

一部上帝安排我们现有空间秩序的方案之书



决定经典

001

一部高度展示人类的逻辑理性与逻辑思维能力的体系教本



[古希腊] 欧几里得 / 著

几何原本

建立空间秩序最久远最权威的逻辑推演语系

Euclid's Elements

13卷图释全本

燕晓东 / 译



凤凰出版传媒集团
江苏人民出版社

凤凰联动
FONGHONG

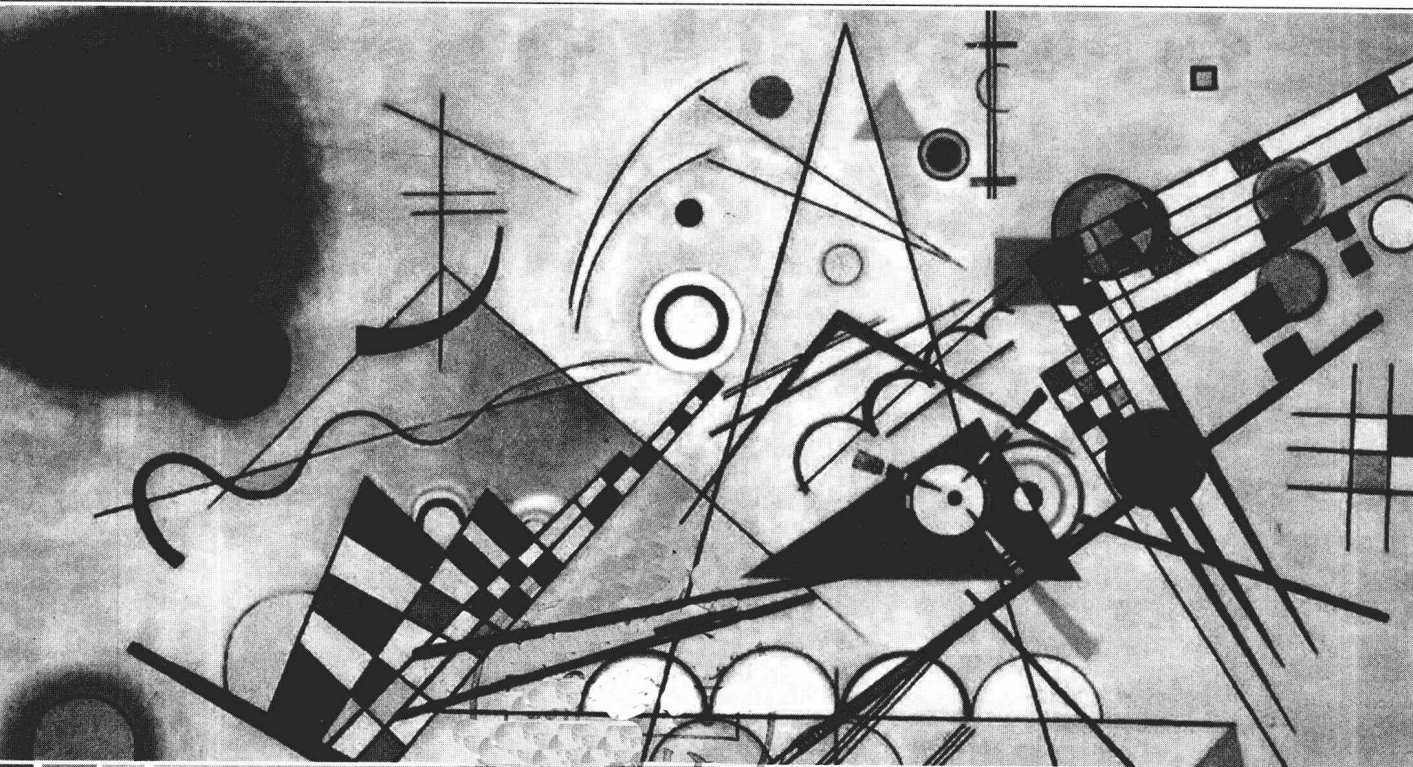
凤凰决定
DECISION

建立空间秩序最久远最权威的逻辑推演语系

Euclid's Elements
几何原本

[古希腊] 欧几里得 著

燕晓东 译



凤凰出版传媒集团 | 凤凰联动 FONGHONG 凤凰决定 DECISION
江苏人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

几何原本/ (古希腊) 欧几里得 著 ; 燕晓东 译 . —南京 :
江苏人民出版社 , 2011.3

(决定经典书库)

ISBN 978-7-214-06759-3

I . ①几… II . ①欧…②燕… III . ①欧氏几何

IV . ①0184

中国版本图书馆CIP数据核字 (2011) 第000274号

书 名 几何原本

著 者 [古希腊] 欧几里得

译 者 燕晓东

责任编辑 王 楠

出版发行 江苏人民出版社 (南京湖南路1号A楼 邮编 : 210009)

网 址 <http://www.book-wind.com>

集团网址 <http://www.ppm.cn>

经 销 江苏省新华发行集团有限公司

印 刷 北京同文印刷有限公司

开 本 820毫米 × 1060毫米 1/16

印 张 36.75

字 数 528千

版 次 2011年3月第1版 2011年3月第1次印刷

标准书号 ISBN 978-7-214-06759-3

定 价 58.00元

(江苏人民出版社图书凡印装错误可向本社调换)

