王后雄学案

教材完全解读

选修·专题

高中数学 选修2-2

本册主编：宋春雨

小熊图书

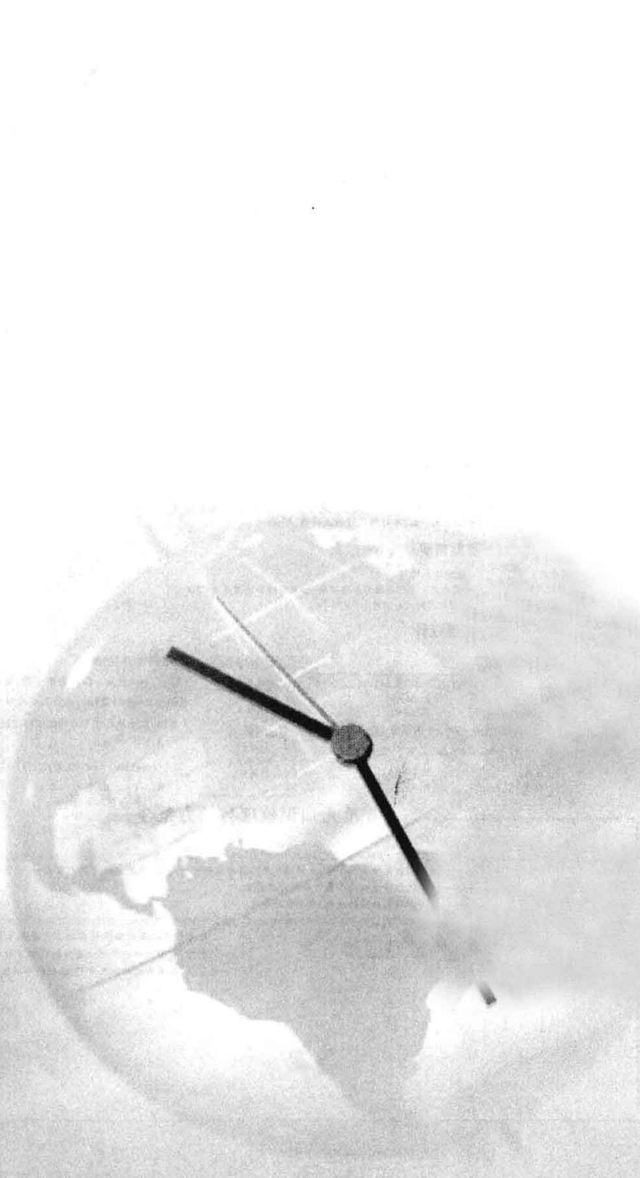
接力出版社 Publishing House
全国优秀出版社

王后雄学案

教材完全解读

选修·专题

高中数学　选修2-2



丛书主编：王后雄
本册主编：宋春雨
副 主 编：陈继雄
编　　委：宋春雨　陈继雄
　　　　　黄浩胜　田　军
　　　　　周金涛　邓满红

小熊图书
接力出版社 Jieli Publishing House
全国优秀出版社

丛书策划：熊　辉
责任编辑：吴惠娟
责任校对：覃灿均
封面设计：木头羊

JIAOCAI WANQUAN JIEDU
GAOZHONG SHUXUE
教材完全解读
高中数学　选修2-2
丛书主编：王后雄　本册主编：宋春雨
*
社　长：黄　俭　总编辑：白　冰
接力出版社出版发行
广西南宁市园湖南路9号　邮编：530022
E-mail：jielipub@public.nn.gx.cn
咸宁市鄂南新华印务有限公司印刷　全国新华书店经销
*
开本：889毫米×1194毫米　1/16　印张：11.75　字数：313千
2009年10月第4版　2010年10月第5次印刷
ISBN 978-7-80732-473-7
定价：19.70元

教材完全解读

本书特点

1. 以《课程标准》、《考试大纲》为编写依据，完全解读知识、方法、能力、考试题型，全面提高学习成绩。
2. 采用国际流行的双栏对照案例编写方式，左栏对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；右栏用案例诠释考点，对各个考点各个击破。

明确每课学习要求

以课标为依据，三维目标全解教材学习要求，提供总体的学习策略，提出具体的学习要诀，体现目标控制学习规则。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

解题错因导引

“点击考例”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。


教材完全解读 高中数学 选修2-2

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段。导数概念是微积分的核心概念之一。

1.1.1 变化率与导数的概念

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 函数的平均变化率

一般地，函数 $y=f(x)$，x_1,x_2 是其定义域内不同的两点，那么函数的变化率可用式子 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 表示，我们把这个式子称为……

2 方法·技巧平台

7. 如何求平均变化率

求函数的平均变化率通常用“两步”法，一是作差，二是作商。即先求出 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ 和 $\Delta x=x_2-x_1$，再对所求得的差作商，即得。

3 创新·思维拓展

11. 变化率在物理学中的应用

[例] 枪弹在枪筒中的运动可看做匀加速运动，如果它的加速度是 $a=5\times10^5\,m/s^2$，枪弹从枪口射出时所用的时间为 $1.6\times10^{-3}s$。

