

21 世纪通识教育系列教材

21st Century Textbooks of General Education

数学的思维与智慧

T

hought and Wisdom in Mathematics

王章雄 等 © 编著

 中国人民大学出版社

数学的思维与智慧

Thinking and Wisdom in Mathematics

王康 著 孙 毅 译

北京 中国人民大学出版社

21 世纪通识教育系列教材

21st Century Textbooks of General Education



数学的思维与智慧

Thought and Wisdom in
.....► Mathematics

王章雄 徐常青 沈亚军 曹顺娟 © 编著

中国人民大学出版社

• 北京 •

图书在版编目(CIP)数据

数学的思维与智慧/王章雄等编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2011. 4
21 世纪通识教育系列教材
ISBN 978-7-300-13597-7

I. ①数… II. ①王… III. ①数学-高等学校-教材 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 062945 号

21 世纪通识教育系列教材

数学的思维与智慧

王章雄等 编著

Shuxue de Siwei yu Zhihui

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京东君印刷有限公司		
规 格	170 mm×240 mm 16 开本	版 次	2011 年 5 月第 1 版
印 张	19 插页 1	印 次	2011 年 5 月第 1 次印刷
字 数	323 000	定 价	35.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错

负责调换

· 出版说明 ·

随着信息时代的来临、经济全球化的深入与文化软实力竞争的加剧，重视大学生人文素养与创新能力的培养，提升大学生的综合素质，已成为各国教育改革与发展关注的重点和热点。人们越来越意识到：高等教育不仅要培养大学生良好的专业素质，更重要的是使得他们在走向社会之后拥有长足的自我拓展能力。只有以宽口径、厚基础、复合型为人才培养目标，才能更好地提高我国高等教育的质量，培育出适应现代社会需求的具备公民意识、社会责任感与创新精神的优秀人才。

从中外大学通识教育的实践来看，通识教育是一项系统工程，而课程体系建设始终是推进通识教育的核心任务，教材建设则又是其中的重要环节。为满足广大高校师生对高质量通识教育教材的需求，中国人民大学出版社组织多学科、多领域的专家学者，在广泛调研与深入研讨的基础上，组织编写了这套“21世纪通识教育系列教材”，为推动高等学校通识教育教材建设进行了努力和探索。

本套教材分为人文、政法、经管和理工四大板块，定位为非专业统开课教材，突出“通识”的特色，强调内容阐释的“基础”和“宽度”，力求突破单纯的“专业视域”或“知识视域”，引导学生调整知识结构，拓宽文化视野，以达成人才培养效果上的“宽度”，从而实现高等教育培养复合型人才的目标。

本套教材中的每一本均由该学科领域有影响力的专家学者领衔编写。通识教材的“基础”与“宽度”，需要特别重视教材纲目与内容的适用性、可拓展性和灵活性。唯有在该领域具有丰富教学经验及精深学术水准的名家，方能“取精用弘，由博返约”，编写出体现“通识”特色的高水平教材。

本套教材形式与内容和谐统一，教材内容基础适用，语言简洁生动，并辅以典型、有趣的案例、图表，轻松活泼的栏目和插图等，图文并茂，引人入胜，照顾到青年学生群体的阅读习惯。

作为出版者，我们特别希望通过加强通识教育教材建设，推进高校课程体系的融会贯通，提高学生跨学科、跨文化的理解能力，为学生未来的职业生涯与人生发展奠定良好的知识和能力基础。这套通识教育系列教材只是开始，期望更多的专家学者共襄此事，推进通识教育教学的改革与发展。

中国人民大学出版社

· 前 言 ·

随着经济、文化的高速发展，社会对人才的要求也越来越注重整体素质。数学素质已经成为现代人基本素质的一个重要部分。也许你所从事的工作永远不会要求你去直接解答某个数学问题，但数学素质会伴随你的一生，无时不有，无所不在。在科学昌明的 21 世纪，如果缺少数学素养，将是一种明显的文化缺陷。所以，数学素质的培养是我们各个层次的教育都应该非常重视的问题。

