高等学校经济数学应用教程

教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题

经济计算技术

张从军　伍家凤　编著

万树文　赵中华

博学·经济数学系列

复旦大學出版社

www.fudanpress.com.cn

高等学校经济数学应用教程

教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题

经济计算技术

张从军　伍家凤
万树文　赵中华　编著

博学·经济数学系列

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

经济计算技术/张从军等编著. —上海:复旦大学出版社,2010.5
(复旦博学·经济数学系列)
高等学校经济数学应用教程
ISBN 978-7-309-07243-3

Ⅰ. 经… Ⅱ. 张… Ⅲ. 经济数学-计算技术-高等学校-教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 075572 号

经济计算技术
张从军 伍家凤 万树文 赵中华 编著
出品人/贺圣遂 责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海申松立信印刷有限责任公司

开本 787×960 1/16 印张 12.75 字数 224 千
2010 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-07243-3/F·1596
定价:25.00 元

前　言

高科技的出现把现代社会推进到数学技术的新时代，数学技术在人类生活中发生了革命性的变化.数学学科实现了从科学到技术的转变，给工业化和信息化的社会带来了重大的效益，推动了经济的发展与社会的进步.21世纪的今天，数学已不仅仅是科学，数学正在从科学走向技术.

计算机是对20世纪科学、工程技术和人类社会生活影响最深刻的高新技术之一.然而，计算机对科学技术最深刻的影响，莫过于它使得科学计算并列于理论分析和实验研究，成为人类探索未知科学领域和进行大型工程设计的第三种方法和手段.科学计算作为当今科学研究的3种基本手段之一，是将数学触角伸向其他学科的推进器.它在创新性研究中具有突出的作用，因此它的发展受到广泛关注.

计算机与数学的有机结合形成了"科学计算"的研究方法，它的核心内容是以现代化的计算机及数学软件为工具，以数学模型为基础进行模拟研究.根据数学模型提出的问题，建立求解问题的数值计算方法并进行方法的理论分析，直到编制出算法程序、上机计算得到数值结果，以及对结果进行经济分析，这一过程就是本书介绍的主要对象和内容.

经济计算技术着重考虑面向计算机的、能解决实际经济问题的数值计算方法.具体地说，首先要构造可求解各种经济问题的数值计算方法，分析方法的可靠性，即按此方法计算得到的解是否可靠，以确保计算解的有效性；其次，要分析方法的效率，分析比较求解同一问题的各种方法的计算量和存储量，以便使用者根据各自的情况采用高效率的方法，节省人力、物力和时间.

目前，经济问题的数值计算方法与计算机技术的结合已相当紧密，计算机上使用的数值计算方法也不可枚举.在实际的经济问题研究中，所计算的问题往往是大型的、复杂的和综合的，但是有一些最基础、最常用的数值方法，它们不仅可以直接应用于实际计算，而且它们的方法及其分析的基础同样适用于非经济领域的数值计算问题.

对于经济管理类各专业学生而言，首先需要了解的就是这些基础的数值方法以及它们的分析，其内容包括线性代数问题（方程组和特征值问题）及非线性方程的数值解法，函数的插值和逼近，数值积分以及常微分方程的数值解法等.

本书作为引论性课程的教材，涉及的算法都是很经典的.学习经济计算技术这门课程的目的，不仅要掌握算法的方法本身和算法的分析细节，而且要掌握算法背后的思想和基本原理.通过本课程的学习，获得经济计算的基本技术、数值分析的基本概念和思想，建立选择算法的思想和意识，掌握适用于电子计算机的常用算法，具备基本的经济分析和实际计算的能力.

随着现代经济学的教育和研究在中国迅速发展和深入，越来越多的人感到数学在经济学中的重要性.但面对数学纷繁复杂的内容与方向，高等学校财经类各专业培养的人才，数学应该学什么？换句话说，怎样使经济数学课程体系更趋符合财经专业培养的目标体系？怎样兼顾经济数学课程的理论性与应用性、思想性与工具性？怎样实现经济数学课程在经管类专业的作用？这是我们主持承担的全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题(19138149)、中国高等教育学会“十一五”教育科学研究规划课题(06AIJ0090112)、教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题(教高司2007-143号)的研究内容之一，多年来我们结合一线教学实践，一直进行着探索，现在的这本《经济计算技术》就是我们所做的又一尝试.