名题诠释

【例题1】 求函数 $y=3x^2+2$ 在区间 $[2,2+\Delta x]$ 内的平均变化率。

【答案】 $\Delta y=3(2+\Delta x)^2+2-(3\times2^2+2)=12\Delta x+3(\Delta x)^2$，所以平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=12+3\Delta x$。

【例题2】 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 附近的平均变化率，取 Δx 的值为 $\frac{1}{3}$，哪一点附近平均变化率最大？

【答案】 在 $x=1$ 附近的平均变化率为 $k_1=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x$；

在 $x=2$ 附近的平均变化率为 $k_2=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=4+\Delta x$；

4 能力·题型设计

速效基础演练

1. 在求平均变化率中，自变量的增量 Δx 应满足（　）

A. $\Delta x>0$　B. $\Delta x<0$　C. $\Delta x=0$　D. $\Delta x\neq0$

2. 已知函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图象上一点 $(1,1)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x,f(1+\Delta x))$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于（　）

A. 4　B. $4+2\Delta x$　C. $4+2(\Delta x)^2$　D. $4x$

点击考例

测试要点3 [例题5] 测试要点1 [例题1] 测试要点7 [例题2] 测试要点3 [例题6]

知能提升突破

1. 一木块沿某一斜面自由下滑，测得下滑的水平距离 s 与时间 t 之间的函数关系式为 $s=\frac{1}{8}t^2$，则 $t=2$ 秒时，此木块在水平方向的瞬时速度是（　）

A. 2　B. 1　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{4}$

2. 设函数 $f(x)=ax^3+2$，若 $f'(-1)=3$，则 $a=$（　）

A. -1　B. $\frac{1}{2}$　C. 1　D. $\frac{1}{3}$

单元知识梳理与能力整合

本章是中学选修内容中较为重要的知识，分析近几年的高考试题可以看出，导数是必考的内容之一，主要考查导数的概念、运算和导数的应用，估计今后几年高考命题的趋势是：

1. 运用导数的有关知识研究函数的性质，求函数的导数。

归纳·总结·专题

一、方法总结

1. 导数是在函数极限的基础上发展起来的研究变量的一门科学，它为有效地解决一些传统的初等数学问题提供了一般方法，如求曲线的切线方程，函数的单调区间，函数的最

1

双栏对照学习

左栏全面剖析考点知识，凸现“解题依据”和答题要点。

右栏用典型案例诠释左栏考点。左右栏讲解·案例一一对照，形成高效学习的范式。

教辅大师、特级教师王后雄教授科学超前的体例设置，帮您赢在学习起点，成就人生夙愿。

——题记

同步体验高考

结合本章节知识及考纲要求，精心选编最新五年高考试题，体现“高考在平时”的学习理念，同步触摸、感知高考，点拨到位，破解高考答题规律与技巧。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然。能使您养成良好规范的答题习惯。

目录

知识与方法

阅读索引

第一章　导数及其应用

第二章 推理与证明

第三章 数系的扩充与复数的引入

全书知识结构图解·名师学法指津

一、全书知识结构图解

- 微积分
  - 导数
    - 导数的概念
      - 函数的变化率
      - 运动的瞬时速度
      - 曲线的切线斜率
    - 导数的运算
      - 基本初等函数求导
      - 导数的四则运算
      - 简单复合函数的导数
    - 导数的应用
      - 函数的单调性研究
      - 函数的极值与最值
      - 曲线的切线
      - 变速运动的速度
      - 优化问题
  - 定积分
    - 定积分概念
      - 曲边梯形的面积
      - 变力所做的功
      - 和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$的极限
    - 微积分基本定理
      - 微积分基本定理的含义
      - 微积分基本定理的应用

- 推理与证明
  - 推理
    - 合情推理
      - 归纳推理
      - 类比推理
    - 演绎推理
  - 证明
    - 直接证明
      - 综合法
      - 分析法
    - 间接证明
      - 反证法
    - 数学归纳法

- 复数
  - 复数的概念
    - 复数的有关概念
    - 复数相等的充要条件
  - 复数的运算
    - 复数的加减法及其几何意义
    - 复数的乘除法法则
  - 数系的扩充
    - 复数的分类
    - 实系数一元二次方程

二、名师学法指津

本册的主要内容是导数及其应用,推理与证明,数系的扩充与复数的引入等三个部分.导数是高等数学的基础,是对函数图象和性质的总结和拓展,是研究函数单调性、极值、最值,讨论函数图象的变化趋势的重要工具.学习导数,一是要借助于实例理解平均变化率和瞬时变化率;认识和理解导数的概念;通过例题,体会利用导数的定义求导数的方法.二是要借助于图形去认识和理解导数的几何意义,以及用导数的几何意义去解决问题,结合图形去认识和理解导数在研究函数性质中的作用.三是通过导数的学习,要努力培养自己的观察、比较、概括、计算能力,形成运用导数知识解决导数计算问题和简单的求曲线的切线问题的能力,体会数形结合的数学思想方法.

