



与现行教材同步

高一数学

题型优化设计 与解题

◆丛书主编 / 秦兆基

◆本册主编 / 李 红

/ 徐菊芳

◆湖南师范大学出版社



◆丛书主编 / 秦兆基
◆学科主编 / 王海超

高一数学 题型优化设计 与解题

◆本册主编◆
李 红 徐菊芳

撰稿

陆忠源
庄 梅
邹建荣
王卫华
陈伟华
李 红
徐菊芳

◀ 湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

中学各科知识精讲与能力训练丛书·高一数学 / 李红, 徐菊芳主编. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2001.8

ISBN7—81081—074—X/G·035

I. 中... II. ①李...②徐... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 045448 号

高一数学

——题型优化设计与解题

丛书主编: 秦兆基

本册主编: 李 红 徐菊芳

丛书策划: 李映辉 阙永忠

责任编辑: 尔 冬 徐超富

责任校对: 陈宏平

湖南师范大学出版社出版发行

(长沙市岳麓山)

湖南省新华书店经销 长沙市华中印刷厂印刷

850×1168 32 开 13.75 印张 448 千字

2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1—15100 册

ISBN7—81081—074—X/G·035

定价: 14.50 元

前 言

“中学各科知识精讲与能力训练”丛书是依据 2000 年颁布的新修订的各科教学大纲,配合全面修订的课本而编写的教学辅导读物。

各科教学大纲的修订和课本的更新,意味着教育理念的嬗变,也启示人们,特别是学校师生,应该适时地改换教学思想,改进教学方法和学习方法,以适应变化了的新形势。本丛书正是基于这一点而编写的。

丛书的编写,严格遵循教学规律,注意体现以教师为主导、学生为主体的原则,对课堂讲述的知识做简要的整理,并与学过的知识相融合,实现条理化、系统化,便于理解、记忆和运用。

丛书的编写,充分尊重教学大纲的要求和课本体系。丛书按教材内容的具体安排(章、节、单元、课)讲解知识,组织训练,可配合教学进度同步使用。

丛书的编写,立足于现实,着眼于发展,注意拓宽学生的视野,引导他们自觉地去探求新知识。训练的设计不是课本练习题的简单重复,而是广泛地借鉴近年来高考和中考试卷的整体设计和题型,力求做到覆盖面广、题型新、适应性强、难度恰当,有助于提高学生解题的能力。

丛书的编写构架大体统一。每节(课)一般分为知识点剖析、题型详解和实践演练三部分。知识点剖析,着眼于整理知识,帮助学生获得清晰的概念。题型详解,着眼于对不同类型的题目选择做详细的讲解。它分为:审题点拨(告诉学生如何审题,怎样运用已学的知识,怎样发现解题条件——明显的和隐含的),解题途径

(告诉学生用何种思路、何种方法去解题),正确解法和思维点拨(将例题可能出现的错误解法列出,分析产生错误的原因,并讲解这类题目还会有哪些转换方式)。实践演练,设A、B两组题目:A组为基础题,B组为提高题。另在每章结束设一个总结。它包含知识概要、专题讲解(对重点、难点进行拓展、发散)、典型题分析和本章测试(A、B卷)。

丛书涵盖初中一年级至高中二年级各门主要学科,即数学、物理、化学、英语、语文等五科,按学年分册编写(其中少数科目因新课本未出,按学期编写)。

编写者均为江苏省重点中学、省验收合格的国家示范高中的特、高级教师。

书中如有不当和错误之处,欢迎批评指正。

编 者
2001年5月

目 录

第一章 集合与简易逻辑	(1)
第一节 集合	(1)
第二节 子集、全集、补集	(6)
第三节 交集、并集	(10)
第四节 含绝对值的不等式的解法	(14)
第五节 一元二次不等式	(19)
第六节 逻辑联结词	(23)
第七节 四种命题	(27)
第八节 充要条件	(31)
第一章综合训练	(35)
第二章 函数	(40)
第一节 映射	(40)
第二节 函数	(45)
第三节 函数的单调性和奇偶性	(51)
第四节 反函数	(58)
第五节 指数	(63)
第六节 指数函数	(67)
第七节 对数	(73)
第八节 对数函数	(77)
第九节 函数的应用举例	(83)
第十节 二次型问题	(88)
第二章综合训练	(99)
第三章 数列	(105)
第一节 数列	(105)