本书是为非数学专业的学生和一般数学爱好者编写的数学素质教育通俗读本。全书以数学的若干经典问题为专题，共分为十八讲。内容涵盖基础数学、经典高等数学、现代应用数学等三大部分。每讲或结合数学某个分支学科的起源和发展，讲述一段经典的数学历史；或以实际问题引入，然后展开到一个数学专题上。本书通过数学“故事”阐述数学思想和数学的应用，介绍数学是怎样发现问题、解决问题的，借此展现数学思想和数学的思维特点。在培养数学思维方式、增强数学审美意识的同时，也适度地向非数学专业人士介绍一些经典与现代的数学知识，全书按以下要求编写：

(1) 通过问题及其解决过程来培养数学思维方式。每讲都以一个实际问题引入，然后自然展开到一个数学专题内容上来。这样来组织材料，具有较好的趣味性和可读性，但又不是单纯的“讲故事”，而是把数学知识融入其中，适度介绍数学知识，目的在于数学思维方式和数学审美意识的培养。

(2) 注重实际问题与数学知识的结合。本书不追求严格的数学体系与理论推导，而是把更多的注意力放在发现问题、解决问题的思路 and 过程上。这样读者可以更直接地看到数学的思维特点和在实际生产生活中的巨大作用与力量，从而提高学习积极性与学习效果。

(3) 力求经典与现代的融合。本书既适当介绍了经典数学的基本原理在生产实际中的运用,从而领略经典数学之美;又注重把当代科技发展与数学结合起来,使教材更具时代感,更贴近生活。例如我们在本书中加进了应用极为广泛的运筹学问题、大家熟知的 Google 搜索与网络问题等现代应用数学的内容。

本书从选材看,内容丰富、涵盖面广;从编写风格看,趣味性强、起点低,只要稍微具备一些数学的基础,就能读懂其中大部分内容。所以,本书既可作为大中专院校数学素质教育的教材、参考书,也是一本面向大众的数学科学普及读物。当然,数学专业的学生阅读本书更不会有任何障碍,你仍然会发现其中的数学思想对你是有价值的。

本书由王章雄主持编写,参与编著的有王章雄(第一~六讲;第九、十讲)、徐常青(第十六~十八讲)、沈亚军(第十三~十五讲)、曹顺娟(第七、八、十一、十二讲)等。

在本书的编写过程中,参考了众多数学文化方面的出版物,在此感谢各位作者。我们也从互联网上获得了许多资讯,恕不能一一列举致谢。浙江农林大学有关部门的领导、中国人民大学出版社的策划编辑潘旭燕为此书的出版提出了很多好的建议,也做了很多工作,付出了很多辛苦,在此一并表示感谢!

对书中的错误、不足之处,恳请各位同仁和广大读者指正!

王章雄

2010 年冬于浙江临安

目 录

.....

第一讲	开篇——数与数学	1
§ 1	数的演变与发展	1
§ 2	数学的内容与特点	12
第二讲	数学科学的支点——公理体系	18
§ 1	几何公理体系	18
§ 2	算术公理体系	23
§ 3	其他数学对象的公理化	24
§ 4	哥德尔不完备性定理	26
第三讲	对还是错? ——悖论与数学危机	29
§ 1	希帕索斯悖论与第一次数学危机	30
§ 2	贝克莱悖论与第二次数学危机	34
§ 3	罗素悖论与第三次数学危机	38
§ 4	悖论意义反思	43
第四讲	从兔子到黄金分割——神奇的斐波那契数	46
§ 1	神奇的兔子数列	46
§ 2	斐波那契数和黄金数的若干应用	52
§ 3	数学家眼中的斐波那契数	56
§ 4	优选法	65

第五讲	谁输谁赢? ——从博彩到概率	70
§ 1	概率论简介	70
§ 2	赌金如何分配	75
§ 3	赌场的真相	76
§ 4	几个应用	81
第六讲	不一样的数学题——数学模型	85
§ 1	数学模型	85
§ 2	数学建模	89
§ 3	数学建模案例	93
第七讲	几何也能不枯燥——新奇的几何世界	105
§ 1	生命的曲线——螺线	105
§ 2	蜜蜂比数学家正确	108
§ 3	神奇的莫比乌斯带	111
§ 4	橡皮几何——拓扑学	115
§ 5	眼见未必为实	117
第八讲	人类智力大 PK——三大古典几何难题	122
§ 1	三大几何难题的传说	123
§ 2	难题的“解决”	126
§ 3	由三大作图难题引发的几何名题	132
第九讲	迂回包抄——攻克现代数学三大难题	137
§ 1	费马大定理	137
§ 2	四色问题	141
§ 3	哥德巴赫猜想	145
第十讲	反向思维的成功典范——伽罗华理论和非欧几何	153
§ 1	代数方程的根式解	153
§ 2	非欧几何学	162