推理与证明是数学的基本思维过程,通过学习推理与证明,有助于发展思维能力,提高数学素养,形成严谨的理性思维和科学精神.此章知识是解决数学问题的基本方法.学习时注意以下几点:

1. 通过实例运用合情推理去探索、猜想一些数学结论,并用演绎推理确认所得结论的正确性,或者用反例推翻错误的猜想.学习的重点在于通过具体实例理解合情推理与演绎推理,而不追求对概念的抽象表述.

2. 本章设置的证明内容是对已学过的基本证明方法的总结.在学习中应通过实例认识各种证明方法的特点,体会证明的必要性,对于证明的技巧性不宜做过高的要求.

3. 结合以前学过的内容,体会推理和证明在数学学习和日常生活中的意义和作用.

数系的扩充与复数的引入这一章内容,一方面使我们完善了数系体系;另一方面扩大了知识面,拓展了我们的视野,为更深层次的学习打下了基础.学习本章应注意:

1. 对于复数$z=a+bi(a、b\in\mathbf{R})$既要从整体的角度去认识它,把z看成一个整体,又要从实部和虚部的角度分解成两部分去认识它.这是解复数问题的重要思路之一.

2. 转化思想的应用在本章体现较多.两个复数相等的充要条件是把复数问题转化为实数问题的主要方法.

3. 数和形的有机结合是把复数问题转化为几何问题的重要途径之一.

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

课标三维目标

微积分的创立是数学发展中的里程碑,它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期,为研究变量和函数提供了重要的方法和手段.导数概念是微积分的核心概念之一,它有极其丰富的实际背景和广泛的应用.课程标准对本节的要求如下:

1. 知识与技能

通过对大量实例的分析,经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,了解导数概念的实际背景,知道瞬时变化率就是导数,体会导数的思想及其内涵.

2. 过程与方法

通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

1.1.1 变化率与导数的概念

解题依据

1 知识·能力聚焦

1. 函数的平均变化率

一般地,函数 $y=f(x)$,x_1,x_2 是其定义域内不同的两点,那么函数的变化率可用式子$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$表示,我们把这个式子称为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.习惯上用 Δx 表示 x_2-x_1,即 $\Delta x=x_2-x_1$.可把 Δx 看做相对于 x_1 的"增量",可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2;类似地,$\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$.于是,平均变化率可以表示为$\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

人教A版

已知函数 $y=f(x)$,x_0,x_1 是定义域内不同的两点,记 $\Delta x=x_1-x_0$,$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,则当 $\Delta x\neq 0$ 时,商$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$称作函数 $y=f(x)$ 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$(或$[x_0+\Delta x,x_0]$)的平均变化率.

人教B版

对一般的函数 $y=f(x)$ 来说,当自变量 x 从 x_1 变为 x_2 时,函数值从 $f(x_1)$ 变为 $f(x_2)$,它的平均变化率为$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

通常我们把自变量的变化 x_2-x_1 称作自变量的改变量,记作 Δx,函数值的变化 $f(x_2)-f(x_1)$ 称作函数值的改变量,记作 Δy,这样函数的平均变化率就可以表示为函数的改变量与自变量的改变量之比,即$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

名题诠释

◈【例题1】 若函数 $f(x)=2x^2+1$,图象上 $P(1,3)$ 及邻近上点 $Q(1+\Delta x,3+\Delta y)$,则$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$( ).

A. 4 B. $4\Delta x$ C. $4+2\Delta x$ D. $2\Delta x$

【解析】 $\because \Delta y=2(1+\Delta x)^2+1-2\times 1^2-1=4\Delta x+2(\Delta x)^2$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+2\Delta x$.

【答案】 C

◈【例题2】 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 附近的平均变化率,取 Δx 的值为$\frac{1}{3}$,哪一点附近平均变化率最大?

【答案】 在 $x=1$ 附近的平均变化率为

$k_1=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x$;

在 $x=2$ 附近的平均变化率为

$k_2=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=4+\Delta x$;

在 $x=3$ 附近的平均变化率为

$k_3=\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\frac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=6+\Delta x$.

若 $\Delta x=\frac{1}{3}$,则 $k_1=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$,$k_2=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$,$k_3=6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$,

由于 $k_1<k_2<k_3$,

$\therefore$ 在 $x=3$ 附近的平均变化率最大.

◈【例题3】 试比较正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$附近的平均变化率哪一个大?

【解析】 先将正弦函数在每个自变量的附近的平均变化率求出,然后进行大小比较.

【答案】 当自变量从0变到 Δx 时,函数的平均变化率为 $k_1=\frac{\sin\Delta x-\sin 0}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$.

我们用它来刻画函数值在区间$[x_1,x_2]$上变化的快慢.

北师大版

2. 平均速率

设物体运动路程与时间的关系是$s=f(t)$,在t_0到$t_0+\Delta t$这段时间内,物体运动的平均速度是$v_0=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

[注意] 在匀速直线运动中,此值$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$是恒定的.在非匀速直线运动中,比值$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$不是恒定的.要精确地描述非匀速直线运动,就要知道物体在每一时刻运动的快慢程度.注意结合物理学中的$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

人教B版

设物体运动的路程与时间的关系是$s=s(t)$,我们用一段时间内物体的平均速度刻画了物体运动的快慢,当时间从t_0变为t_1时,物体所走的路程从$s(t_0)$变为$s(t_1)$,这段时间内物体的平均速度是$\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

北师大版

3. 瞬时速度

做变速直线运动的物体在不同时刻的速度是不同的,把物体在某一时刻的速度叫瞬时速度.用数学语言描述为:

设物体运动的路程与时间的关系是$s=f(t)$,当Δt趋近于0时,函数$f(t)$在t_0到$t_0+\Delta t$之间的平均变化率为$\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$趋近于常数.我们把这个常数称为$t_0$时刻的瞬时速度.