第二节	等差数列	(111)
第三节	等差数列的前 n 项和	(116)
第四节	等比数列	(122)
第五节	等比数列的前 n 项和	(128)
第三章	综合训练	(135)
第四章	三角函数	(140)
第一节	角的概念的推广	(140)
第二节	弧度制	(145)
第三节	任意角的三角函数	(151)
第四节	同角三角函数的基本关系式	(157)
第五节	正弦、余弦的诱导公式	(163)
第六节	两角和与差的正弦、余弦、正切	(168)
第七节	二倍角的正弦、余弦、正切	(175)
第八节	正弦函数、余弦函数的图象与性质	(180)
第九节	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	(192)
第十节	正切函数的图象和性质	(202)
第十一节	已知三角函数值求角	(207)
第四章	综合训练	(214)
第五章	平面向量	(219)
第一节	向量	(219)
第二节	向量的加法与减法	(224)
第三节	实数与向量的积	(229)
第四节	平面向量的坐标运算	(237)
第五节	线段的定比分点	(244)
第六节	平面向量的数量积及运算律	(251)
第七节	平面向量数量积的坐标表示	(259)
第八节	平移	(265)
第九节	正弦定理、余弦定理	(269)
第十节	解斜三角形应用举例	(274)
第五章	综合训练	(279)
参考答案		(285)

第一章 集合与简易逻辑

第一节 集 合

◎ 知识点剖析

1. 高中引进集合的重要性与必要性,体现在以下三个方面:(1)集合是数学中最基本的概念,在初中数学的基础上进一步学习更高级的数学概念,离不开集合,许多数学概念的精确定义必须借助于集合.(2)集合论中引进的符号极大地简化了书写过程,体现了为人类思维所创造并感知的数学美.(3)集合思想渗透于现代数学的发展之中,其本身也是求解高中数学问题的常用思想方法.

2. 由于集合不能被其他概念定义,课本所给出的只是一个描述性说明,把握其定义必须明确以下几点:

(1)确定性:指对于一个确定的集合,集合中的元素是确定的,我们有明确的标准来判断任一对象是否是该集合中的元素.如1是集合 $\{1,2,3,4\}$ 的元素,而不是集合 $\{2,3,4\}$ 的元素,3在不等式 $2x-1>3$ 的解集中,而不在 $2x-1\leq 3$ 的解集中.必须注意的是:违背确定性的对象的全体不能构成集合.如NBA的高大球员,与 π 相差很小的实数等.

(2)任意性:指任意对象都可以作为集合中的元素.元素这一概念是包罗万象的.如 $\{人,狗,1\}$ 也是一个集合.但代数中常研究的是数集,而几何中研究的则主要是点集、图形的集合等.

(3)无序性:指集合中的元素不分先后,可任意排序,如 $\{1,2,3\}$, $\{2,1,3\}$ 与 $\{3,2,1\}$ 都视为由1,2,3构成的同一集合.

(4)互异性:指同一集合中任意两个元素都是各不相同的.如 $\{2,2,1\}$, $\{3,\frac{6}{2}\}$ 之类是错误写法.再如一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 的解集为 $\{2\}$ 而

非 $\{2,2\}$. 注意互异性常用作隐含条件,是分类讨论的出发点之一.

3. 本节引进了集合的三个表示方法,其中描述法是重点难点.

(1)列举法:即将集合中所有元素一一列举在大括号 $\{ \}$ 内. 为养成良好习惯,应注意元素与元素之间用逗号“,”隔开. 如小于10的正偶数的集合可表示为 $\{2,4,6,8\}$. 显然,列举法只适用于有限集(元素个数有限的集合).