配合我们的教学观念更新，教学改革实践，教学项目研究，我们早年编写了经济数学基础教程——《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》.作为上述工作的继续和深入，我们继而编写了经济数学应用教程——《经济应用模型》、《经济运筹方法》，本书是其最后一本.

本书由张从军教授提出编写思想和编写提纲、列出章节目录、编写附录部分，最后对全书进行修改、补充、统稿、定稿.伍家凤副教授编写了第一、第二章，万树文博士编写了第三、第四章，赵中华老师编写了第五、第六章.

复旦大学出版社特别是理科总监范仁梅女士不辞劳苦，精心编辑，对该书的出版给予了大力支持.编者在此向他们表示衷心感谢！

本书在编写过程中，参考了大量的相关资料，选用了其中的有关内容和例子，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意.

编写一本教材似乎不难，但编写一本适用的教材绝非易事.编写此类经济应用教程更不是一劳永逸、一蹴而就的事.作为一项教学研究课题，我们还在探索之中.诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用该教材的教师和学生，提出并反馈宝贵意见.

电子邮箱：yysxx@njue.edu.cn

编　者

于南京财经大学

2009年12月16日

目　　录

第一章　线性方程组求解技术

在许多经济和管理问题中,经常需要求解含 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

其中, $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为方程组的系数, $b_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为方程组的右端. 上述方程组的矩阵形式可写成为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异,即行列式 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 则方程组有唯一解

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

根据 Cramer 法则,方程组的解可表示为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

其中, 行列式 $D = \det(\boldsymbol{A})$, D_j 是把 D 的第 j 列用右端向量 $\boldsymbol{b}$ 替换所得到的行列式. 用 Cramer 法则求解方程组时,要计算大量的行列式,所需乘法大约为 $N\ (= (n^2 - 1)n!)$ 次. 当 n 较大时,这个计算量是惊人的. 可见 Cramer 法则不是一种方便直接应用的方法.

本章讨论求解线性方程组的数值方法. 数值求解线性方程组,依其特点分为直接法和迭代法两大类.

直接法就是将线性方程组化成与之等价的上三角形式,然后求出其解,假设计算中没有舍入误差,经过有限次算术运算就能给出方程组的精确解. 直接法的

特点是，如果不考虑计算过程中的舍入误差，应用此类方法经过有限次算术运算就能求出线性方程组的精确解. 需要指出，由于实际计算中舍入误差的存在，因此用直接法一般也只能求得方程组的近似解.

而迭代法则是给定初始解向量，反复使用迭代公式得出一列解向量，在一定的条件下，此解向量数列收敛于线性方程组的精确解. 与直接法不同的是，即使在计算过程中无舍入误差，迭代法也难以获得精确解. 所以，迭代法是一类逐次近似的方法. 迭代法的特点是，算法简便，程序易于实现，特别适用于求解大型稀疏线性方程组.

§1.1 Gauss 消去法

一、从一个经济问题谈起

设某工厂有 3 个车间，各车间互相提供产品，已知 2008 年 3 个车间出厂产值及对其他车间的消耗如表 1-1 所示，其中第 1 列消耗系数 0.1，0.2，0.3 表示第 1 车间生产 1 万元的产品需分别消耗第 1、第 2、第 3 车间 0.1 万元、0.2 万元、0.3 万元的产品，第 2、第 3 列类同，求全年各车间的总产值.

表 1-1

消耗系数 车间 \ 车间	1	2	3	出厂产值(万元)
1	0.1	0.3	0.4	2
2	0.2	0	0.1	7
3	0.3	0.2	0.1	4

设全年 3 个车间的总产值分别为 x_1，x_2，x_3，则由已知可得下列线性方程组：

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 = x_1 - 2, \\ 0.2x_1 \qquad\qquad + 0.1x_3 = x_2 - 7, \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 = x_3 - 4. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 0.9x_1 - 0.3x_2 - 0.4x_3 = 2, \\ -0.2x_1 + \quad x_2 - 0.1x_3 = 7, \\ -0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.9x_3 = 4. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 70, \\ -3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 40. \end{cases} \tag{1.1}$$

由此可见,解决此经济问题转化为解上述线性方程组(1.1)的问题.