总序

ZONG XU

回望历史深处，每一代学人都会深切地感到有一些书籍具有决定性的影响力，这些著作成为塑造历史的关键力量，改变了历史进程，也改变了人类社会。可以说，正是这些决定性的经典著作决定了我们今日的世界是这个样子，而不是另一个样子。人类之所以能够进步到如今这个全球一体化的文明时代，正是靠了一代代思想伟人奉献的各种类型的经典著作才实现的，正是靠了这些经典著作的荣光，才照亮了人类走出野蛮、步入文明的道路。

我们编选这套“决定经典·图释书系”，就是要让一代代思想伟人的经典著作达到更为普及的程度。我们希望这些经典著作像它们曾经在历史中发挥过的巨大作用一样，在读者的个人生活中也产生深刻影响。就像这些经典著作曾改变历史进程一样，它们同样也可以改变读者的个人命运，我们对此深信不疑。

我们对“决定经典”的定义是：每一代读者怀着先期的热情在人生的某个阶段总会找来认真研读的经典著作；这些著作都毫无例外地对人类历史、人类社会和人类思想产

生过决定性的影响。因此，这套书系注定是开放式的，也注定是规模宏大的。举凡人类社会中具有里程碑意义的各种类别的经典著作都在我们的编选视野中，这套书将展现人类文明的相对全面的进步阶梯。我们希望单是这套设计精美的书摆在书架上的样子，就可以让读者产生深厚的历史感觉，为自己能够与思想伟人们朝夕相伴而自豪。

我们编选“决定经典”的信念中，自然包含了关于经典的诸多必不可少的普遍性描述。首先，经典在内容上一定是具有丰富性的，理所当然地将涵盖人类社会、文化、人生、科学、自然、历史和宇宙等方面的重大发现和观念更新，它们无一例外地参与了人类传统的形成，完善了社会生活，推进了人类历史。其次，经典当然是富于创造性的，其思想在产生之初必然是全新而动人的。再次，经典当然经得起岁月的淘洗，几乎不受时空限制，其活跃的思想不仅仅适用于过去，也必然适用于今日，也必然适用于未来，也就是说，任何时候都可以影响人生。还有一点，经典必然是具有可读性的，经得起任何人的反复阅读，并能使读者变得更加

成熟，也变得富有思想。

我们深知要让这些经典著作达到更为普及的程度，需要付出很多的心血，需要做很多更为细致的编辑工作。因为这些经典著作，都是一代代思想伟人呕心沥血的思想结晶，其篇幅都是宏大的，从行文逻辑到思想点滴都是尖端的，永远富于创造性，无论经过多少岁月的打磨，都不会缺失初生时的那种勃勃生机。几乎任何时候，对这些经典著作的阅读，都可以丰富读者的大脑，启迪读者自己也变得思想生动而睿智。但是，这些思想伟人的观念和思维方式，都因其独创性而显得高妙异常，在很多方面都是一般读者难以望其项背的，这对一般读者亲近这些经典著作产生了微妙的心理影响，在普及方面造成了一定的障碍。

我们深知如何克服这些阅读心理的影响，而这正是使这些经典著作达到更为普及

的程度的关键。这是我们采用“图释”的编辑方式来出版这些经典著作的根本原因。我们在相关专家的指导下，做了两方面的具体编辑工作：一是在文字上力求精确、简练和传神，使全书体系更为完善。二是精选相关图例。凡是有助于理解该书思想的图例，我们尽量列入，按有机的历史顺序加以编排，使该书图文并茂、相得益彰，并辅以精准的图片说明，让该书中的深奥思想变得晓畅易懂。这些深奥思想的历史演变、人物体系和实质影响都以简明百科全书式的解读得以清晰呈现，使读者能够在相对轻松的阅读中更容易地把握伟人们的思想要点。

我们深信，经过辛苦努力编选的这套“决定经典·图释书系”，可以实现一个对读者而言非常现实的目的，那就是：一切尖端的思想都可以轻松理解，一切深奥的经典都可以改善读者的生活。这也是我们所梦想的。

决定经典书系编委会

2011年3月

“在这里，皇帝没有特权。”

这里是一个高贵的世界，与具体在时间中速朽的一切物质相比，它是一种永恒的规律。

古希腊数学直接脱胎于哲学。它使用各种描述的可能，解析我们的宇宙，使它不至于混沌、分离；它建立物质和精神世界的确定体系，以使人这渺小的生物取得些微的自信。

古希腊天才欧几里得所著的《几何原本》是哲学意义上的几何，它完全有别于起源并应用于世俗计算的中国数学及古埃及数学。

在本书里，欧几里得建立了人类历史第一座宏伟的演绎推理大厦，利用很少的自明公理、定义，推演出四百余个命题，成为人类理性的丰碑。欧几里得坚信质、宇宙、空间、人的精神间存在着一种超然于一切的形式美感，他设定“点、线、面、角”为一切存在的始基，因为没有空间之物是不存在的。万物的根本关系是数量关系。找到这些数量关系，就找到了现实世界通往神的道路，神就是数神。神按照数理设计这个世界。