人教A版

若物体的运动方程为$s=f(t)$,则物体在任意时刻t的瞬时速度$v(t)$就是平均速度$v(t,d)=\dfrac{f(t+d)-f(t)}{d}$在$d$趋近于0时的极限.

湘教版

理解瞬时速度应注意:

(1)Δt趋近于0,是指时间间隔Δt越来越短.能越过任意小的时间间隔,但始终不能为零.

(2)Δt、Δs在变化中都趋近于0,但它们的比值却趋近于一个确定的常数.

4. 瞬时变化率

一般地,函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的瞬时变化率是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

人教A版

对于一般的函数$y=f(x)$,在自变量x从x_0变到x_1的过程中,若设$\Delta x=x_1-x_0$,$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$,则函数的平均变化率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

而当Δx趋于0时,平均变化率就趋于在x_0点的瞬时变化率,瞬时变化率刻画的是函数在一点处变化的快慢.

北师大版

5. 导数

设函数$y=f(x)$在包含x_0在某个区间上有定义,当自变量$x=x_0$附近改变量为Δx时,函数值相应地改变$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

当自变量从$\dfrac{\pi}{2}$变到$\Delta x+\dfrac{\pi}{2}$时,函数的平均变化率为$k_2=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\dfrac{\pi}{2}}{\Delta x}=\dfrac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}$.

由于是在$x=0$和$x=\dfrac{\pi}{2}$的附近的平均变化率,可知Δx较小,但Δx既可化为正,又可化为负.

当$\Delta x>0$时,$k_1>0$,$k_2<0$,此时有$k_1>k_2$;

当$\Delta x<0$时,$k_1-k_2=\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}-\dfrac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=\dfrac{\sin\Delta x-\cos\Delta x+1}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1}{\Delta x}$.$\because\Delta x<0$,$\therefore\Delta x-\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\pi}{4}$,

$\therefore\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,从而有$\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)<-1$,

$\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1<0$,$\therefore k_1-k_2>0$,即$k_1>k_2$.

综上可知,正弦函数$y=\sin x$在$x=0$附近的平均变化率大于在$x=\dfrac{\pi}{2}$附近的平均变化率.

【点评】 看平均变化率哪一个大,实则是比较大小的问题,应按作差法或作商法的步骤进行判断,关键是对差的符号进行判别.

【例题4】 已知某质点按规律$s=(2t^2+2t)$m做直线运动,求:

(1)该质点在前3s内的平均速度;

(2)该质点在2s到3s内的平均速度.

【答案】 (1)由题意知,$\Delta t=3$s,$\Delta s=s(3)-s(0)=24$m,

$\therefore$ 平均速度为$v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{24}{3}=8$m/s.

(2)由题意知,$\Delta t=3-2=1$s,$\Delta s=s(3)-s(2)=12$m,

$\therefore$ 平均速度为$v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=12$m/s.

【例题5】 以初速度$v_0(v_0>0)$竖直上抛的物体,t秒时间内的高度为$s(t)=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$,求物体在时刻$t_0$时的瞬时速度.

【解析】 先求出Δs,再用定义求$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$当$\Delta t\to 0$时的极限值.

【答案】 $\because\Delta s=v_0(t_0+\Delta t)-\dfrac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\left(v_0t_0-\dfrac{1}{2}gt_0^2\right)=(v_0-gt_0)\Delta t-\dfrac{1}{2}g(\Delta t)^2$,

$\therefore\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=v_0-gt_0-\dfrac{1}{2}g\Delta t$,当$\Delta t\to 0$时,$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\to v_0-gt_0$.

故物体在时刻t_0时的瞬时速度为v_0-gt_0.

【点评】 瞬时速度即平均速度在$\Delta t\to 0$时的极限值,为此,要求瞬时速度,应先求出平均速度.

【例题6】 质点M按规律$s(t)=at^2+1$做直线运动(位移单位:m,时间单位:s).若质点M在$t=2$s时的瞬时速度为8m/s,求常数a的值.

【解析】 $\because\Delta s=s(2+\Delta t)-s(2)=a(2+\Delta t)^2+1-a\cdot 2^2-1=4a\Delta t+a(\Delta t)^2$,$\therefore\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=4a+a\Delta t$.在$t=2$时,瞬时速度为$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=4a$,即$4a=8$,$\therefore a=2$.

如果Δx趋近于0时，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$趋近于一个常数$e$，那么这个常数$e$称为函数$f(x)$在点$x_0$的瞬时变化率. 函数在$x_0$处的瞬时变化率，通常称为$f(x)$在$x=x_0$处的导数. 记作$f'(x_0)$或$f'(x)|_{x=x_0}$，即$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

人教A版

设函数$y=f(x)$在区间(a,b)上有定义，$x_0\in(a,b)$，若Δx无限趋近于0时，比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$无限趋近于一个常数$A$，则称$f(x)$在$x=x_0$处可导，并称常数$A$为函数$f(x)$在$x=x_0$处的导数，记作$f'(x_0)$.

