份，並且牽涉到在某些特定的條件之下進行觀察和測量。模型被使用來預測實驗的結果，並且這些預測的結果會和由真正的實驗觀察所得來的結果做比較。如果有重大的差異，這個模型就需要做修改以嘗試修正差異。此一模型建立過程會一直持續直到研究者滿意為止，即被觀察到的行為必須能以想要的精確度被預測出來為止。模型建立過程何時停止是根據研究者的直接目的來決定的。因此，適合某種應用的模型可能完全不適合於另一種情況。

在未與實驗測量的結果相驗證之前，數學模型的預測結果應該只被視為是假設性的。在系統的設計上出現了兩難的情況：模型無法由實驗驗證，因為真實的系統根本不存在。在這樣的情況下，**電腦模擬模型(Computer simulation models)**扮演了有用的角色，因為它提供另外一種方法來預測系統行為，並且查核數學模型所做出的預測。電腦模擬模型是模擬或模仿系統動態的電腦程式，該程式含有「測量」相關表現參數的指令。一般而言，模擬模型比數學模型能更仔細地呈現系統。然而，模擬模型比起數學模型較沒彈性，而且通常需要較多的計算時間。

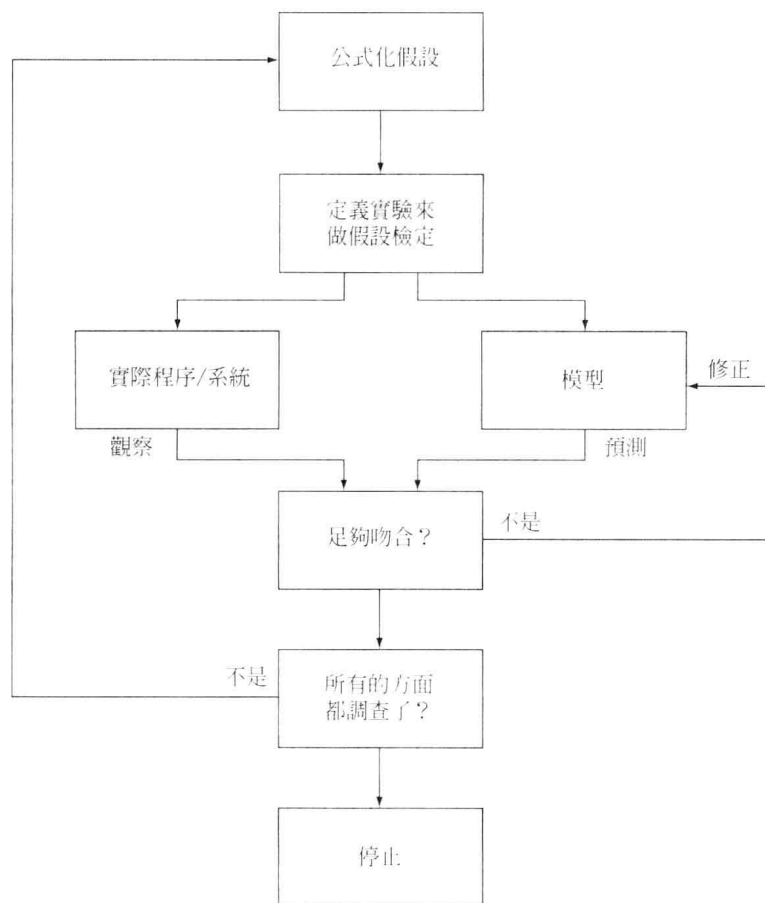


圖 1.1 模型建立過程

下面兩節我們要討論數學模型的兩種基本型態，確定模型(deterministic models)和機率模型(probability models)。

1.2 確定模型

在**確定模型(deterministic models)**中，實驗的條件完全決定了實驗的結果，一組數學方程式的解答詳細地說明了實驗的精確結果。電路理論就是確定模型的例子。