第十一讲	另一种几何——分形	168
§ 1	“病态”的曲线	168
§ 2	几何怪物——分形	172
§ 3	自然界中的分形	176
§ 4	分形的迭代生成与欣赏	179
第十二讲	理论来自实践的范例——微积分怎样建立	190
§ 1	微积分的酝酿	191
§ 2	直通微积分	196
§ 3	牛顿的流数术与莱布尼茨的微积分	200
§ 4	勒贝格积分	208
第十三讲	从“西气东输”工程谈起——运筹与优化	213
§ 1	西气东输工程	213
§ 2	运筹与优化理论	215
§ 3	几位获得诺贝尔奖的数学家的故事	218
第十四讲	和谐之美——单纯形与对偶单纯形法	225
§ 1	对偶与数学美	225
§ 2	线性规划	227
§ 3	对偶问题的基本概念	235
第十五讲	一种全新的分析方法——博弈论	240
§ 1	生活中的博弈论	241
§ 2	纳什均衡与纳什均衡点	243
§ 3	博弈论中几个经典案例的解读	248
第十六讲	孪生兄弟——矩阵与变换	255
§ 1	矩阵起源	255
§ 2	矩阵与变换	260
§ 3	矩阵市场与矩阵管理	263

第十七讲	Google 一下! ——矩阵与网络	267
§ 1	信息检索	267
§ 2	Google 矩阵	273
第十八讲	现代结合经典——矩阵、编码与图像处理	280
§ 1	阿达玛矩阵与图像	280
§ 2	矩阵与编码	284
§ 3	矩阵与图论	288
	参考文献	293

第一讲 开篇——数与数学

数学 (mathematics) 一词的希腊词源是 μαθηματικά, 含有学习、学问、科学的意思, 是一个较广的范畴, 亚里士多德曾拿它来指“万物皆数”的概念。但真要回答诸如“数学是什么”之类的问题, 恐怕我们大家一时又难以说清。说到数学必定先要谈数, 因为数是数学中最基本的元素和概念。从最早、最简单的自然数, 发展到今天各种各样的数, 数已经成为人类文明的重要组成部分。数也是我们生产生活中的基本语言和不可或缺的工具, 现代社会没有人能够离开数。理解数的本质, 了解数的概念是怎样一次次扩充起来的, 对于我们更好地认识数学有着基础性的意义。

本讲不仅讲述传统观念下数的扩展, 也介绍一些现代广义的数的概念, 意在从数的演变发展来了解数的概念对数学发展的作用。对于“数学是什么”这样很难正面回答的问题, 我们试图从介绍数学的研究领域、数学区别于其他学科的特点以及数学的基本思维方式方法等方面, 帮助读者从不同侧面来理解数学的本质。

§ 1 数的演变与发展

一、数的起源

在远古时代, 人类的祖先过着群居的生活。我们都知道, 人类的共同劳动和生活产生了语言。随着劳动内容的发展, 他们的语言也不断发展进步, 终于超过了一切其他动物的语言。其中一个重要标志就是: 人类语言包含了算术的色彩——产生了“数”的朦胧概念。

早期的原始人根据狩猎回来时猎物的或有或无, 产生了“有”与“无”

两个基本的定性概念。后来，猎物的有多有少以及原始人类的居住习惯由早期的人数众多的群居发展为由一些成员很少的家庭组成的部落。这样，从“有”逐渐细分出“一”、“二”、“三”、“多”等最原始的数字概念。考古资料表明，许多原始部落在数的萌芽期确实是把任何大于“三”的数量理解为“多”或者“一堆”、“一群”的。