欧几里得在哲学上信任原子论。以德漠克里特为代表的原子论学派认为，线段、面

积和立体是由许多不可再分的原子所构成。计算面积和体积等于将这些原子集合起来。所以根据欧几里得本人的动机，他的《几何原本》与其说是数学叙述，不如说是他寻找宇宙始基的哲学叙述。汉语“几何”为“多少”的数量关系，与“万物之始基”这一意义相去甚远。明代翻译家徐光启将希腊文的 Ευκλες ε ι δ η 译成“几何”，这有点舍本逐末，失掉了原汁，或许，该译为“宇宙基本元素的数量关系”更为妥帖。

欧几里得把距离、角度转换成任意数维的坐标系，描绘出一幅有限维、实和内积空间的图景，欧氏空间也被理解为线性流形。

赫拉克利特和亚里士多德开启了逻辑理论以后，欧几里得建造了逻辑演绎的标本。多数的哲学家几乎都相信，在逻辑里可以看到神的踪迹。柏拉图就直接把有理性思考的精神当成天国的制品。一个有理性思考的人，他的思考就是神性的；另一说是，理性是上帝与大地的中介材料。这种理性是指对事物抽象性质判断与推理；也指思想、概念、理论、言辞、规律性。它们被黑格尔称为绝对精神的掌握，并以此揭示事物的本质属性。正因如此，《几何原本》从它诞生时

起就被视为人类锻炼和培养逻辑理性、逻辑思维的最杰出甚至唯一的课本。它是世上最美丽的逻辑剧本。

我还想对《几何原本》作以下描述：

它是一部关于事物秩序之书；空间理性的黑夜之书；一部想探索上帝存在的形式之书；一部想建立生活秩序的书；一部描述原子形态的书；一部想找到宇宙的“本基”之书；一部为了研究上帝的本性和行为以及上帝安排宇宙的方案的书。它是物质世界（甚至精神世界——根据柏拉图《理想国》）的表述方式，是对宇宙的一种解释。这正是支持欧几里得创作《原本》的精神。

我始终没将它作为某个意义上的数学来读，却引为歌剧、诗、哲学、宇宙之舞来欣赏。对优雅事物的欣赏，以抵抗单向度的混乱生景是那么的必要；物质世界的协调，文化、精神的和谐是那么的必要。希腊数学，

是伟大的希腊人向宇宙秩序射出的光芒。希腊数学的精神，不同于美索不达米亚平原的数学，也不同于古埃及及中国数学，它对世俗的计算几乎不感兴趣，而是在探索上帝的存在，寻找上帝存在的形式，寻找宇宙的基本形式和数量关系，故开创了通过自明的简单公理进行演绎推理得出结论的方法。也正因为如此，其气质华美高贵是其他民族的数学难以媲美的。希腊数学其实是世上最热情洋溢的诗篇。

我们已无法考察欧几里得的生世，只知道他给这个世界留下过一本书和两句话。第一句在本文开头说了，现在转述他的第二句。当欧几里得面对一位青年的质问“你的几何学有何用处？”的时候，他的回答简洁而确定，他对身边的侍从说：“请给这个小伙子三个硬币，因为他想从几何学里得到实际利益。”

导 读

如果欧几里得未能激发起你少年时代的科学热情，那么你肯定不会是一个天才的科学家。

——爱因斯坦

一、欧几里得生平

欧几里得大约生活在公元前330—前275年之间。除《几何原本》外，还有不少著作，如《已知数》、《纠错集》、《圆锥曲线论》、《曲面轨迹》、《观测天文学》等。遗憾的是，除了《几何原本》以外，这些都没有留存下来，消失在时空的黑暗之中了。从某个意义上说，这增加了人类的黑暗。仅留世的《几何原本》，已让我们震撼了两千余年。

欧几里得的生平也已失传，据后世推断，他早年在雅典受教育，熟知柏拉图的学说。公元前300年左右，受托勒密王（前364—前283年）之邀，他前往埃及统治下的亚历山大城工作，长期从事教学、研究和著述，涉猎数学、天文、光学和音乐等诸多领域。所著《几何原本》，共有13卷，希腊文原稿也已失传，现存的是公元4世纪末西翁的修订本和18世纪在梵蒂冈图书馆发现的希腊文手抄原本。这部西方世界现存最古老的科学著作，为两千余年来用公理法建立演绎



欧几里得

欧几里得（约前330—前275年）古希腊数学家，著有《几何原本》13卷，这是世界上最早公理化的数学著作。他在这部书中，总结了前人的研究成果，从定义、公理和公设出发，用演绎法建立几何命题；书中还包括整数论的许多成果，如求两整数最大公约数的“辗转相除法”。此书传世不衰，对人类文明的影响，非他书所能及。



利玛窦与徐光启

西方科学技术最初是通过基督教会的传教士们传入中国的。1582年，明万历年间，意大利人利玛窦（1552—1610年）与徐光启（1562—1633年）合作翻译了《几何原本》前六卷，这是传教士来中国翻译的第一部科学著作。

的数学体系找到了源头。德摩根曾说，除了《圣经》，再没有任何一种书像《原本》这样拥有如此众多的读者，被译成如此多种的语言。从1482年到19世纪末，《原本》的各种版本竟用各种语言出了1000版以上。明朝万历年间（1607年），徐光启和意大利传教士利玛窦把前六卷译成中文出版，定名为《几何原本》。“几何”这个数学名词就是这样来的。《几何原本》同时也是中国近代翻译的第一部西方数学著作。康熙皇帝将这