電路理論模擬了電路元件之間的聯接，而那些元件具有理想化的電壓電流特性。這個理論主張這些理想元件完全遵守 Kirchhoff 的電壓和電流定律。例如，歐姆定律指出一個電阻的電壓電流關係為 $I = V/R$ 。在任何只有電池和電阻相連接的電路中，我們可以套用 Kirchhoff 定律和歐姆定律來找出一組線性聯立方程式，然後我們解出該聯立方程式，因而求得電壓和電流。

如果測量一組電壓的實驗在相同條件下重複做了很多次，電路理論預測觀察的結果會完全一樣。實際上，因為測量誤差和不可控制的因素，觀察的結果會有一些差異。然而，只要這個預測值的差異很細微，確定模型還是適當的。

1.3 機率模型

許多我們感興趣的系統呈現了不可預測的隨機性現象。我們對**隨機實驗 (random experiment)**的定義是，當實驗在相同條件下重複執行，實驗結果有不可預測的變化。因為確定模型預測重複的實驗會有相同的結果，所以確定模型不適用於模擬隨機實驗。本節我們介紹針對隨機實驗設計的機率模型。

先舉一個隨機實驗的例子，假設一個甕裝著三顆相同的球，這三顆球分別標示著 0，1，和 2。先搖一搖甕以隨機變換球的位置，選出一顆球並記下號碼，然後把球放回甕裡。這個實驗的結果(outcome)是一個數，該數所有的可能值集合為 $S = \{0, 1, 2\}$ 。我們稱集合 S 為**樣本空間 (sample space)**。圖 1.2 列出由電腦模擬這個甕實驗 100 次(試驗)的結果。我們可以看出這個實驗的結果是無法持續正確預測的。

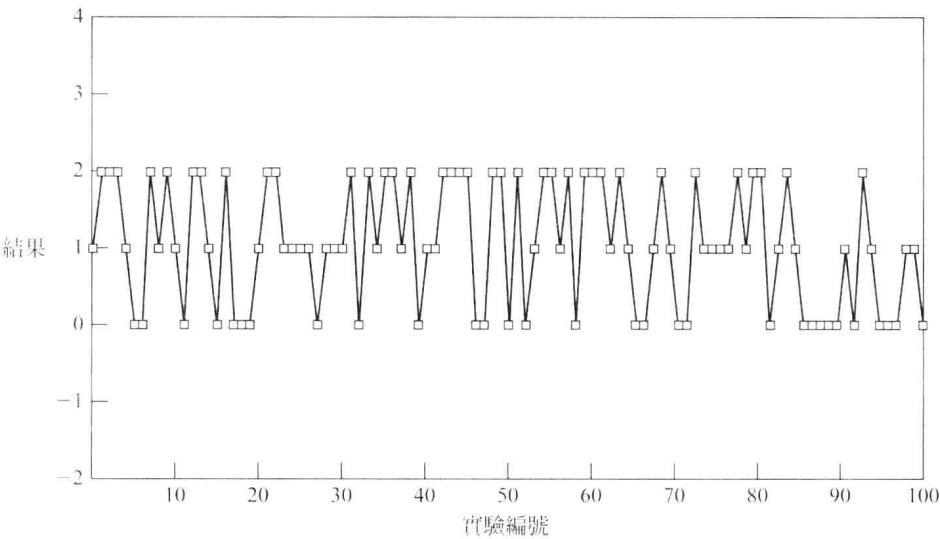


圖 1.2 甕實驗的結果

1.3.1 統計的規律性

爲了要實用，模型必須要使我們能夠預測一個系統的未來行爲，而且，爲了要爲可預測，一現象必須要展示出它的行爲中的規律性。許多工程用的機率模型是根據一個事實：在長期重複(試驗)隨機實驗所得到的平均會一致性地產生出近似相同的值。這個特性稱爲**統計的規律性 (statistical regularity)**。

假設前面提到的甕實驗在相同條件下重複 n 次。令 $N_0(n)$ ， $N_1(n)$ ，和 $N_2(n)$ 分別爲 0 號球，1 號球，和 2 號球出現的次數，並令結果 k 的**相對次數 (relative frequency)**被定義爲

$$f_k(n) = \frac{N_k(n)}{n} \tag{1.1}$$