江苏版

[注意] (1)Δx是自变量x在x_0处的改变量，所以Δx可正、可负，但不能为零. 当$\Delta x>0$(或$\Delta x<0$)，$\Delta x\to 0$表示$x+\Delta x$从右边(或从左边)趋近于x_0，Δy是相应函数的改变量，Δy可正、可负，也可以为零.

(2)函数$f(x_0)$在x_0处可导，是指当$\Delta x\to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to A$(常数).

6. 导函数

如果$f(x)$在开区间(a,b)内每一点x都是可导的，则称$f(x)$在区间(a,b)内可导，在区间$(a、b)$内，$f'(x)$构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数$y=f(x)$的导函数，简称为导数.

人教B版

区分导函数与函数在一点处的导数，要明确以下两点：

(1)函数在一点处的导数，就是在该点的函数改变量与自变量的改变量的比值的极限，它是一个数值，不是变数.

(2)函数的导数即是函数的导函数，是对某一区间内任意一点x而言的函数$f(x)$在(a,b)内每一点都可导，是指对于区间(a,b)内每一个确定的值x_0，都对应着一个确定的导数值$f'(x_0)$，根据函数定义，在(a,b)内就构成了一个新的函数. 即为函数的导函数.

2 方法·技巧平台

7. 如何求平均变化率

求函数的平均变化率通常用"两步"法，一是作差，二是作商. 即先求出$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$和$\Delta x=x_2-x_1$，再对所求得的差作商，即得$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

特别应注意的是：

(1)$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$，式子中$\Delta x$、$\Delta y$的值可正、可负，但$\Delta x$的值不能为零，$\Delta y$的值可以为零. 若函数$f(x)$为常数函数时，$\Delta y=0$.

【例题7】 设函数$f(x)$在点x_0处可导，试求下列各极限的值.

(1)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

【解析】 在导数的定义中，增量Δx的形式是多种多样的，但不论Δx选择哪种形式，Δy也必须选择相对应的形式. 利用函数$f(x)$在点x_0处可导的条件，可以将已给定的极限式恒等变形转化为导数定义的结构形式.

【答案】 (1)原式$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-(-\Delta x)}$

$=-\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$. ($\Delta x\to 0$时，$-\Delta x\to 0$)

(2)原式$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[f'(x_0)+\lim\limits_{-h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]$

$=\frac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=f'(x_0)$.

【点评】 概念是分析解决问题的重要依据，只有熟练掌握概念的本质属性，把握其内涵与外延，才能灵活地应用概念进行解题. 不能准确分析和把握给定的极限式与导数的关系，盲目套用导数的定义是使思维受阻的主要原因，解决这类问题的关键就是等价变形，使问题转化.

【例题8】 求函数$y=\frac{4}{x^2}$在$x=2$处的导数.

【解析】 根据导数的定义求导数是求函数导数的基本方法.

【答案】 解法1：(导数定义法)

$\because \Delta y=\frac{4}{(\Delta x+2)^2}-\frac{4}{2^2}=\frac{4}{(\Delta x+2)^2}-1=-\frac{(\Delta x)^2+4\Delta x}{(\Delta x+2)^2}$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\Delta x+4}{(\Delta x+2)^2}$, $\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+4}{(\Delta x+2)^2}=-1$.

解法2：(导函数的函数值法)

$\because \Delta y=\frac{4}{(x+\Delta x)^2}-\frac{4}{x^2}=-\frac{4\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$, $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{4(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$.

$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{4(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}=-\frac{8}{x^3}$.

$\therefore f'(2)=y'|_{x=2}=-1$.

【例题9】 讨论函数$f(x)=|x|(2+x)$在点$x_0=0$处是否有导数？若有，求出$f'(x)$；若没有，说明理由.

【答案】 由题设有$f(x)=\begin{cases}2x+x^2 & (x\geq 0),\\ -2x-x^2 & (x<0).\end{cases}$

$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\begin{cases}2\Delta x+(\Delta x)^2 & (\Delta x>0),\\ -2\Delta x-(\Delta x)^2 & (\Delta x<0).\end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}(2+\Delta x)=2$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}(-2-\Delta x)=-2$.

$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\therefore \Delta x\to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$极限不存在.

$\therefore$ 函数$f(x)=|x|(2+x)$在点$x_0=0$处没有导数，即不可导.

(2)在式子$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$中,$\Delta y$与$\Delta x$是相对应的"增量",即在$\Delta x=x_2-x_1$时,$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$.

(3)在式子$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$中,当$x_1$取定值,$\Delta x$取不同的数值时,函数的平均变化率不同;当$\Delta x$取定值,$x_1$取不同的数值时,函数的平均变化率也不一样.

8. 如何求函数在一点处的导数

(1)利用导数定义求函数在一点处的导数,通常用"三步法".

