

国家教育部
规划教材

中等师范学校数学教科书(试用本)

几何

第二册

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社



中等师范学校数学教科书

(试 用 本)

几 何

第 二 册

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

中等师范学校数学教科书

(试 用 本)

几 何

第 二 册

人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社 出版发行

(北京沙滩后街 55 号 邮编:100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京市房山印刷厂印装 全国新华书店经销

*

开本: 787 毫米 × 1 092 毫米 1/16 印张: 10.75 字数: 130 000

1999 年 12 月第 1 版 2004 年 4 月第 5 次印刷

印数: 407 001 ~ 443 000

ISBN 7-107-13251-2 定价: 9.10 元
G·6360(课)

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究
如发现印、装质量问题,影响阅读,请与出版社联系调换
(联系地址:北京市方庄小区芳城园三区 13 号楼 邮编:100078)

前 言

在《几何》第二册中,我们将学习平面解析几何.

解析几何是基础性数学学科之一,是在坐标系的基础上用代数方法来研究图形性质的一门数学学科.

在平面几何中研究图形时,我们主要是运用演绎推理的方法,适当借助直观,从平面图形的一些最基本的性质出发,推出其他的性质.而在平面解析几何中,我们将借助于坐标系,用实数对 (x,y) 表示点,用含 x,y 的二元方程 $F(x,y)=0$ 表示线,从而将几何问题转化为研究方程的代数问题.通过研究方程的特征来弄清楚图形的性质,或发现新的几何事实.

平面解析几何研究的主要问题是:

- (1) 根据平面曲线上的点所要适合的条件,求曲线的方程;
- (2) 根据平面曲线的方程,研究曲线的性质.

解析几何产生于17世纪初期.当时,科学的发展和技术的进步对数学不断提出新的问题,要求人们从运动和变化的观点来研究和解决.1637年,法国数学家笛卡儿^❶在他的著作《几何学》中最先提出了解析几何的基本思想.解析几何的创立,被认为是数学史上最伟大的一个里程碑.它推动了微积分的产生,使数学由常量数学发展为变量数学.

恩格斯对笛卡儿的思想给予了高度的评价.他说:“数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了,而它们也就立刻产生,……”(《自然辩证法》1971年8月版第236页).

❶ 笛卡儿(Rene Descartes, 1596 ~ 1650) 法国哲学家、物理学家、数学家,解析几何的创始人.

目 录

前 言

第四章 直线	(1)
一 有向线段	(1)
二 直线的方程	(17)
三 两条直线的位置关系	(37)
小 结	(56)
第五章 圆锥曲线	(66)
一 圆	(67)
二 椭圆	(81)
三 双曲线	(91)
四 抛物线	(104)
五 坐标轴的平移	(121)
小 结	(128)
※第六章 参数方程和极坐标	(136)
一 参数方程	(136)
二 极坐标	(148)
小 结	(158)

第四章 直 线

通过从初三开始的对函数的学习与研究,我们已了解了一些函数及其图象的初步知识.例如,一次函数 $y = kx + b$ 的图象是直线,二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是抛物线.由于有了坐标系,数与形结合了起来,我们可以根据函数的图象研究函数解析式的性质.函数的图象是曲线,我们学过的函数解析式是方程,如 $y = kx + b$ 是二元一次方程, $y = ax^2 + bx + c$ 是二元二次方程,利用曲线可以研究方程.那么,反过来,能不能利用方程研究曲线呢?我们从本章开始研究这方面的问题.

在这一章里,我们主要学习怎样根据所给条件,用方程表示直线;怎样用表示直线的方程研究直线的性质,例如,判断直线间平行与垂直的关系,等等.通过本章的学习,可以初步了解利用代数方程研究几何问题的基本思想和方法.

一 有向线段

4.1

有向直线和有向线段

任何一条直线都有两个相反的方向.例如,经过 A 、 B 两点的直线(图 4-1)就有两个不同的方向——由 A 到 B 与由 B 到 A (图 4-2).这是两个相反的方向.如果我们把其中的一个方向规定为“正方向”,那么另一个相反的方向就是“负方向”.

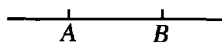


图 4-1

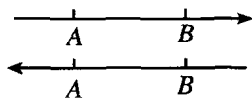


图 4-2

规定了正方向的直线叫做**有向直线**.