个仅有前六卷的版本书当成智力玩具把玩了一生，但估计其理解也十分有限。

古籍中记载了两则故事：托勒密国王问欧几里得，有没有学习几何学的捷径。欧几里得答道：“几何无王者之道。”意思是，在几何学里没有专门为国王铺设的大路。这句话成为千古传诵的箴言。另一个故事说：一个学生才开始学习第一个命题，就问学了几何之后将得到些什么。欧几里得对身边的侍从说：“给他三个钱币，因为他想在学习获取实利。”这两则故事，与他的光辉著作一样，具有高深的含义。

二、《几何原本》的贡献

《几何原本》从少量“自明的”定义、公理出发，利用逻辑推理的方法，推演出整个几何体系，选取少量的原始概念和无需证明的命题，作为定义、公设和公理，使它们成为整个体系的出发点和逻辑依据，然后运用逻辑推理证明其他命题。它成为人类文明的一块极至瑰宝，创造了人类认识宇宙空间、认识宇宙数量关系的源头，是一部人类历史上的科学杰作。逻辑并不是欧几里得开创的，而是以另一个希腊天才亚里士多德为代表，他的著名的三段论，开创了逻辑的基本面貌，提出了逻辑的基本建构。欧几里得是第一个将三段论应用于实际知识体系构建的人，他铸造了一部完整的逻辑演绎体系。他构成了希腊理性最完美的纪念碑。

两千余年来，所有初等几何教科书以及19世纪以前一切有关初等几何的论著，都以



最早的印刷本

9世纪以后，大量的希腊著作被译成阿拉伯文，约1255年，坎帕努斯（？—1296年）参考数种阿拉伯文本及早期的拉丁文本重新将《原本》译成拉丁文，并于1482年以印刷本的形式在威尼斯出版。图为坎帕努斯译本的第一页。

《几何原本》作为依据。“欧几里得”成为几何学的代名词，并且人们把这种体系的几何学叫做欧几里得几何学。

《几何原本》对世界数学的贡献主要是：确立了数学的基本方法学。①建立了公理演绎体系，即用公理、公设和定义的推证方法。②将逻辑证明系统地引入数学中，确立了逻辑学的基本方法。③创造了几何证明的方法：分析法、综合法及归谬法。

相对《原本》中的几何知识而言，它所蕴含的方法论意义更重大。事实上，欧几里得本人对它的几何学的实际应用并不关心，他关心的是他的几何体系内在逻辑上的严密

性。《原本》作为文化丰碑还在于，它为人类知识的整理、系统阐述提供了一种模式。

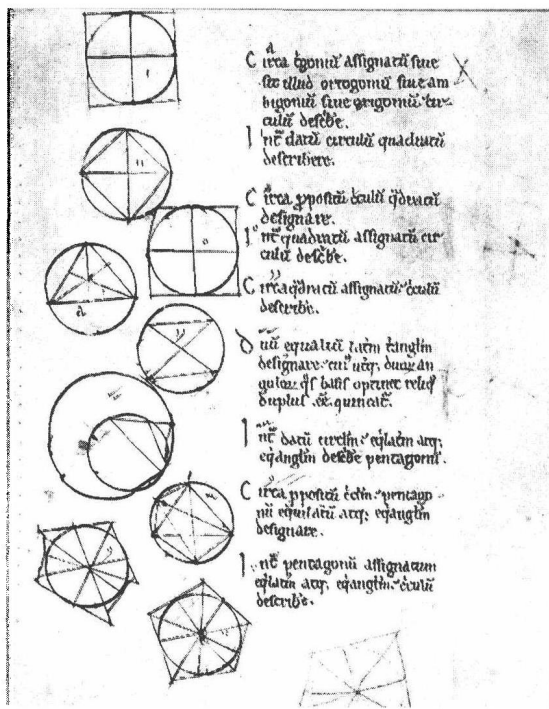
从此，人类的知识建构找到了一个有效的方法。整理为从基本概念、公理或定律出发的严密的演绎体系成为人类的梦想。斯宾诺莎的伦理学就是按这种模式阐述的，牛顿的《自然哲学的数学原理》同样如此。

三、《几何原本》介绍

在《几何原本》中，欧几里得首先给出了点、线、面、角、垂直、平行等定义，接

拉丁语版《几何原本》

图为发现于阿拉伯的中世纪《几何原本》拉丁语版的一文。这通常被认为是巴斯的阿德拉德（约12世纪）所写，也可能是最早的版本。这里的命题是借助于圆形给出的，这一版本的第一卷中有关于证明的注释。中世纪，人们对几何的学习仅局限于《几何原本》中最简单的部分。



着给出了关于几何和关于量的十条公理，如“凡直角都相等”“整体大于部分”以及后来引起许多纷争的“平行线公理”等等。公理后面是一个一个的命题及其证明，内容丰富多彩。比如有平面作图、勾股定理、余弦定理、圆的各种性质、空间中平面和直线的垂直、平行和相交等关系，平行六面体、棱锥、棱柱、圆锥、圆柱、球等问题，此外还有比例的理论、正整数的性质与分类、无理量等等。公理化结构是近代数学的主要特