下面介绍用 Gauss 消去法求解此线性方程组. Gauss 消去法是一种规则化的加减消元法. 其基本思想是:通过逐次消元计算把需求解的线性方程组转化成上三角形方程组,也就是把线性方程组的系数矩阵转化为上三角矩阵,从而使一般线性方程组的求解转化为等价(同解)的上三角形方程组的求解.

二、Gauss 消去法

给定方程组

$$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{n\times 1}, \tag{1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n},\ \boldsymbol{x} = (x_i)_{n\times 1},\ \boldsymbol{b} = (b_i)_{n\times 1}, \tag{1.3}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式

$$|\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.4}$$

则将方程组用初等行变换自上而下消去未知量,使得未知量逐渐减少,形成行阶梯形方程组;再逐渐自下而上回代未知量的值,得到行最简形方程组,从而得到方程组的唯一解.

Gauss 消去法的算法如下.

给定

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}^{(1)})_{m\times n},\ \boldsymbol{b} = (b_i^{(1)})_{n\times 1},$$

满足

$$|\boldsymbol{A}_k^{(1)}| \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

取 $k = 1, 2, \cdots, n-1$; $i = k+1, k+2, \cdots, n$, 有

$$c_i^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}; \tag{1.5}$$

取 $j = i, i+1, \cdots, n$, 有

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + a_{kj}^{(k)} \cdot c_i^{(k)}, \tag{1.6}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + b_k^{(k)} \cdot c_i^{(k)}, \tag{1.7}$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}; \tag{1.8}$$

取 $i = n-1, n-2, \cdots, 1$，有

$$x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} \cdot x_j\right) / a_{ii}^{(i)}. \tag{1.9}$$

下面利用所介绍的 Gauss 消去法解线性方程组(1.1). 对于方程组(1.2)，这时

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = (a_{ij}^{(1)})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 \\ -2 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = (b_i^{(1)})_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix},$$

$$c_2^{(1)} = -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{9},$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} + a_{12}^{(1)} \cdot c_2^{(1)} = 10 + (-3) \cdot \frac{2}{9} = \frac{28}{3},$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} + a_{13}^{(1)} \cdot c_2^{(1)} = -1 + (-4) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{17}{9},$$

$$c_3^{(1)} = -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} + a_{12}^{(1)} \cdot c_3^{(1)} = -2 + (-3) \cdot \frac{1}{3} = -3,$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + a_{13}^{(1)} \cdot c_3^{(1)} = 9 + (-4) \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{3},$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot c_2^{(1)} = 70 + 20 \cdot \frac{2}{9} = \frac{670}{9},$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} + b_1^{(1)} \cdot c_3^{(1)} = 40 + 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{140}{3},$$

$$c_3^{(2)} = -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{-3}{\frac{28}{3}} = \frac{9}{28},$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} + a_{23}^{(2)} \cdot c_3^{(2)} = \frac{23}{3} + \left(-\frac{17}{9}\right) \cdot \frac{9}{28} = \frac{593}{84},$$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} + b_2^{(2)} \cdot c_3^{(2)} = \frac{140}{3} + \frac{670}{9} \cdot \frac{9}{28} = \frac{2\,965}{42},$$

$$x_3 = b_3^{(3)}/a_{33}^{(3)} = \frac{\frac{2\,965}{42}}{\frac{593}{84}} = 10,$$

$$x_2 = (b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} \cdot x_3)/a_{22}^{(2)} = \left[\frac{670}{9} - \left(-\frac{17}{9}\right)\cdot 10\right]\Big/\frac{28}{3} = 10,$$

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot x_2 - a_{13}^{(1)} \cdot x_3)/a_{11}^{(1)} \\ &= [20-(-3)\cdot 10-(-4)\cdot 10]/9 = 10. \end{aligned}$$

此时得到线性方程组(1.1)的唯一解为

$$x_1 = 10,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10.$$

即全年各车间的总产值均为 10 万元.