①计算函数的增量:

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

②计算函数的增量与自变量增量Δx的比:$\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

③计算上述增量的比值当$\Delta x\to 0$时的极限,即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

(2)利用基本初等函数的导数公式求初等函数的导数.(见1.2.2节)

9. "函数$f(x)$在一点处的导数""导函数""导数"三者之间的区别与联系

(1)"函数在一点处的导数",就是在该点的函数的改变量与自变量的改变量的比的极限,它是一个数值,不是变量.

(2)"导函数":如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内每一点都可导,就说$f(x)$在开区间(a,b)内可导,这时对于区间(a,b)内每一个确定的值x_0,都对应着一个导数$f'(x_0)$,这样就在开区间(a,b)内构成一个新的函数,我们把这一新函数叫做$f(x)$在开区间(a,b)内的导函数,记作$f'(x)$或y',即$f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(3)导函数也简称导数,所以

"导数"$\begin{cases}f(x)\text{在一点}x_0\text{处的导数}\\ \text{导函数}\end{cases}$ 个别与一般

(4)函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$就是导函数$f'(x)$在点$x=x_0$处的函数值.$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$.

所以求函数在一点处的导数,一般是先求出函数的导函数,再计算这点的导函数值.

10. 思维误区剖析

(1)正确地理解Δx与Δy的含义,Δx并非Δ与x的积,而是一个整体;$(\Delta x)^2$不能写成Δx^2,它代表x的改变量,它的取值是一个非零实数,可正可负.

(2)在求平均变化率时,计算Δy很容易出现运算错误,因而求Δy时要特别仔细、细心.

(3)忽视导数定义,导致错误.

[例] 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1) & (x\leqslant 1),\\ \frac{1}{2}(x+1) & (x>1),\end{cases}$判断$f(x)$在$x=1$处是否可导.

【例题10】 已知$f'(x_0)=-2$,求$\lim\limits_{k\to 0}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{k}$的值.

【解析】 解答本例的关键是如何将待求的极限值转化为导数定义的形式,从而运用已知条件求得极限值.

【答案】 $\because f'(x_0)=\lim\limits_{k\to 0}\frac{f\left[x_0+\left(-\frac{1}{2}k\right)\right]-f(x_0)}{-\frac{1}{2}k}=-2.$

$\left(\text{注}:\Delta x=-\frac{1}{2}k\right)$

$\therefore \lim\limits_{k\to 0}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{k}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to 0}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{2}k\right)-f(x_0)}{-\frac{1}{2}k}$

$=-\frac{1}{2}f'(x_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)=1.$

【例题11】 已知$f(x)=\sqrt{x+2}$,求$f'(2)$.

【答案】 $\because \Delta y=\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x+2)-(x+2)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2})}$

$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$.

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$.

$f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2+2}}=\frac{1}{4}$.

【例题12】 已知函数$y=ax^2+bx+c$,求y'及$y'|_{x=2}$.

【答案】 $\because \Delta y=a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)$
$=2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x}{\Delta x}=2ax+b+a\Delta x$.

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2ax+b+a\Delta x)=2ax+b$.

$y'|_{x=2}=2a\times 2+b=4a+b$.

【点评】 利用导数的定义求导,"三步法"模式是固定的,关键要注意求极限时,$\Delta x\to 0$时,等价于$x\to x_0$,所以在形式上函数$f(x)$在点x_0处的导数也可写为$f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

【例题13】 若函数$f(x)$在$x=a$处的导数为A,求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a+5h)}{h}$的值.

2008年天津

【解析】 已知函数$f(x)$在$x=a$处的导数为A,要求所给极限的值,必须将已给极限式转化为导数的定义式.

【答案】 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a+5h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)+f(a)-f(a+5h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{h}$

$=4\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}-5\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}$

$=4A-5A=-A$.

［错解］ $\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}[(1+\Delta x)^2+1]-\frac{1}{2}(1^2+1)}{\Delta x}=1$，

$\therefore f'(1)=1$.

［剖析］ 分段函数在"分界点"处的导数，需根据定义来判断是否可导.

$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{2}[(1+\Delta x)^2+1]-\frac{1}{2}(1^2+1)}{\Delta x}=1$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(1+\Delta x+1)-\frac{1}{2}(1+1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

［注意］ 函数在某一点的导数是一个极限值. 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 中，$\Delta x\to 0$，包括 $\Delta x\to 0^+$ 与 $\Delta x\to 0^-$. 因此，在判定分段函数在"分界点"处的导数是否存在时，要验证其左、右极限是否存在且相等，如果都存在且相等，才能判定这点存在导数，否则不存在导数.

3 创新·思维拓展

11. 变化率在物理学中的应用

［例］ 枪弹在枪筒中的运动可看做匀加速运动，如果它的加速度是 $a=5\times 10^5\text{m/s}^2$，枪弹从枪口射出时所用的时间为 1.6×10^{-3}s. 求枪弹射出枪口时的瞬时速度.

［解析］ 要求 $t=1.6\times 10^{-3}$s 时刻的瞬时速度，需先写出运动方程，然后求解. 由物理学公式可知运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}at^2$.

$\because \Delta s=\dfrac{1}{2}a(t_0+\Delta t)^2-\dfrac{1}{2}at_0^2=at_0\Delta t+\dfrac{1}{2}a(\Delta t)^2$.