逻辑之父

亚里士多德最重要的贡献是将前人使用的数学推理规律规范化和系统化，从而创立了独立的逻辑学，其中的基本逻辑原理、矛盾律和排中律成为数学间接证明的核心。而在整个中世纪及以后的历史时期，亚里士多德逻辑成了基督教高等教育的核心内容。在这幅画中，描绘了亚里士多德的逻辑学、西赛罗的修辞学以及图巴的音乐。

征，而《几何原本》则是公理化结构的最早典范。欧几里得创造性地总结了他以前的古希腊人的数学，将零散的、不连贯的数学知识整理起来，加上自己的大量创造，构建出彼此有内在联系的有机的宏伟大厦。

本书共分 13 卷，有 5 条公设、5 条公理、119 个定义和 465 个命题，构成历史上第一个数学公理体系。

关于重要命题 《几何原本》中涉及到诸多重要命题，比如命题 1.47 就是著名的“勾股定理”。传说这一定理最早是由毕达哥拉斯证明出的，但他的证明方法却没有流传下来。而《几何原本》中的证明，则可以算是现存西方最早证明勾股定理的记载。

关于命题的逻辑关系 《几何原本》中命题间的逻辑关系甚至比现代教科书还高。为



了清晰地表明这一关系，千余年来的各种语文版本多附有数学家们对逻辑关系的注解。

关于公理和公设 演绎法，它的基本精神是由简单现象去证明较复杂的现象，在数学中同样也遵循这一原理。这一理论里，逻辑推理虽然至关重要，但更重要的是，我们必须接受一些简单的现象作为我们的“起点”，是明显的“自明”的道理，而欧几里得将这些“起点”命名为“公设”和“公理”。

虽然以公理为起点演绎几何的方法并非为欧几里得首创，首创的应该是他之前的泰勒斯，但是《几何原本》中的公设和公理，却全部都由欧几里得所创造和筛选。这一天才的智力令人叹为观止！

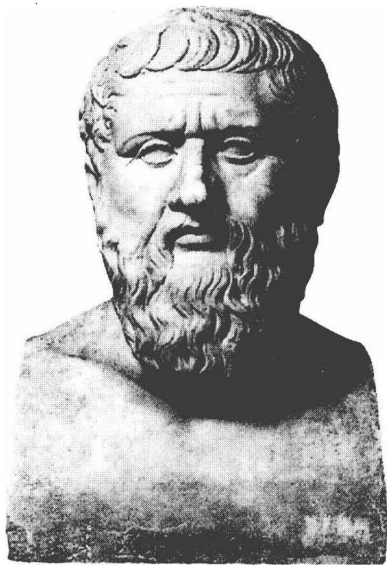
关于第5公设及非欧几何学 欧几里得的不完美催生了新的几何学，这是从第5公设开始的。第5公设不同于其他9条，言语迟钝，仿佛有些力不从心的样子。形式上也不像公设，倒像一个命题。因此，自《几何原本》诞生后，就有无数的数学家研究这条公设，并试图找出证明这条公设的方法。可惜，一直以来，他们的尝试都归于失败！到了19世纪，匈牙利数学家波尔约和俄国数学家罗巴切夫斯基分别发表了一套与第5公设相反的几何体系，从而证明了第5公设确实是一条“公设”，不能被证明或否定。与此同时，这两位数学家亦为我们带来一个全新的数学世界——非欧几何学。

关于圆面积及球体体积公式 《几何原本》中并没有圆面积或球体体积的计算公式，但在第12卷中，可以找到一些相关命

题。在欧几里得之后，另一个希腊天才阿基米得提出球体体积公式。阿基米得应用了一种近乎于现代微积分的计算手法，推算出有关的算式，并成功地计算出圆周率小数后两位的数值。

四、希腊数学背景

希腊人重视数学在美学上的意义，认为数学是一种美，是和谐、简单、明确以及有秩序的艺术。在数学中可以看到关于宇宙结



柏拉图

雅典学术在柏拉图时走向系统化，公元前387年，柏拉图（约前427—前347年）在雅典西北部开设了学园，以期促进哲学的发展。在柏拉图的哲学中，追求纯粹的理想是一大特色，而在诸多自然事物中，数学的对象更具有理念。在柏拉图看来，数学是通向理念世界的准备工具。柏拉图对数学演绎方法的建立和完善起了重要作用，而且他已经知道正多面体最多只能有五种，即正四面体、正立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体。此外，他最重要的发现是圆锥曲线，他利用直角、锐角和钝角圆锥，再用垂直于锥面一母线的平面来割每个锥面，这样依次得出了抛物线、椭圆及双曲线的一支。

构和设计的最终真理，认为宇宙是按数学规律设计的，并且能被人们所认识。

古希腊的地理范围，除了现在的希腊半岛以外，还包括整个爱琴海区域和北面的马其顿和色雷斯、意大利半岛和小亚细亚等地。公元前五六世纪，特别是希波战争以后，雅典取得希腊城邦的领导地位，经济生活高度繁荣，生产力显著提高，在这个基础上滋生了光辉灿烂的希腊文化。