三、收敛性分析

对于方程组(1.2),由于

$$|\boldsymbol{A}_k| \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

可证明按上述 Gauss 消去法求解,并且在计算过程中有

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0,$$

则方程组的解必唯一.

四、误差分析

不计舍入误差得到的应该是精确解.

五、上机实现

使用 Mathematica 软件,输入

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 \\ -2 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{pmatrix};\ \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix};\ \mathrm{LinearSolve[A,\ b]};$$

运行结果为

{{10}, {10}, {10}}.

则线性方程组(1.1)的唯一解是

$$x_1 = 10,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10.$$

若读者有兴趣,可以按算法输入具体的语句,从而得出关于 $c_2^{(1)}$, …, x_1 的所有数据.

六、方法评价

使用 Gauss 消去法虽然简单易行,能较快得到方程组的解. 但是在条件减弱后该算法会变得复杂.

对于方程组(1.2),若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则当出现 $a_{kk}^{(k)}=0$ 时,需要经方程组的交换,使得第 k 行第 k 列元素不为零,仍然可得到方程组的唯一解;

否则若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则可得到方程组的无穷多解的表达式或判断方程组无解. 而当无解时,对于实际问题可改用最小二乘法求出其唯一解或无穷多解.

对于

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1}=\boldsymbol{b}_{m\times 1}, \tag{1.10}$$

类似可得唯一解,或无穷多解的表达式,或判断其无解.

除 Gauss 消去法外,还有类似的列主元消去法、行主元消去法、全主元消去法、按比例列主元消去法以及 Gauss-Jordan 消去法. 在此不一一叙述.

§1.2 直接三角分解法

一、从一个经济问题谈起

已知 3 家公司 X, Y, Z 具有如图 1-1 所示的股份关系,即 X 公司掌握 Z 公司 50%的股份,Z 公司掌握 X 公司 30%的股份,而 X 公司 70%的股份不受另两家公司控制,等等.

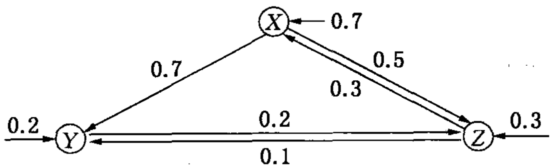

图 1-1

现设 X, Y 和 Z 公司各自的营业净收入分别是 12 万元、10 万元、8 万元,每家公司的联合收入是其净收入加上在其他公司的股份按比例的提成收入. 试确定各公司的联合收入及实际收入.

若设 X, Y, Z 这 3 家公司的联合收入分别为 x, y, z,则由已知可得

$$\begin{cases} x = 120\,000 + 0.7y + 0.5z, \\ y = 100\,000 + 0.2z, \\ z = 80\,000 + 0.3x + 0.1y. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} x - 0.7y - 0.5z = 120\,000, \\ y - 0.2z = 100\,000, \\ -0.3x - 0.1y + z = 80\,000. \end{cases} \tag{1.11}$$

下面介绍用直接三角分解法求解上述线性方程组.

二、直接三角分解法

对于方程组(1.2),可进行各种三角分解,如 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$,其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角矩阵,$\boldsymbol{U}$ 为上三角矩阵,则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{LU}, \tag{1.12}$$

于是,求解 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{b}_{n\times 1}$,就变为求解

$$\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}, \tag{1.13}$$

即先求解 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

再求解 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$.

直接三角分解法的具体算法如下.