(2)描述法:以描述所含元素的公共属性来确定一个集合含有哪些元素,从而确定该集合的方法称为描述法. 描述法可用来表示无限集(元素个数无限的集合). 如:全体偶数组成的集合 A , A 中元素具有的公共属性是能被2整除,可表示成 $A = \{x | x \text{ 能被 } 2 \text{ 整除}\} = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$. 描述法的一般形式是 $\{x \in M | x \text{ 具有性质 } P\}$,其中 M 为代表元素 x 的前提范围, P 是公共属性. 在不引起混淆的情况下,竖线及其右边部分可省略. 如: $\{x | x \text{ 是平行四边形}\}$ 可写成 $\{\text{平行四边形}\}$. 掌握描述法的关键是正确认识公共属性,其主要作用有:①透过公共属性可以认识所表示集合的本质,即该集合含有哪些元素. 例如 $A = \{x | x = k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 与 $B = \{x | x = k, k \in \mathbf{Z}\}$, A 与 B 虽形式不同但本质相同,都表示所有整数的集合. ②我们正是依据公共属性来判断一对象是否是给定集中的元素. 如 $A = \{x | 2x - 1 > 0\}$,可断定 $3 \in A$,因为3具有公共属性(适合不等式 $2x - 1 > 0$),而 $-3 \notin A$,因为-3不具有公共属性.

(3)图示法:即用一条封闭曲线的内部表示集合,写入所含元素. 其优点是能有效地将抽象的问题形象化,有助于思考. 相应的问题将会在以后涉及.

4. 本节引进了表示元素及其所属集合间关系的重要符号“ $\in$ ”,应注意集合与元素的概念是相对的. 例如 $A = \{a\}$,对于 a 来说, a 是 A 中元素,故 $a \in A$,而对于集合 $B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ 来说, A 又是 B 中元素,故有 $A \in B$. 注意这里 a 不是 B 中元素,故 $a \notin B$.

5. 空集的引入是一种规定,其符号确定为 $\emptyset$,将它表示成 $\{0\}$ 与 $\{\text{空集}\}$ 是常见错误.

除此之外,本节还介绍了几个常见数集的符号: $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^*$. 它们将会在以后的学习中处处遇到,应予以记熟. 事实上,如前所述,符号语言本身就是我们所要学习的集合的主要内容.

◎ 典型例题

例1 下列说法是否正确? 说明原因.

$$(1) \sqrt{2} \in \{x \in \mathbf{Q} | x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0\}.$$

$$(2) (3, 4) \in \{(x, y) | y = x + 1\}.$$

$$(3) \pi \in \{\text{实数集}\}.$$

$$(4) \{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\} \text{ 与 } \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\} \text{ 是不同集合.}$$

解 (1) 集合 $A = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0\}$ 表示方程 $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ 的有理数解的集合, 即 $\{1\}$, 故 $\sqrt{2} \notin A$.

(2) 集合 $A = \{(x, y) | y = x + 1\}$ 可理解为二元一次方程 $y - x - 1 = 0$ 的解集, 也可看作为直线 $y = x + 1$ 上所有点的集合 (即构成此直线), 点 $(3, 4)$ 坐标适合方程 $y = x + 1$, 故在直线上. 正确.

(3) π 是一个实数, 故 $\pi \in \mathbf{R}$, 但 $A = \{\text{实数集}\}$ 不表示实数集, 而是以一个集合 (实数集) 为元素的单元元素集. π 不是 A 中的元素, 故 $\pi \notin A$.

(4) 对集合 $A = \{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 与 $B = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$ 有以下两种理解: ① 从公共属性看, A 中元素的公共属性是能表示成 $3 \times \text{整数} - 1$, B 中元素的公共属性是能表示成 $3 \times \text{整数} + 2$, 因为 $x = 3k - 1 = 3(k - 1) + 2$, 而 $k \in \mathbf{Z}$ 时, 可知 $k - 1 \in \mathbf{Z}$, 所以这两个公共属性本质是一致的, 从而 A 与 B 是相同的集合. ② 从整数的分类看, 全体整数按“3”分类可分为三类: 被 3 整除的数, 被 3 除余数是 1 的数, 被 3 除余数是 2 的数. A 与 B 形式不同但本质相同, 都表示被 3 除余数是 2 的整数的集合.