在图中,常用箭头表示有向直线的正方向,有向直线的“正方向”简称“方向”.

一条线段也有两个相反的方向.如连结 A 、 B 两点的线段(图 4-3),如果规定 A 为起点、 B 为终点,那么它的方向就是从 A 到 B ;如果规定 B 为起点、 A 为终点,那么它的方向就是从 B 到 A .

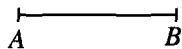


图 4-3

规定了方向(即规定了起点和终点)的线段叫做**有向线段**.

表示有向线段时,要将表示起点的字母写在前面,表示终点的字母写在后面,上面加一横线.例如,以 A 为起点、 B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$. 而 B 为起点、 A 为终点的有向线段则记作 $\overrightarrow{BA}$,它们是两条不同的有向线段.在图 4-4 中, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 是方向相同的有向线段, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是方向相反的有向线段.

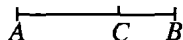


图 4-4

在平面几何中我们知道,如果选定长度单位,就可以量得一条线段的长度.有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度用记号 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示.如图 4-5,取线段 e 为长度单位,则 $|\overrightarrow{AB}| = 5$. 因为有向线段的长度与它的方向无关,所以 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

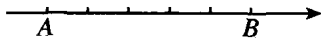


图 4-5

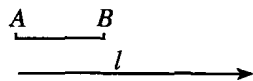


图 4-6

如果有向线段在有向直线 l 上或与 l 平行,那么,它的方向与 l 的方向要么相同,要么相反.如图 4-6, $\overrightarrow{AB}$ 与有向直线 l 的方向相同,而 $\overrightarrow{BA}$ 与 l 的方向相反.

根据有向线段与有向直线的方向相同或相反,可以分别在它的长度的前面放上正号或负号.有向线段

的长度,连同表示它的方向的正、负号,叫做**有向线段的数量(或数值)**. 有向线段 $\overline{AB}$ 的数量用记号“ AB ”^❶表示. 如图 4-5,有向线段 $\overline{AB}$ 的数量是 $+5$,记作 $AB = +5$ ^❷;有向线段 $\overline{BA}$ 的数量是 -5 ,因而 $BA = -5$. 一般地,总有

$$AB = -BA,$$

即

$$AB + BA = 0.$$

例 1 如图 4-7, A, B, C 是同一条有向直线上的三点, e 是长度单位. 试求 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 的数量和长度.

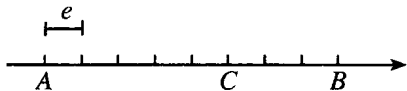


图 4-7

解: 由图可见, $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 的数量分别是:

$$AB = 8;$$

$$BC = -3;$$

$$AC = 5.$$

它们的长度分别是:

$$|AB| = 8; |BC| = 3; |AC| = 5.$$

想一想: 这三条有向线段的数量之间有什么关系? 长度之间又有什么关系?

如果一条直线, 不仅规定了正方向, 而且规定了原点和长度单位, 则称之为**数轴或坐标轴**(图 4-8).

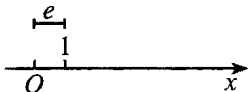


图 4-8

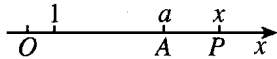


图 4-9

直线成为数轴后, 直线上的任意一点 P 都将对应于唯一的有向线段 $\overline{OP}$, 从而对应于唯一的实数 x , 即这条有向线段的数量 OP (图 4-9). 反之, 任何一个实数 a 也都与数轴上唯一的点 A 对应, 使得有向线段 $\overline{OA}$ 的数量 $OA = a$. 这样, 数轴上的点集与实数集之间也

^❶ 词组“线段 AB ”今后仍然用来表示没有规定方向的、平面几何里所说的线段. 但“线段 AB 的长度”必须用记号“ $|AB|$ ”表示.

^❷ 在这里, 正号同样可以省略, 写成 $AB = 5$.

就建立了一一对应.

与数轴上点 P 对应的实数 x 叫做这个点的坐标.
“坐标为 x 的点 P ”通常记作 $P(x)$.

现在我们来研究怎样根据端点坐标来计算数轴上的有向线段的数量.