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 分解

取 $j = 1, 2, \cdots, n$,有

$$u_{1j} = a_{1j}; \tag{1.14}$$

取 $i = 2, 3, \cdots, n$,有

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \tag{1.15}$$

取 $k = 2, 3, \cdots, n-1$,以及 $j = k, k+1, \cdots, n$, 有

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{kt} u_{tj}; \tag{1.16}$$

取 $i = k+1, k+2, \cdots, n$, 有

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{t=1}^{k-1} l_{it} u_{tk})/u_{kk}, \tag{1.17}$$

$$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{t=1}^{n-1} l_{nt} u_{tn}. \tag{1.18}$$

2. 求解 $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$

$$y_1 = b_1,$$

取 $i = 2, 3, \cdots, n$, 有

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j. \tag{1.19}$$

3. 求解 $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$

$$x_n = y_n/u_{nn}, \tag{1.20}$$

取 $i = n-1, n-2, \cdots, 1$, 有

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j)/u_{ii}. \tag{1.21}$$

下面具体介绍使用 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ 分解法求解线性方程组(1.11)的过程.

对于方程组(1.11),这时

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.7 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ -0.3 & -0.1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -0.3 & -0.31 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.7 & -0.5 \\ & 1 & -0.2 \\ & & 0.788 \end{pmatrix} = \boldsymbol{LU}.$$

求解

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 120\,000 \\ 100\,000 \\ 80\,000 \end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}120\,000\\100\,000\\147\,000\end{bmatrix}.$$

再求解 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$,得

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}309\,391\\137\,310\\186\,548\end{bmatrix}.$$

于是,可得到方程组(1.11)的唯一解为

$$\begin{cases}x=309\,391,\\y=137\,310,\\z=186\,548.\end{cases}$$

可见,X, Y, Z 这 3 家公司的联合收入分别为 309 391 元,137 310 元,186 548 元,实际收入分别为 216 573.60 元,27 461.93 元,55 964.47 元.

三、收敛性分析

对于方程组(1.2),由于(1.4)式成立,因此可证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 这种分解式唯一,且方程组 $\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$ 的解都是唯一的.

四、误差分析

不计舍入误差得到的应该是精确解.

五、上机实现

1. 使用 Mathematica 软件

输入

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-0.7&-0.5\\0&1&-0.2\\-0.3&-0.1&1\end{bmatrix};\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix}120\,000\\100\,000\\80\,000\end{bmatrix};\ \mathrm{LinearSolve[A,\ b]};$$

运行结果为

$$\{\{309\,391.\},\ \{137\,310.\},\ \{186\,548.\}\},$$

则方程组(1.11)的唯一解就是

$$x=309\,391.,\ y=137\,310.,\ z=186\,548.$$

若读者有兴趣,还可以按算法输入上述具体的语句,从而得出相应的有关

数据：

$$u_{11},\ u_{12},\ u_{13},\ l_{21},\ l_{31},\ u_{22},\ u_{23},\ l_{32},\ u_{33},\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ x_3,\ x_2,\ x_1.$$

2. 使用 Matlab 软件

先输入矩阵 A, b,数据同上;再输入 lu(A),可得 A 的 LU 分解. 求解 Ly = b,只需输入 y = b/L;求解 Ux = y,则需输入 x = y/U.

六、方法评价

对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 分解法简单易行,且分解式是唯一的,而其计算量较 Gauss 消去法少.

类似地,还有不少三角分解法,例如:

(1) 对于方程组(1.2),若(1.4)式成立,则

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 为下三角矩阵,$\boldsymbol{U}$ 为单位上三角矩阵;

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角阵,$\boldsymbol{D}$ 为对角阵,$\boldsymbol{U}$ 为单位上三角矩阵;

(2) 对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 为主对角元均为正数的下三角矩阵;

(3) 对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}$ 为三对角严格对角占优矩阵,则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1,\,n} \\ & & & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}, \tag{1.22}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{n,\,n-1} & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & & \\ & u_{22} & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1,\,n} \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix};$$

(4) 对于方程组(1.2), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$, 其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,$\boldsymbol{R}$ 为上三角矩阵.

§1.3 Jacobi 迭代法

前面两节介绍了用直接法中的 Gauss 消去法和 LU 三角分解法求解方程组(1.2),从这一节开始将介绍 3 种求解方程组(1.2)的迭代法.

如果 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{g}$, 则通常可以给定 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{0}_{n\times 1}$, 由迭代公式