希腊数学的发展历史可以分为三个时期。第一时期从伊奥尼亚学派到柏拉图学派



第一个自然哲学家

泰勒斯（约前624—546年），西方历史上第一个自然哲学家，同时他还是一名伟大的科学家。泰勒斯第一个把埃及的测地术引进希腊，并将之发展成为比较一般性的几何。以下几何定理被认为是泰勒斯提出的：圆角被直径等分；等腰三角形的两底角相等；两直线相交时，对顶角相等；两三角形中两角及其所夹之边相等，则两三角形全等；内接半圆的三角形是直角三角形。

为止，约公元前7世纪中叶到公元前3世纪；第二时期是亚历山大前期，从欧几里得起到公元前146年希腊陷于罗马为止；第三时期是亚历山大后期，是罗马人统治下的时期，结束于641年亚历山大被阿拉伯人占领。

伊奥尼亚学派 从古代埃及、巴比伦的衰亡，到希腊文化的昌盛，这段过渡时期留下来的数学史料很少。不过希腊数学的兴起和希腊商人通过旅行交往接触到古代东方的文化有密切关系。伊奥尼亚位于小亚细亚西岸，它比希腊其他地区更容易吸收巴比伦、埃及等古国积累下来的经验和文化。在伊奥尼亚，氏族贵族政治为商人的统治所代替，商人具有强烈的活动性，有利于思想自由而大胆地发展。城邦内部的斗争，帮助摆脱传统信念。在希腊没有特殊的祭司阶层，也没有必须遵守的教条，因此有相当程度的思想自由。这大大有助于科学和哲学从宗教中分离开来。

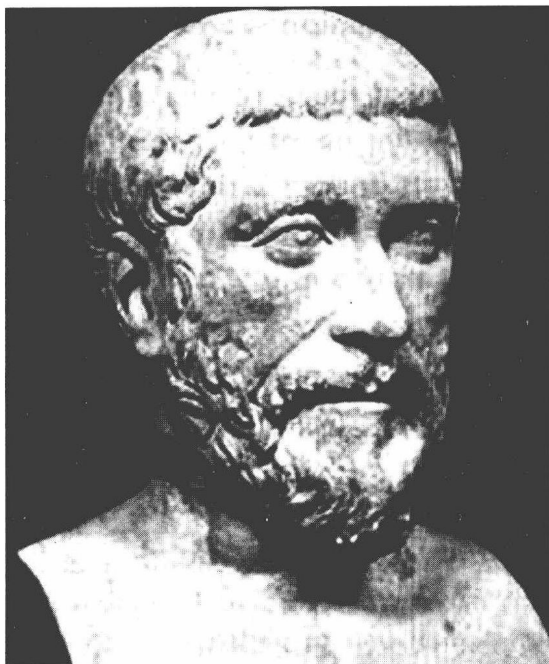
米利都是伊奥尼亚的最大城市，也是泰勒斯的故乡。泰勒斯是公认的希腊哲学鼻祖。他早年是一个商人，曾游访巴比伦、埃及等地，很快就学会古代流传下来的知识，并加以发扬。这以后他创立了伊奥尼亚哲学学派，摆脱了宗教，从自然现象中寻找真理，以水为万物的根源。

当时天文、数学和哲学是不可分的，泰勒斯同时也研究天文和数学。他曾预测到一次日食，促使米太（在今黑海、里海之南）、吕底亚（今土耳其西部）两国停止战争。多数学者认为该次日食发生在公元前585

年5月28日。他在埃及时曾利用日影及比例关系算出金字塔的高度，使法老大为惊讶。泰勒斯在数学方面的贡献主要在于开了命题证明的先河，它标志着人们对客观事物的认识从感性上升到理性，这在数学史上是一个不寻常的飞跃。伊奥尼亚学派的著名学者还有阿纳克西曼德和阿纳克西米尼等。他们对后来的毕达哥拉斯有很大的影响。

毕达哥拉斯学派 毕达哥拉斯，公元前580年左右出生于萨摩斯（今希腊东部小岛）。为了摆脱暴政，他移居到意大利半岛南部的克罗顿。在那里他组织了一个政治、宗教、哲学、数学合一的秘密团体。后来这个集体在政治斗争中遭到破坏，毕达哥拉斯被杀害，但他的学派还继续存在了两个世纪（约公元前500—前300年）之久。这个学派企图用数来解释一切，不仅仅认为万物都包含数，而且说万物都是数。他们以发现勾股定理（西方叫做毕达哥拉斯定理）闻名于世，又由此导致不可通约量的发现。这个学派还有一个特点，就是将算术和几何紧密联系起来。他们找到用三个正整数表示直角三角形三边长的一种公式，又注意到从1开始连续奇数的和必为平方数等等，这既是算术问题，又和几何有关。他们还发现五种正多面体。在天文方面，他首创地圆说，认为日、月、五星都是球体，并浮悬在太空中。毕达哥拉斯还是音乐理论的始祖。

伊奥尼亚学派和毕达哥拉斯学派有显著的不同。前者研习数学并不单纯为了哲学的兴趣，同时也为了实用。而后者却不注重实



德谟克里特

德谟克里特（约前460—约前370年），古希腊哲学家，原子论的创造者，自然科学家，希腊第一个百科全书式学者。他认为一切事物的本原是原子与虚空，运动为原子所固有。不同形状、不同体积的原子在旋涡运动中以不同的排列次序与位置结合起来，产生物体与物体的性质。原子分离，物体消灭。在数学上，他首次提出圆锥体的容量等于同底同高的圆柱体的容量三分之一的定理。