例 2 已知集合 $A = \{a, \sqrt{a^2}\}$, 求 a 的范围.

分析 为使 $A = \{a, \sqrt{a^2}\}$ 有意义, 应有 $a \neq \sqrt{a^2}$, 从而可求 a 的范围.

解 $A = \{a, \sqrt{a^2}\} = \{a, |a|\}$, $\because a \geq 0$ 时, $|a| = a$, 不合互异性; $a < 0$ 时, $|a| \neq a$, 所以所求范围即 $a < 0$.

例 3 用列举法表示集合 $A = \{x | x^2 - 3ax + 2a^2 = 0\}$.

分析 A 表示一元二次方程 $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ 的解集, 因式分解可知方程的两根为 a 与 $2a$, 但用列举法表示时不能轻易写成 $A = \{a, 2a\}$, 因为 a 与 $2a$ 相等时违背了集合的互异性, 是错误写法.

解 $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ 即 $(x - a)(x - 2a) = 0$, 两根分别为 a 与 $2a$.

(1) $a = 0$ 时, $a = 2a = 0$ 此时 $A = \{a\} = \{0\}$.

(2) $a \neq 0$ 时, $a \neq 2a$ 此时 $A = \{a, 2a\}$.

综上: $A = \begin{cases} \{0\} & a = 0 \text{ 时} \\ \{a, 2a\} & a \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$

小结 像上述因所给条件不确定而遇到限制 (互异性) 时, 对所考查问题分

情况进行讨论的思想方法称为分类讨论.互异性是高中数学的第一个分类讨论的出发点.这里也反映了初中数学与高中数学的明显区别.

例 4 已知 $A = \{2, a^2 + a + 3, a^2 + 2a + 2\}$ 且 $5 \in A$, 求 a 的值.

解 $\because 5 \in A, \therefore a^2 + a + 3 = 5$ 或 $a^2 + 2a + 2 = 5$.

1. 若 $a^2 + a + 3 = 5$, 则 $a = -2$ 或 $a = 1$.

(1) 若 $a = -2$, 则 $a^2 + 2a + 2 = 2$, 不合互异性.

(2) 若 $a = 1$, 则 $a^2 + 2a + 2 = 5 = a^2 + a + 3$, 不合互异性.

2. 若 $a^2 + 2a + 2 = 5$, 则 $a = 1$ 或 $a = -3$.

(1) 若 $a = 1$, 由前知不合.

(2) 若 $a = -3$, 则 $a^2 + a + 3 = 9$, 此时 $A = \{2, 9, 5\}$.

综上: $a = -3$.

◎ 实践演练

A 卷

一、选择题

1. 下列对象: (1) 高大球员 (2) 与 π 近似的数 (3) 数学中的难题 (4) 我校全体女生 其中能构成集合的个数是 ()

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4

2. 下列哪个集合有且只有两个元素 ()

(A) $\{x^2 - 1 = 0\}$ (B) $\{x | y = x^2 - 1\}$

(C) $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ (D) $\{x \in \mathbb{N} | x^2 - 1 = 0\}$

3. 下列写法 (1) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, (2) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, (3) $0 \in \mathbb{Z}$ (4) $0 \in \mathbb{N}$, 其中正确的个数为 ()

(A) 4 (B) 3

(C) 2 (D) 1

4. 方程组 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ 的解集为 ()

(A) $\{(1, 1)\}$ (B) $\{1\}$

(C) $\{x = y = 1\}$ (D) $\{1, 1\}$

二、填空题

5. 集合 $\{x | x^2 - 2x + 1 = 0\}$ 用列举法表示为_____.

6. 若 $2 \in \{x | x^2 + px - 2 = 0\}$, 则 $p =$ _____.

7. 不等式 $2x - 3 < 4$ 的自然数解集为 $\{0, 1, 2, 3\}$

三、解答题

8. 已知 $x^2 \in \{0, 1, x\}$, 求 x 的值.

9. 用列举法表示集合 $\{x \in \mathbf{Z} | \frac{6}{3-x} \in \mathbf{N}^*\}$

10. 非空数集 M 中的元素都是正整数且满足 $x \in M \Rightarrow 6 - x \in M$, 求 M .