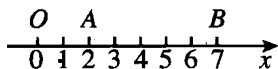


图 4-10

如图 4-10, $AB = 5$, 它的起点 A 的坐标 $x_A = 2$, 终点 B 的坐标 $x_B = 7$, $x_B - x_A = 7 - 2 = 5$, 因而

$$AB = x_B - x_A.$$

事实上, 这个公式对于数轴上的任何一条有向线段都适用. 证明如下.

设 $\overline{AB}$ 是 x 轴上的有向线段, 点 A, B 的坐标分别为 x_A, x_B , O 是数轴的原点. 当 A, B 两点与 O 都不重合时, 它们的位置关系有六种不同的情形. 图 4-10 所示是其中的一种情形. 在这种情况下,

$$|OA| + |AB| = |OB|.$$

又 $|OA| = OA, |AB| = AB, |OB| = OB$, 所以

$$OA + AB = OB,$$

$$AB = OB - OA.$$

而 $OB = x_B, OA = x_A$, 于是

$$AB = x_B - x_A.$$

这就是数轴上有向线段的数量公式.

公式在另五种情况下(以及当点 A 或点 B 与原点重合时)的正确性, 可作为练习加以证明.

显然, 数轴上有向线段的长度, 可按如下公式计算:

$$|AB| = |x_B - x_A|.$$

例 2 已知数轴上四点 A, B, C, D 的坐标分别是 4、-2、-7、3. 求有向线段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 和 $\overline{DB}$ 的数量和长度.

解: $AB = (-2) - 4 = -6, |AB| = 6;$

$$CD = 3 - (-7) = 10, |CD| = 10;$$

$$DB = (-2) - 3 = -5, |DB| = 5.$$

例 3 已知: A, B, C 是同一条直线上的任意三点. 求证: $AB + BC = AC$.

证明: 取 A, B, C 三点所在的直线为数轴. 并设 A, B, C 的坐标分别为 a, b, c , 则

$$AB = b - a, BC = c - b, AC = c - a.$$

$$\because AB + BC = (b - a) + (c - b) = c - a,$$

$$\therefore AB + BC = AC.$$

这就是数轴上有向线段数量的加法公式. 这个公式对于 A, B, C 三点的六种不同的位置关系全都成立.

注意: 公式 $|AB| + |BC| = |AC|$

只适用于 B 点在 A, C 两点之间的情形.

练习

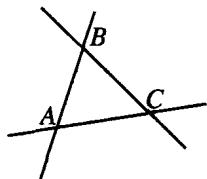
1. 填空:

(1) 已知 A, B 两点, 则经过 A, B 的直线有 _____ 条;

经过 A, B 的有向直线有 _____ 条;

(2) 设三条直线两两相交于 A, B, C , 则图中的有向直线共有 _____ 条;

(3) 设 A, B, C 是同一条直线上的三点, 则图中共有 _____ 条有向直线; _____ 条有向线段.



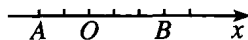
(第 1 题(2))



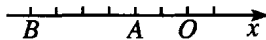
(第 1 题(3))

2. 如图, 就 O, A, B 的五种位置关系证明公式

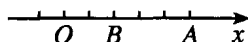
$$AB = x_B - x_A.$$



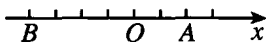
(1)



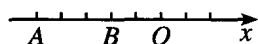
(2)



(3)



(4)



(5)

(第 2 题)

3. 已知数轴上两点 A, B 的坐标分别是 x_1, x_2 . 求 AB 与 BA :

(1) $x_1 = 8, x_2 = 6$; (2) $x_1 = 2, x_2 = -1$;

(3) $x_1 = -3, x_2 = 0$; (4) $x_1 = 0, x_2 = -8$.

4. 已知数轴上四点 A, B, C, D 的坐标依次为 $5, -1, -8, 2$. 求 $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{DB}$ 的数量和长度.

5. 在数轴上:

(1) 已知 O 是原点, $OA = 4$, 求点 A 的坐标;

(2) 已知点 C 的坐标是 $2, CD = 5$, 求点 D 的坐标;

(3) 已知 $PQ = 8$, 点 Q 的坐标是 5 , 求点 P 的坐标.

4.2

两点间的距离

在初中代数里, 我们学习过平面直角坐标系. 有了平面直角坐标系, 就可以用一对有序实数来表示平面内一个点的位置.