大约在一万年前冰川退却后，一些原先是游牧状态生活的石器时代的狩猎者，在现在的中东地区开始了一种新的生活方式——农耕生活。这时他们对数字有了更多的需求。例如，他们需要记录日期、季节，还要计算收获的谷物数、种子数等。当尼罗河流域、底格里斯河与幼发拉底河流域发展起更复杂的农业社会时，他们还进一步碰到交租纳税的问题。这就要求数有名称，而且计数必须更准确些，只有“一”、“二”、“三”、“多”，已远远不够用了。在美索不达米亚地区（今伊拉克境内幼发拉底河和底格里斯河中下游地区），产生了两河流域文化，与埃及文化一样，这也是世界上最古老的文化之一。有趣的是，美索不达米亚人和埃及人虽然相距很远，却以同样的方式建立了最早的书写自然数的系统——在树木或者石头上刻痕记事。后来他们逐渐以符号代替刻痕，即用一个符号表示一件东西，两个符号表示两件东西，依此类推，这种记数方法延续了很久。曾有发现，大约在5000年以前的埃及祭司在一种芦苇纸上书写表示数的符号，而美索不达米亚的祭司则是把符号写在泥板上。他们除了仍用单划表示“一”以外，还用其他符号表示“十”或者更大的自然数。他们还学会了重复地使用这些单划和符号，以表示所需要的数字。南美洲秘鲁印加族（印第安人的一部分）则习惯于“结绳记数”——例如每收进一捆庄稼，他们就在绳子上打个结，用结的多少来记录收成。“结”与痕有同样的作用，都是用来表示自然数的。根据我国古书《易经》的记载，上古时期的中国人先是“结绳而治”，后来又改为“书契”，即用刀在竹片或木头上刻痕记数。这样的计数方法，在近代中国比较边远的少数民族地区都还可以看到。直至今日，我们还常用“正”字来记数，每一划代表“一”。当然，这个“正”字还包含着“逢五进一”，即五进制的意义。

二、印度-阿拉伯数系

数字中最重要、最有名的莫过于“阿拉伯数字”：1、2、3、4、5、6、7、8、9、0了。我们现在所说的阿拉伯数系，就是指由这10个记号及其组合表达出来的10进制数字体系。例如，在322这个数中，右边的2表示2个，中间的2却表示2乘以10，而3表示3乘以100。在当今世界上存在的数以千计

的语言系统里，这 10 个阿拉伯数字是唯一通用的符号（比拉丁字母使用范围更广）。可以想象，假如没有阿拉伯数系，全球范围内的科技、文化、政治、经济、军事和体育方面的交流将变得十分困难，甚至不可能进行。



图 1—1 秘鲁印加人的结绳记事



图 1—2 中国基诺族人的刻木记事

其实，阿拉伯数系并不是阿拉伯人发明创造的，其真正的发源地是古印度。它是由古代印度人在生产和实践中逐步创造出来的，后来由印度传到阿拉伯，被阿拉伯人掌握、改进，到了 12 世纪初又由阿拉伯传到欧洲，于是欧洲人称之为“阿拉伯数字”。此后，以讹传讹，世界各地都认同了这个说法。所以严格地说，“阿拉伯数字”应该被称作“印度-阿拉伯数字”。下面我们一起来简单地浏览一下这段历史。

我们知道，印度河流域是古代人类文明的发源地之一。在古印度，人们在进行城市建设时需要设计和规划，进行祭祀时需要计算日月星辰的运行，于是就产生了数字计算。大约在公元前 3 000 年，印度河流域居民的数字就已经比较先进了，而且采用了十进位的计算方法。

吠陀时代（1500B. C. —600B. C.），占领印度的雅利安人已经意识到数码在生产活动和日常生活中的作用，创造了一些简单的、不完全的数字。到公元前 3 世纪，印度各地已经出现了整套的数字，其中最具有代表性、最常用的是婆罗门式。它的特点是从“1”到“9”每个数都由专门的数字表示。现代数字就是由这一组数字演化而来。在这一组数字中，还没有出现“0”（零）的符号。“0”这个数字是到了笈多王朝（公元 320—550 年）时期才出现的。公元 4 世纪的印度数学著作《太阳手册》中，“0”采用的是实心小圆点“·”的符号，后来，小圆点渐渐演化成为小圆圈“0”。

公元 500 年前后，古印度数学家、天文学家阿叶彼海特（Aryabhata，476—550）在简化数系方面取得了突破性进展：他把数字记在一个个格子里，



图 1—3 印度婆罗门数字

如果第一格里有一个符号代表 1，那么第二格里的同样符号就表示十，而第三格里的符号就代表一百。这样，不仅是数字符号本身，而且符号的位置也起重要作用了。这些符号和表示方法是今天阿拉伯数系的老祖先。这是古代印度人对世界文化的巨大贡献。