$\therefore \dfrac{\Delta s}{\Delta t}=at_0+\dfrac{1}{2}a\Delta t$. $\therefore \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=at_0$.

由题意知，$a=5\times 10^5$，$t_0=1.6\times 10^{-3}$，

$\therefore at_0=8\times 10^2=800(\text{m/s})$.

即枪弹射出枪口时的瞬时速度为 800m/s.

12. 变化率在实际问题中的应用

变化率问题在科学技术、生物、医学、化学反应、经济管理中随处可见. 下面选取两例，供同学们学习时参考.

(1)污染治理问题

［例］ 国家环保总局对长期超标排放污染物的企业下达了限期治理的决定. 国家环保总局在规定的排污达标日期前，对甲、乙两家企业进行检查，其连续检测结果如图 1－1－1－1所示(其中 W 表示排污量). 试问哪个企业治污效果较好？为什么？

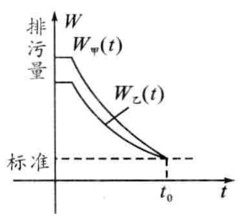


图 1－1－1－1

［解析］ 在 t_0 处，虽然 $W_甲(t_0)=W_乙(t_0)$，然而，$W_乙(t_0-\Delta t)<W_甲(t_0-\Delta t)$ $(\Delta t>0)$.

所以$\dfrac{W_甲(t_0)-W_甲(t_0-\Delta t)}{-\Delta t}>\dfrac{W_乙(t_0)-W_乙(t_0-\Delta t)}{-\Delta t}$，

所以在单位时间里企业甲比企业乙的平均治污率大，因此企业甲比企业乙治污效果略好.

【点评】 运用定义求函数的导数常常有以下两种形式.

(1)$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(2)$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

◈【例题 14】 用导数的定义求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数.

【解析】 根据导数的定义，第一步求函数的增量 Δy，第二步求平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，第三步取极限得导数.

【答案】 $\because \Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\Delta x}}-1=\dfrac{1-\sqrt{1+\Delta x}}{\sqrt{1+\Delta x}}=\dfrac{1-1-\Delta x}{(1+\sqrt{1+\Delta x})\sqrt{1+\Delta x}}=\dfrac{-\Delta x}{(1+\sqrt{1+\Delta x})\sqrt{1+\Delta x}}$，

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{(1+\sqrt{1+\Delta x})\sqrt{1+\Delta x}}$，$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{2}$.

【点评】 掌握用定义法求导数的步骤，并注意运算技巧.

◈【例题 15】 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2-x} & x>1,\\ x & x\leqslant 1.\end{cases}$

(1)若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，试求 a、b 的值；

(2)在(1)的条件下，试判断函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导.

【解析】 根据函数的连续性定义可知，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$. 利用这个等式可求出 a、b 的值. 当 a、b 的值确定之后，再根据导数的定义判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导.

【答案】 (1)若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$，

而$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$. $\because \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$.

又 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x-1)+b}{x(x-1)}=1$.

$\therefore b=0$，$a=1$.

(2)由(1)得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>1,\\ x & x\leqslant 1.\end{cases}$ $\because \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{(1+\Delta x)-1}{\Delta x}=1$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{1+\Delta x}-\frac{1}{1}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{1+\Delta x}\right)=-1$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

◈【例题 16】 已知一物体的运动方程是 $s=\begin{cases}3t^2+2 & 0\leqslant t<3,\\ 29+3(t-3)^2 & t\geqslant 3.\end{cases}$ 求此物体在 $t=1$ 和 $t=4$ 时的瞬时速度.

●2009 年山东模拟题●

【答案】 当 $t=1$ 时，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{3(1+\Delta t)^2+2-(3\times 1^2+2)}{\Delta t}=6+3\Delta t$，

所以 $s'(1)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(6+3\Delta t)=6$.

即当 $t=1$ 时的瞬时速度为 6.

当 $t=4$ 时，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{29+3(4+\Delta t-3)^2-[29+3(4-3)^2]}{\Delta t}=6+3\Delta t$，

所以 $s'(4)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(6+3\Delta t)=6$.

即当 $t=4$ 时的瞬时速度为 6.

说明：近年来，各级主管部门加大了对环境污染的治理力度，“爱护环境，人人有责”成为全社会的共识，以人为本，和谐发展，保护我们居住的家园是新时代的主旋律.

(2)气球充气问题

[例] 我们知道，在给气球充气时，开始充气时膨胀较快，随后膨胀将逐渐缓慢下来.气球膨胀实际上就是气球半径增大，表面积增大，体积增大.假设气球是不可压缩的，即气体体积不变，试问：

①如何描述气球的表面积相对于半径的增长率？

②如何描述气球的体积相对于半径的增长率？

[分析] 问题①②实际上说是求表面积 S，体积 V 对于 r 的变化率.

[解析] 以 r 表示气球的半径，S 表示气球的表面积，V 表示气球的体积，S、V 皆为 r 的函数 $S=4\pi r^2$，$V=\frac{4}{3}\pi r^3(r>0)$.