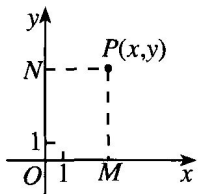


图 4-11

如图 4-11, 设 P 是平面内的任意一点. 由 P 分别作 x 轴和 y 轴的垂线, 点 M, N 是垂足. 如果点 M 在 x 轴上的坐标是 x , 点 N 在 y 轴上的坐标是 y , 那么点 P 的位置可以用有序实数对 (x, y) 表示. (x, y) 就是点 P 在这个平面直角坐标系中的坐标.

反之, 对于任何一个有序实数对 (x, y) , 在平面内都可以确定一个点, 使它的坐标是 (x, y) . 这样, 平面内的点集和有序实数对 (x, y) 的集合之间, 就建立了一一对应关系. 于是, 对坐标平面内点的研究, 就可以转化为对有序实数对的研究.

例如, 根据两点的坐标, 就可以将平面内两点间的距离计算出来.

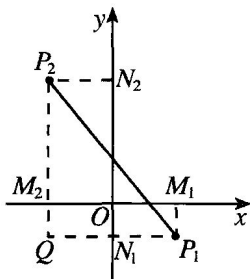


图 4-12

设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是平面内的任意两点 (图 4-12). 从 P_1, P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1, P_1N_1 和 P_2M_2, P_2N_2 , 垂足分别是 $M_1(x_1, 0), N_1(0, y_1), M_2(x_2, 0), N_2(0, y_2)$, 并设直线 P_1N_1 和 P_2M_2 交于点 Q , 则在直角三角形 P_1QP_2 中,

$$|P_1P_2|^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2.$$

$$\therefore |P_1Q| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|QP_2| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$\therefore |P_1P_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

由此得到两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

例 1 求两点 $P_1(-3, 5)$ 和 $P_2(1, 2)$ 间的距离.

$$\begin{aligned} \text{解: } |P_1P_2| &= \sqrt{[1 - (-3)]^2 + (2 - 5)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

例 2 已知点 P 在 x 轴上, 它与点 $A(1, -3)$ 的距离等于 5. 求点 P 的坐标.

解: 设点 P 的坐标为 $(x, 0)$, 根据 $|AP| = 5$, 得

$$\sqrt{(x - 1)^2 + [0 - (-3)]^2} = 5,$$

即

$$\sqrt{(x - 1)^2 + 9} = 5.$$

两边平方, 得

$$(x - 1)^2 + 9 = 25,$$

$$x - 1 = \pm 4,$$

$$\therefore x_1 = 5, x_2 = -3.$$

经检验, 这两个值都是原方程的根. 因此, 点 P 的坐标为 $(5, 0)$ 或 $(-3, 0)$, 如图 4-13 所示.

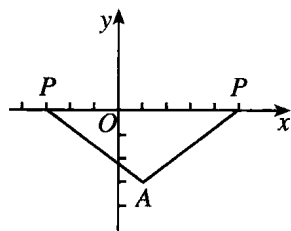


图 4-13

例 3 求证: 以 $A(0, 0)$ 、 $B(3, 1)$ 、 $C(1, 7)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

证明: 由两点间的距离公式, 得

$$|AB|^2 = (3 - 0)^2 + (1 - 0)^2 = 10;$$

$$|BC|^2 = (1 - 3)^2 + (7 - 1)^2 = 40;$$

$$|AC|^2 = (1 - 0)^2 + (7 - 0)^2 = 50.$$

$$\therefore |AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2,$$

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 其中 $\angle B$ 是直角 (图 4-14).

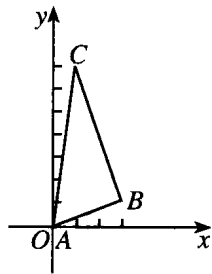


图 4-14

练 习

1. 求下列两点间的距离:

(1) $(6, 0), (0, -2)$;

(2) $(2, 1), (5, -1)$;

(3) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-8\frac{1}{2}, -3\right)$;

(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(5) $(ab^2, 2abc), (ac^2, 0)$;

(6) $(a\cos \varphi, 0), (0, a\sin \varphi)$.