公元 7—8 世纪，地跨亚非欧三洲的阿拉伯帝国崛起。阿拉伯人在向四周扩张的同时，也广泛汲取古代希腊、罗马、印度等国的先进文化，大量翻译这些国家的科学著作。公元 771 年，印度的一位旅行家经过长途跋涉，来到了阿拉伯帝国阿拔斯王朝首都巴格达。他把随身携带的一部印度天文学著作《西德罕塔》献给了当时的哈里发（国王）曼苏尔。曼苏尔十分珍爱这部书，下令将它译为阿拉伯文。这部著作中应用了大量的印度数字系统（当时的译文就称为“印度数字”，原意为“从印度来的”）。由此，印度数字和系统便被阿拉伯人吸收和采纳。此后，阿拉伯人逐渐放弃了他们原来作为计算符号的 28 个字母，而广泛采用印度数字，并且在实践中还对印度数字加以修改完善，使之更便于书写。在此期间，著名的阿拉伯数学家花拉子米（约 780—850）对印度数系的传播起了重大作用，他在 9 世纪初，发表《印度计数算法》，系统阐述了印度数字及其应用方法。

后来，阿拉伯人把这种数系传入西班牙。公元 10 世纪，又由教皇热尔贝·奥里亚克传到欧洲其他国家。公元 1200 年左右，欧洲的学者正式采用了这些符号和体系。至 13 世纪，在意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci，约 1175—1250）的倡导下，普通欧洲人也开始采用阿拉伯数字。西方人接受了由阿拉伯传来的印度数系，但他们当时忽视了古代印度人，而只认为是阿拉伯人的功绩，因而称其为“阿拉伯数字”，这个错误的称呼一直流传至今。

印度-阿拉伯数系是“逢十进一”的，也就是我们常说的十进制数。事实上除了十进制以外，在数学萌芽的早期，也出现过五进制、二进制、三进制、七进制、八进制、十六进制、二十进制、六十进制等多种数字进制法。在长

期实际生活的应用中，十进制最终占了上风，被世界各国普遍应用，而阿拉伯数系则成为国际通行、世界上最完善的数字制度和体系。现代，随着计算机的发展，二进制数以其独特的优势得到广泛应用，成为与十进制数互相配合的更完善的数字体系。我们这里暂不讨论关于二进制的问题。

印度-阿拉伯数系早在公元 8 世纪初叶就传到我国，可惜因为各种原因，没能流行开来。直到 20 世纪初，随着近代数学在中国的兴起，这套数字体系才被广泛地使用。

1987 年 1 月 1 日，国家语言文字工作委员会、国家出版局、国家标准局、国家计量局、国务院办公厅秘书局、中宣部新闻局、中宣部出版局联合发布了《关于出版物上数字用法的试行规定》。这个规定试行了 8 年后，经修订，于 1995 年 12 月 13 日由国家技术监督局正式作为国家标准颁布，从 1996 年 6 月 1 日起实施。

三、有理数与实数系

前面说过，在 1~9 的“自然数字”之后，古印度数学家首先发明了符号“0”。随后，他们在研究代数方程的过程中引进了负数的概念。例如，只有引进了负数，方程 $x+5=2$ 才是一个可能的方程，因为在此之前 $x=-3$ 不是一个已知的数。“负数”具有实在的意义、最终为人们所接受是它们在实践中能用来代表债务。因此，在数的概念的这种扩展中，数量大小的概念上又加上了方向的概念。到此，整数系得以建立起来。

两个整数的和、差、积总是整数，即整数系对加法和乘法运算而言是封闭的。但对整数作除法，并不总是产生整数。也就是说，在整数系中只能施行加、减、乘法运算，而不能施行除法运算。另外，整数系是一个非稠密的数系，即两个相邻的整数中间隔着“较大的”距离，因此它只能表示一个单位量的整数倍，而无法表示它的部分。整数系的这种缺陷，就促使人们将它加以扩充，以得到一个稠密的且在四则运算下封闭的数系，这就是后来人们得到的有理数系。可以证明，以下关于有理数系的三种描述是等价的：

(1) 正负整数、分数和零的总体称为有理数。

(2) 有理数由各式各样的分数组成（这里所说的各式各样是指分数可正可负，可以是真分数也可以是假分数或带分数）。

(3) 有理数由有限小数和无限循环小数组成。

公元前 500 年左右，人们就发现有些线段不能用选定为单位长度的线段的整数或分数的倍数来表示（所谓不可公度），这种发现最早与直角三角形的