B 卷

一、选择题

1. 下列说法正确的是

(D)

(A) 集合 $\{x | x^2 + 1 = 0\}$ 无意义

(B) $x, -x, |x|$ 组成的集合有两个元素

(C) $\{(1, 2)\}$ 与 $\{(2, 1)\}$ 表示同一集合

(D) $\{\text{有理数}\}$ 与 $\{x | x \in \mathbf{Q}\}$ 为同一集合

2. 已知 $A = \{x | x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}\}$ 下列说法不正确的是

()

(A) $0 \in A$

(B) $\sqrt{2} \in A$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \in A$

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \in A$

3. 下列表示同一集合的是

()

(A) $M = \{(3, 2)\}, N = \{2, 3\}$ (B) $M = \{3, 2\}, N = \{2, 3\}$

(C) $M = \{(x, y) | x + y = 1\}, N = \{(x, y) | \frac{x}{1-y} = 1\}$

(D) $M = \{0\}, N = \emptyset$

4. 已知 $A = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 2\sqrt{6}\}, y = 5$, 则有

()

(A) $y \subseteq A$

(B) $y \in A$

(C) $|y| \in A$

(D) $y \geq x$

二、填空题

5. 被 5 除余数为 1 的正整数集合用描述法表示为 _____.

6. 用 $\in$ 或 $\subseteq$ 填空:

0 _____ $\mathbf{N}$ $\sqrt{3}$ _____ $\mathbf{Q}$ -2 _____ $\mathbf{N}^*$

7. 如果方程 $ax^2 - x + 1 = 0$ 的解集为一元集, 则 $a =$ _____.

三、解答题

8. 由实数构成的集合 A 满足条件: $a \in A \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A$, 试证明:

(1) 若 $2 \in A$, 则 A 中必有另外两个元素.

(2) 集合 A 不可能是单元素集.

(3) 集合 A 中至少有三个不同的元素.

第二节 子集、全集、补集

◎ 知识点剖析

本节介绍了子集、全集、补集、真子集等重要概念,对这些概念应从文字、符号、图示三方面进行理解.除此之外,对一些简单常用的结论应在理解的基础上予以必要的记忆.

1. 子集与真子集.子集这一概念描述了两个集合之间的包含关系,而真子集则与真包含等价.课本中利用子集这一概念定义了两个集合的相等,即若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称 A 与 B 相等,即 A 与 B 所含元素相同,记为 $A = B$.为了运算的需要,集合论中规定了 $\emptyset$ 是任何集合的子集,于是包含关系可综合叙述为:

(1) 若 $A = \emptyset$, 则 A 是任何集合(包括空集)的子集,是任何非空集合的真子集.

(2) 若 $A \neq \emptyset$, 且对任意 $x \in A$ 均有 $x \in B$, 则 $A \subseteq B$.

(3) 若 $A \subseteq B$, 且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则 $A \subsetneq B$, 也可叙述为: 若 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 则 $A \subsetneq B$.

2. 根据包含关系的定义,可知其有以下三个性质:

(1) 自反性: $A \subseteq A$, 即任何集合是它本身的子集.

(2) 对称性: 若 $A \subseteq B$, 则 $B \supseteq A$.

(3) 传递性: 若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

3. 全集与补集: $\complement_S A$ 表示 A 在 S 中的补集,其前提是 $A \subseteq S$. 求补运算离不开确定的全集,同一个集合,在不同的全集中得到的补集是不同的.经常用到的全集除实数集 $\mathbf{R}$ 外,还有平面上所有点的集合 $\{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in$

$\mathbf{R}\}$. 当然,视具体问题需要,全集的选择是灵活的.

4. 根据全集与补集的定义,可得以下简单性质:

$$(1) \complement_U U = \emptyset, (2) \complement_U \emptyset = U, (3) \complement_U A \subseteq U, (4) \complement_U (\complement_U A) = A,$$

$$(5) \text{若 } A = \complement_U B \text{ 则 } B = \complement_U A.$$

◎ 典型例题

例 1 设 $M = \{a | a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 证明: $A \subseteq M$

分析 欲证 $A \subseteq M$, 先证明 $A \subseteq M$, 再证明 M 中至少有一元素不在 A 中, 此时只须举一例即可.