2. (1) 已知点 $A(a, -5)$ 和 $B(0, 10)$ 的距离是 17, 求 a 的值;

(2) 已知点 P 在 y 轴上, 并且与点 $A(4, -6)$ 的距离是 5, 求点 P 的坐标;

(3) 求 x 轴上和点 $A(6, 4), B(5, -3)$ 距离相等的点的坐标.

3. 判定用下面每一组的三点作为顶点的三角形是哪一种三角形, 并画图:

(1) $A(-3, -2), B(1, 4), C(-5, 0)$;

(2) $D(-2, 1), E(6, 1), F(2, 5)$;

(3) $M(3, 4), N(-2, -1), P(4, 1)$.

4. 求证: 以 $A(2, 3), B(4, 1), C(8, 2), D(6, 4)$ 为顶点的四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

5. 证明 $P(7, 2), Q(1, -6)$ 两点在以 $C(4, -2)$ 为圆心的同一个圆上, 并求这个圆的半径.

6. 求证: 如果点 $P(x, y)$ 与 $M(2, 3), N(4, 5)$ 两点的距离相等, 则 $x + y = 7$.

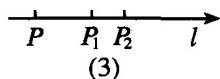
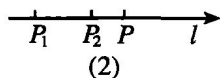
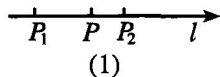


图 4-15

4.3

线段的定比分点

设 $\overline{P_1P_2}$ 是直线 l 上的有向线段, 点 P 是 l 上除 P_1, P_2 外的任意一点, 则称点 P 为 $\overline{P_1P_2}$ 的分点. 如果点 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 上, 则称点 P 为 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点 (图 4-15(1)); 如果点 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 或 $\overline{P_2P_1}$ 的延长线上, 则称点 P 为 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点 (图 4-15(2)、(3)).

在直线 P_1P_2 上, 不论点 P 是内分点还是外分点, 它将有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 总是分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$. 有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的数量的比 $P_1P : PP_2$ 叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比. 这个比的比值通常用希腊字母 λ 表示, 即

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}.$$

如果 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点, 则 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 方向相同, 因而不论 l 的方向如何, P_1P 与 PP_2 都同号, 所以 λ 为正值; 如果 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点, 则 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 方向相反, 不论 l 的方向如何, P_1P 与 PP_2 都异号, 所以 λ 为负值. 不论点 P 位于何处, 总有一个确定的比值 λ 和它对应, 因而线段的分点也叫**定比分点**.

下面讨论如何根据 P_1 、 P_2 两点的坐标和比值 λ , 求分点 P 的坐标.

设点 P_1 、 P_2 、 P 的坐标分别是 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x, y) , 点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ .

如图 4-16, 过 P_1 、 P_2 、 P 分别作 x 轴的垂线, 设垂足分别是 M_1 、 M_2 、 M , 根据平行线截得比例线段定理, 得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

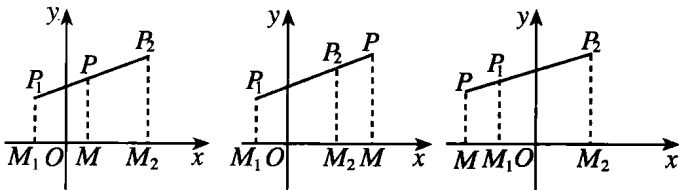


图 4-16

如果点 P 在有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 上, 那么点 M 也在有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 上; 如果 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 或 $\overline{P_2P_1}$ 的延长线上, 那么 M 也在 $\overline{M_1M_2}$ 或 $\overline{M_2M_1}$ 的延长线上, 因此, 两个比 $\frac{P_1P}{PP_2}$ 与 $\frac{M_1M}{MM_2}$ 的比值必定同号. 所以

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

因为其中 $M_1M = x - x_1$, $MM_2 = x_2 - x$, $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$, 所以得到

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

由于没有这样的外分点, 能使 $|P_1P| = |PP_2|$, 所以 $\lambda \neq -1$, 因而解得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

如果过点 P_1 、 P_2 、 P 分别作 y 轴的垂线, 同样可得

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

因此, 当已知两点 P_1 、 P_2 的坐标时, 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 成定比 λ 的分点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} (\lambda \neq -1).$$

其中, (x_1, y_1) 是有向线段的起点的坐标, (x_2, y_2) 是终点的坐标.