际应用，将数学和宗教联系起来，想通过数学去探索永恒的真理。

智人学派 诞生于公元前5世纪，此时正值雅典的黄金时代，文人荟萃，辩论会遍布大街小巷，于是“智人学派”应运而生。他们以教授文法、逻辑、数学、天文、修辞、雄辩等科目为业。在数学上，他们提出“三大问题”：三等分任意角；倍立方，求作一立方体，使其体积是已知立方体的二倍；化圆为方，求作一正方形，使其面积等于一已

知圆。这些问题的难处，是作图只许用直尺（没有刻度的尺）和圆规。

希腊人的兴趣并不在于图形的实际作出，而是在尺规的限制下从理论上去解决这

古希腊文明

在世界创立的历程中，古希腊人发挥了尤为关键的作用。那些名垂史册的诗人和哲学家，他们在思想上的成就在古典希腊文明中得到了默认。图为公元前15世纪的绘画，描绘了两位古风时代的伟大诗人萨福和阿尔凯奥斯，他们有关爱情和政治的诗作经常在伴有古希腊弦乐器的公共集会上吟咏。



些问题，这是几何学从实际应用向系统理论过渡所迈出的重要一步。

这个学派的安提丰提出用“穷竭法”去解决化圆为方问题，这是近代极限理论的雏形。先作圆内接正方形，以后每次边数加倍，得8、16、32……边形。安提丰深信“最后”的多边形与圆的“差”必会“穷竭”。这提供了求圆面积的近似方法。这和中国刘徽（约263年前后）的割圆术思想不谋而合。

柏拉图（约前427—前347年）在雅典建立学派，创办学园。他非常重视数学，主张通过几何的学习培养逻辑思维能力，因为几何能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中。这个学派培养出不少数学家，如欧多克索斯就曾就学于柏拉图学园，他创立的比例论对欧几里得影响巨大。柏拉图的学生亚里士多德也是古代的大哲学家，是形式逻辑的奠基者。他的逻辑思想为日后将几何学整理在严密的逻辑体系之中开辟了道路。

埃利亚学派 这个时期的希腊数学中心还有以芝诺（约前496—前430年）为代表的埃利亚学派。芝诺提出四个悖论，这给思想界带来极大的震动。这四个悖论是：①二分说，一物从甲地到乙地，永远不能到达。因为想从甲到乙，首先要通过道路的一半，但要通过这一半，必须先通过一半的一半，这样分下去，永无止境。结论是此物的运动被道路的无限分割阻碍着，根本不能前进一步。②阿喀琉斯（善跑英雄）追龟说，阿喀

琉斯追乌龟，永远追不上。因为当他追到乌龟的出发点时，龟已向前爬行了一段，他再追完这一段，龟又向前爬了一小段。这样永远重复下去，总也追不上。③飞箭静止说，每一瞬间箭总在一个确定的位置上，因此它是不动的。④运动场问题，芝诺论证了时间和它的一半相等。