证明 对 A 中任一元素 x_0 , 设 $x_0 = 2k_0 + 1, k_0 \in \mathbf{Z}$, 则由 $x_0 = 2k_0 + 1 = (k_0 + 1)^2 - k_0^2$, 可知 $x_0 \in M$, 即 A 中任一元素都在 M 中, 即 $A \subseteq M$ (1)

又由 $0 = 0^2 - 0^2 \in M$, 但 $0 \notin A$, 可知 $A \neq M$ (2)

由(1), (2)知 $A \subsetneq M$.

小结 本题再次说明了“ $x_0 \in A \Leftrightarrow x_0$ 具有 A 中元素的公共属性”这一等价变换的重要性, 这也是集合论中的最常用推理.

例 2 已知 $A = \{x | k + 1 \leq x \leq 2k\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $A \subseteq B$, 求 k 的范围.

分析 本题的关键是正确认识集合 A . 由 $A = \{x | k + 1 \leq x \leq 2k\}$ 可知 $A = \{x | x \leq 2k \text{ 且 } x \geq k + 1\}$. 当 $2k > k + 1$ 时, A 表示一切大于 $k + 1$ 小于 $2k$ 的实数的集合, 当 $2k = k + 1$ 时, $A = \{2\}$, 当 $2k < k + 1$ 时 $A = \emptyset$, 故本题须分类讨论.

解 (1) 当 $2k < k + 1$, 即 $k < 1$ 时, $A = \emptyset$ 符合 $A \subseteq B$.

(2) 当 $2k = k + 1$ 即 $k = 1$ 时, $A = \{2\}$ 符合 $A \subseteq B$.

(3) 当 $2k > k + 1$ 时, 欲使 $A \subseteq B$, 须有

$$\begin{cases} 2k > k + 1 \\ 2k \leq 3 \\ k + 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k \leq \frac{3}{2} \\ k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < k \leq \frac{3}{2}$$

综上, 符合题意的 k 的范围是 $k \leq \frac{3}{2}$

小结 对于条件 $A \subseteq B$, 一定要注意 $A = \emptyset$ 是否符合题意, 以防漏解.

例 3 已知全集 $U = \{2, x, x^2 - 1\}$, $A = \{2, y\}$, $\complement_U A = \{3\}$, 求 x 和 y 的值.

解 $\because \complement_U A = \{3\} \therefore 3 \in U$, 且 $A \subseteq U$.

(1) 若 $x = 3$, 则 $U = \{2, 3, 8\}$ 此时 $y = 8$.

(2) 若 $x^2 - 1 = 3$, 则 $x = \pm 2$ ($x = 2$ 不合互异性, 舍去),

取 $x = -2$, $U = \{2, -2, 3\}$, 此时 $y = -2$.

综上: $\begin{cases} x=3 \\ y=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

◎ 实践演练

A 卷

一、选择题

1. 已知 $M = \{x | kx \leq 2\}$, 下列说法正确的是 ()
(A) $\sqrt{2} \in M$ (B) $\sqrt{2} \notin M$
(C) $|\sqrt{2}| \in M$ (D) $|\sqrt{2}| \notin M$
2. 已知 A 为非空集合, 下列说法: (1) $\emptyset = \{0\}$, (2) $\emptyset \subsetneq \emptyset$, (3) $\emptyset \subsetneq A$
(4) $0 \in \emptyset$, 其中正确的个数为 ()
(A) 4 (B) 3
(C) 2 (D) 1
3. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
(A) $\{2\}$ (B) $\{4\}$
(C) $\{2\}, \{4\}$ (D) $\{2, 4\}$
4. 设 $S = \mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 1\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} | x > 1\}$, 则 ()
(A) $\complement_S A \subseteq \complement_S B$ (B) $\complement_S A \supseteq \complement_S B$
(C) $\complement_S A = \complement_S B$ (D) 都不对

二、填空题

5. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有真子集_____.
6. 集合 $A = \{x | y = x^2\}$ $B = \{y | y = x^2\}$, 则 A 与 B 的关系为_____.
7. 若 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ $A = \{1, 2\}$, $B \subseteq \complement_U A$, 则集合 B 的个数为_____.