如果点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点, 则 $P_1P = PP_2$, 即 $\lambda = 1$. 因此, 中点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

例 1 延长 $\overline{AB}$ 至 C , 使 $|BC| = 3|AB|$, 求点 C 分 $\overline{AB}$ 所成的比(图 4-17).

解: $\because |BC| = 3|AB|$,

$$\therefore |CB| = 3|AB|,$$

$$|AC| = |AB| + |BC| = 4|AB|,$$

$$\therefore \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{4}{3}.$$

而 $\overline{AC}$ 与 $\overline{CB}$ 方向相反, 所以点 C 分 $\overline{AB}$ 所成的比

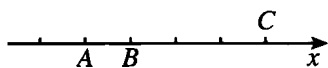


图 4-17

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = -\frac{4}{3}.$$

例 2 已知两点 $P_1(-1, -6)$ 、 $P_2(3, 0)$ ，点 $P\left(-\frac{7}{3}, y\right)$ 是 $\overline{P_1P_2}$ 的分点. 求点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ 及点 P 的纵坐标 y .

解： 由 λ 的定义，可得

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-\frac{7}{3} - (-1)}{3 - \left(-\frac{7}{3}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

根据分点坐标公式，

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-6 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)} = -8.$$

所以，点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比是 $-\frac{1}{4}$ ，点 P 的纵坐标是 -8 .

例 3 已知两点 $P_1(-2, -2)$ 、 $P_2(2, 6)$ ，在 $\overline{P_2P_1}$ 的延长线上求一点 Q ，使 $|P_1Q| = \frac{1}{2}|P_1P_2|$ (图 4-18).

$$\text{解：} \because |P_1Q| = \frac{1}{2}|P_1P_2|,$$

$$\therefore |P_1P_2| = 2|P_1Q|,$$

$$|QP_2| = |P_1Q| + |P_1P_2| = 3|P_1Q|,$$

$$\therefore \frac{|P_1Q|}{|QP_2|} = \frac{1}{3}.$$

$\therefore Q$ 是外分点， $\therefore \lambda < 0$ ，于是 $\lambda = -\frac{1}{3}$.

因此， Q 点的坐标是：

$$x = \frac{-2 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 2}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)} = -4,$$

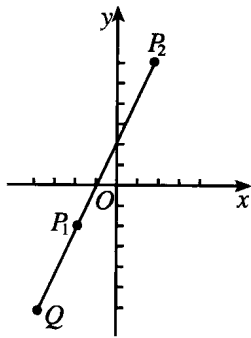


图 4-18

$$y = \frac{-2 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 6}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)} = -6.$$

即所求的点是 $Q(-4, -6)$.

例 4 已知三点 $A(1, -1)$ 、 $B(3, 3)$ 、 $C(4, 5)$. 求证: A 、 B 、 C 在一条直线上.

$$\begin{aligned} \text{证法 1: } |AB| &= \sqrt{(3-1)^2 + [3-(-1)]^2} \\ &= 2\sqrt{5}, \\ |BC| &= \sqrt{(4-3)^2 + (5-3)^2} \\ &= \sqrt{5}, \\ |AC| &= \sqrt{(4-1)^2 + [5-(-1)]^2} \\ &= 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\therefore |AB| + |BC| = |AC|,$$

$\therefore$ 根据平面几何的知识, 三点 A 、 B 、 C 在一条直线上.

证法 2: 设点 $B'(3, y)$ 在直线 AC 上, 则点 B' 分 $\overline{AC}$ 所成的比

$$\lambda = \frac{AB'}{B'C} = \frac{3-1}{4-3} = 2.$$

$$\therefore y = \frac{-1 + 2 \times 5}{1 + 2} = 3,$$

点 B 与 B' 重合.

$\therefore$ 三点 A 、 B 、 C 在一条直线上.

练习

1. 填空:

(1) 设点 B 分 $\overline{AC}$ 所成的比为 $2:5$, 则点 B 分 $\overline{CA}$ 所成的比是 _____; 点 C 分 $\overline{AB}$ 所成的比是 _____;

(2) 设数轴上 A 、 B 、 C 三点的坐标分别是 5 、 0 、 -8 , 则点 B 分 $\overline{CA}$ 所成的比等于 _____; 点 A 分 $\overline{BC}$ 所成的比等于 _____.