①气球表面积 S 相对于 r 的增长率就是函数 $S=4\pi r^2(r>0)$ 的瞬时变化率.

$$\frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{4\pi(r+\Delta r)^2-4\pi r^2}{\Delta r}=\frac{8\pi r\Delta r+4\pi(\Delta r)^2}{\Delta r}=8\pi r+4\pi\Delta r,$$

当 Δr 趋于0时，$4\pi\Delta r$ 将趋于0，故气球表面积增长率为 $8\pi r$.

即随着 r 的增长，气球表面积增长率逐渐增大，故随着气球不断充气，表面积增长率不断增大.

②气球体积 V 相对于半径 r 的增长率就是函数 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 的瞬时变化率.

$$\frac{\Delta V}{\Delta r}=\frac{\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta r}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{3r^2\Delta r+3r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3}{\Delta r}=4\pi r^2+4\pi r\Delta r+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^2.$$

当 Δr 趋于0时，$4\pi r\Delta r+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^2$ 将趋于0，故气球的体积相对于半径的增长率为 $4\pi r^2$.

即随着 r 的增长，气球体积增长率逐渐增大，故随着气球不断充气，气球体积的增长率不断增大，且其增长率恰好等于气球表面积(这很有意思).

13. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导与连续的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，必在此点处连续；反之则不然，即函数在一点处连续，但不一定可导.

[例] 求证：函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处连续但不可导.

[证明] 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处连续.

$\because f(0)=0$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}|x|=0$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(0)=0$，即函数 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续，但在 $x_0=0$ 处不可导.$\because f(x)$ 在 $x_0=0$ 及其附近有意义.

又 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\begin{cases}1 & \Delta x>0,\\ -1 & \Delta x<0.\end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$，而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$，

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处连续但不可导.

【例题17】 火箭竖直向上发射，熄火时向上速度达到 100m/s.试问熄火后多长时间后火箭速度为零？($g=9.8\text{m/s}^2$)

【解析】 火箭的运动方程为 $h(t)=100t-\frac{1}{2}gt^2$.

在 t 附近的平均变化率为

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{\left[100(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\right]-\left(100t-\frac{1}{2}gt^2\right)}{\Delta t}=\frac{100\Delta t-gt\cdot\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t.$$

$$h'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t\right)=100-gt.$$

令 $h'(t)=0$，即 $100-gt=0$，解得 $t=\frac{100}{9.8}\approx 10.2(\text{s})$.故火箭熄火后约 10.2s 后速度变为零.

【例题18】 已知成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=3q^2+1$，求当产量 $q=30$ 时的边际成本.

【解析】 设成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=c(q)$，当产量为 q_0 时，产量的变化 Δq 对成本的影响可用增量比 $\frac{\Delta c}{\Delta q}=\frac{c(q_0+\Delta q)-c(q_0)}{\Delta q}$ 刻画.如果 Δq 无限趋近于0时，$\frac{\Delta c}{\Delta q}$ 无限趋近于常数 A，经济学上称 A 为边际成本，它表明当产量为 q_0 时，增加单位产量需付出的成本为 A，它是实际付出成本的一个近似值.

【答案】 $\because \Delta c=3(30+\Delta q)^2+1-(3\times 30^2+1)=180\Delta q+3(\Delta q)^2$，

$\therefore \frac{\Delta c}{\Delta q}=\frac{180\Delta q+3(\Delta q)^2}{\Delta q}=180+3\Delta q.$

$\therefore A=\lim\limits_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta c}{\Delta q}=\lim\limits_{\Delta q\to 0}(180+3\Delta q)=180.$

$\therefore$ 当产量 $q=30$ 时的边际成本为180.

【例题19】 一正方形铁板在0℃时，边长为 10cm，加热后会膨胀.当温度为 t℃时，边长变为 $10(1+at)\text{cm}$，a 为常数，试求铁板面积对温度的膨胀率.

【解析】 本题是求膨胀率问题，要求膨胀率应先求出膨胀前后铁板的面积，再求面积的增量，从而可求 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

【答案】 设温度的增量为 Δt，则铁板面积的增量为

$$\begin{aligned}\Delta S&=10^2[1+a(t+\Delta t)]^2-10^2(1+at)^2\\&=200(a+a^2t)\Delta t+100a^2(\Delta t)^2,\end{aligned}$$

因此 $\frac{\Delta S}{\Delta t}=200(a+a^2t)+100a^2\Delta t.$

【例题20】 设圆的面积为 S，半径为 r，求面积 S 关于半径 r 的变化率.

【解析】 $\because \Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=\pi[r^2+2r\Delta r+(\Delta r)^2]-\pi r^2=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2$，

$\therefore \frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2}{\Delta r}=2\pi r+\pi\Delta r.$

【例题21】 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

【解析】 显然函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故在点 $x=0$ 处是连续的，但在点 $x=0$ 处不可导.这是因为在点0处有 $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=h^{-\frac{2}{3}}$.因而，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}$，即导数为无穷大(注意，导数不存在)，这个事实在图形中表现为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点 O 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$.

【点评】 在点 x 处可导的函数在点 x 处必连续，但是，在某点连续的函数在该点未必可导.因此，函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件.