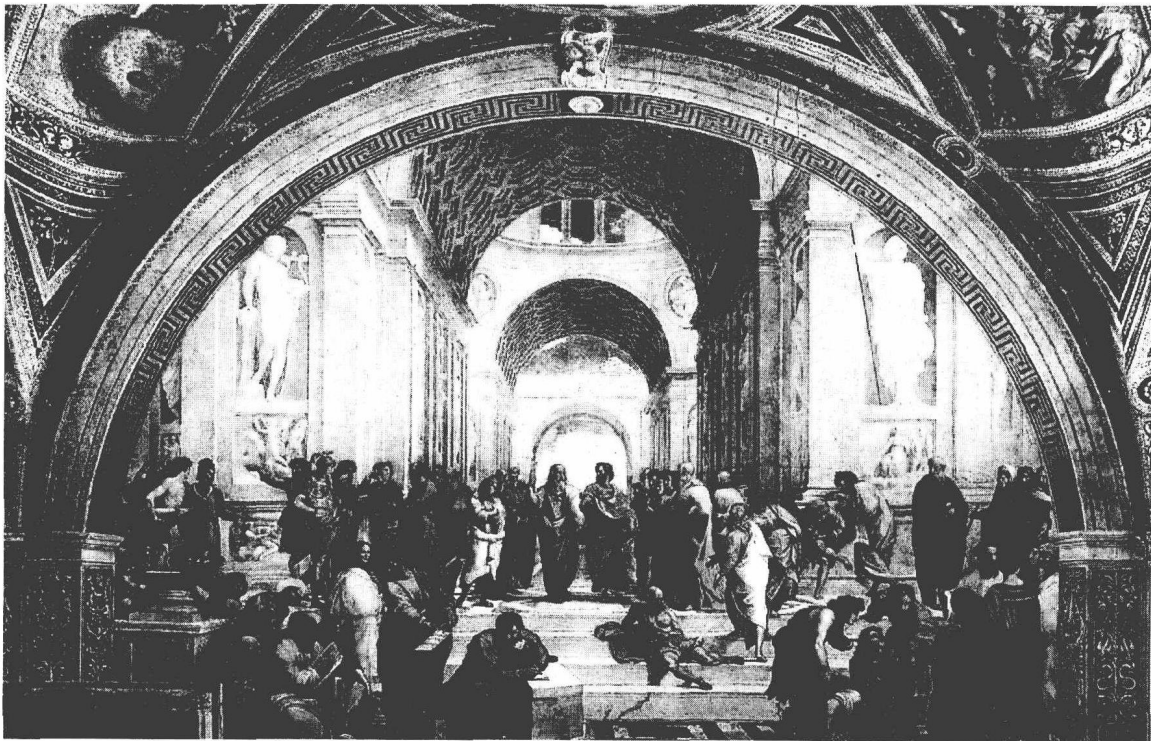
原子论学派 以德谟克里特为代表的原子论学派认为，线段、面积和立体是由许

雅典学园

画面中央神采奕奕走来的是柏拉图（左）和亚里士多德（右），一个手指上方，一个手伸向前面。以他们为中心，是激动人心的辩论场面。图中出现的学者还有亚历山大、苏格拉底、第欧根尼、毕达哥拉斯、欧几里得、伊壁鸠鲁、赫拉克利特、托勒密等。拉斐尔在画中集中描绘了不同时期重要的数学家、哲学家、艺术家和科学家的形象。

多不可再分的原子所构成。计算面积和体积，等于将这些原子集合起来。这种不甚严格的推理方法却是古代数学家发现新结果的重要线索。

公元前4世纪以后的希腊数学，逐渐脱离哲学和天文学，成为独立的学科。数学的历史于是进入到一个新阶段——初等数学时期。这个时期的特点是数学（主要是几何学）已建立起自己的理论体系，从以实验和观察为依据的经验科学过渡到演绎的科学。由少数几个原始命题（公理）出发，通过逻辑推理得到一系列的定理。这是希腊数学的基本精神。在这一时期里，初等几何、算术、初等代数大体已成为独立的科目。和17世纪出现的解析几何学、微积分学相比，这



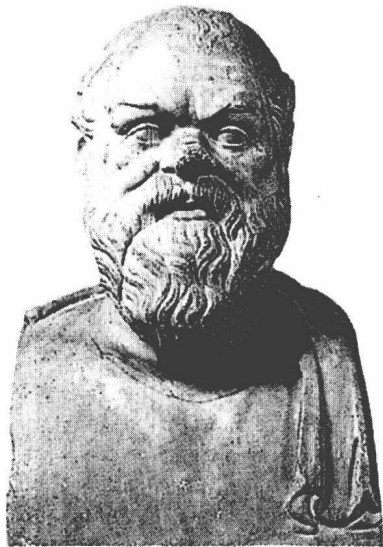


智者的对话

雅典时期，数学的演化倾向有了实质性的进展，这主要归功于柏拉图、亚里士多德和他们的学派。柏拉图认为数学是一切学问的基础，分析法与归谬法即被认为是他的思想。他给出了许多几何定义，并坚持对数学知识作演绎整理。柏拉图的思想在他的学生亚里士多德那里得到极大的发展和完善。亚里士多德对定义作了精密的讨论，并深入研究了作为数学推理出发点的基本原理。这幅彩陶画画的正是哲学大师柏拉图和亚里士多德之间的对话。

苏格拉底

苏格拉底（前469—前399年）古希腊哲学家，在欧洲哲学史上最早提出唯心主义的目的论，认为一切都是由神创造与安排，一切都是神的智慧的体现。他提出“自知自己无知”的命题，即承认自己无知的人才是聪明的人。他非常重视伦理学，提出“美德即知识”的命题，善出于知，恶出于无知。在逻辑学方面，他最早提出归纳论证和一般定义的方法。



一时期的研究内容可以用“初等数学”来概括，因此叫做初等数学时期。

埃及的亚历山大城是东西海陆交通的枢纽，又由于经过托勒密王的精心经营，这里逐渐成为新的希腊文化中心，而希腊本土这时已经退居次要地位。几何学最初萌芽于埃及，后来移植于伊奥尼亚，再后来繁盛于意大利和雅典，最后又回到发源地埃及。经过这一番培植，它已达到丰茂成林的境地。

亚历山大前期 从公元前4世纪到公元前146年古希腊灭亡，罗马成为地中海区域的统治者为止，希腊数学以亚历山大为中心，并达到它的全盛时期。这里有巨大的图书馆和浓厚的学术氛围，各地学者云集在此进行教学和研究。其中成就最大的是亚历山大前期三大数学家欧几里得、阿基米得和阿波罗尼奥斯。阿基米得是物理学家兼数学家，他善于将抽象的理论和工程技术的具体应用结合起来，又在实践中洞察事物的本质，通过严格的论证，使经验事实上升为理论。他根据力学原理去探求解决面积和体积问题，已经包含积分学的初步思想。阿波罗尼奥斯的主要贡献是对圆锥曲线的深入研究。

除了三大数学家以外，埃拉托斯特尼（约前276—前195年）的大地测量和以他为名的“素数筛子”也很出名。天文学家喜帕恰斯（约前190—前125年）制作了“弦表”，这是三角学的先导。

亚历山大后期 公元前146年以后，在罗马统治下的亚历山大学者仍能继承前人的工作，且各种发明层出不穷。这一时期的门纳