三、解答题

8. 已知 $A = \{1, 3, x\}$ $B = \{1, x^2 - x + 1\}$ 且 $B \subseteq A$, 求 x .

9. 已知 $A = \{1, 1+x, 1+2x\}$ $B = \{1, y, y^2\}$, 若 $A = B$, 求 x 和 y .

10. 已知 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\complement_U A = \{2, 4, 6, 8\}$, $\complement_U B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$, 求集合 B .

B 卷

一、选择题

1. 设 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 4n, n \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 与 B 的关系为 ()

(A) $A \subseteq B$

(B) $A \supsetneq B$

(C) $A = B$

(D) $A \not\subseteq B$

2. 满足 $\{1\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合 M 的个数为 ()

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

3. 已知全集 $U = \{x | x > 5 \text{ 或 } x < -4\}$, 集合

$A = \{x | -6 < x < -4\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

(A) $\{x | -6 < x < 5\}$

(B) $\{x | x \leq -6 \text{ 或 } x > 5\}$

(C) $\{x | x \leq -6 \text{ 或 } x \geq 5\}$

(D) $\{x | x > 5\}$

4. 已知 $A = \{x | x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ $B = \{x | x = ak, k \in \mathbf{Z}\}$, 若

$A \subseteq B$, 则 a 的值为 ()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) 不存在

(D) 不确定

二、填空题

5. 若 $A = \{x | 1 < x < 2\}$ $B = \{x | x < a\}$ 且 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是_____.

6. 若 $A = \complement_U B$, $B = \complement_U C$, 则 A 与 C 的关系为_____.

7. 若集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 = 0\}$, $B = \{x | mx - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 m 的取值集合为_____.

三、解答题

8. 设 $U = \{1, 4, x\}$, $A = \{1, x^2\}$, 求 $\complement_U A$.

9. 已知 $A = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + 2a - 4 = 0\}$, 若 $B \subsetneq A$, 求实数 a 的值.

10. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 非空集合 $A = \{x \in U | x^2 - x + p = 0\}$, 求 p 值和 $\complement_U A$.

第三节 交集、并集

◎ 知识剖析

1. 概念理解: 由所有属于 A 且属于 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集, 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集. 学习时应结合图示法重点理解联结词“且”与“或”的意义, 特别对于联结词“或”, 其所给出的 A 与 B 的并集中的元素包括三类: 在 A 中不在 B 中的元素, 在 B 中不在 A 中的元素, 既在 A 中又在 B 中的元素.

2. 方法指导: 符号语言 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 及 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 给出了一个常用有效的推理过程. 因为 $A = \{x | x \in A\}$, $B = \{x | x \in B\}$, 所以 $\{x | x \in A\} \cup \{x | x \in B\} = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\} = \{x | x \in A\} \cap \{x | x \in B\}$, 这说明当一个集合的公共属性用“且”(“或”)联结时, 我们可将它分解为两个集合的交(并)集. 相反的过程可将两个集合的交集或并集写成一个集合. 视具体需要进行这种分合运算, 有助于我们认识集合本质, 发现解题思路. 如:

$$(1) \{(x, y) | y = 2x + 1\} \cap \{(x, y) | y = x - 2\} = \{(x, y) | \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}\} \\ = \{(-3, -5)\}$$

$$(2) \{x | 1 \leq x \leq 3\} \cap \{x | 2 < x \leq 4\} = \{x | 2 < x \leq 3\}$$

$$(3) \{x | x \leq 3\} \cup \{x | x \geq 2\} = \mathbf{R}.$$

对连续实数集(区间)的交、并、补运算, 可借助于数轴; 另外, 涉及抽象集合或多个有限集(区间)的交、并、补运算, 韦恩图常能起到令人惊奇的效果, 只是不能用作书写过程.

3. 常用性质: