高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

线性代数 复变函数 概率统计

中册

习题全解

（同济二版·三版·西安交大四版·浙大二版）

陈小柱 张立卫／编 著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数·复变函数·概率统计习题全解(中册) / 陈小柱,张立卫编著 .—大连 : 大连理工大学出版社,2000.10(2003.2 重印)
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-1677-2

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①陈… ②张… Ⅲ. 高等数学—高等学校—辅导 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(99)第 35616 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707955
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:6.125 字数:152 千字
印数:90 001 ~96 000
2000 年 10 月第 1 版 2003 年 2 月第 15 次印刷

责任编辑:刘 杰 责任校对:习 文
封面设计:王福刚

定 价:21.00 元(本册 7.00 元)

卷首赠言

知识是引导人生到达
光明与真实境界的光烛。

——李大钊(1889—1927)

(在燕园李大钊教授铜像前,仿佛能听到他穿越时光的声音)

高年级大学生、研究生以及青年教师,经过努力可以胜过老师,而且应该鼓励他们尽早胜过老师。

——江泽涵(1902—1994)

(摘自《中国科学院院士自述》)

前　言

当人类即将迈入21世纪之际，世界对各类人才的需求正在发生着深刻的变化。作为人才培养基地的高校，正在探索着培育人才的新模式，以适应客观世界的需求。

相比于十多年前的学生，当今及未来的学生需投入更多的时间、精力来学习外语及计算机。而这对大学数学课的教与学均提出了前所未有的挑战。

当大学数学的课时被迫削减之后，教师有了“教材内容无法完全展开讲授”之苦；而学生在有限的精力被分割后，学习大学数学常常会发生“食而不化”的现象。考研及后续专业课，对大学数学的学习又有较高的要求。

由于大学数学早已渗透到现代科学的各个学科，未来的新兴学科仍需借助数学工具进行表述。未来社会所需要的一大批通才、栋梁之才，非有扎实的数学功底不可。

正是为了化解这一矛盾，我们编写了这本具有工具书性质的《线性代数·复变函数·概率统计习题全解》，以期学生通过大学期间**不间断地反复自学**来弥补不足，

打牢数学底子。因此,理工科大学一年、二年、三年、四年,必要时,甚至以后的学习阶段,均宜备有此书,以便自学查阅。

全书分为上册、中册、下册,分别与下列教材相配套:同济二版、三版《线性代数》,西安交大四版《复变函数》及浙大二版《概率论与数理统计》,全部习题均有详细的解答。

书中在每章之首,均缀有一篇导学。初学者在看书时,常常“只见树木,不见森林”,而“导学”侧重于帮您透视脉络,从细节的认识升华到全盘的认识。本书是已多次再版的《高等数学习题全解》的姊妹篇,并与《考研数学真题全解及考点分析》系列教材相呼应,形成系统的知识体系。

本书由冯士英教授、聂续昀副教授担任主审,蔡颖同志也提出了宝贵的意见。

限于编者水平,加之时间仓促,不妥之处难免存在,恳请广大读者提出批评和指正!

编　者

2000 年 9 月

特别提示

第二百一十七条 以营利为目的,有下列侵犯著作权情形之一,违法所得数额较大或者有其他严重情节的,处三年以下有期徒刑或者拘役,并处或者单处罚金;违法所得数额巨大或者有其他特别严重情节的,处三年以上七年以下有期徒刑,并处罚金:

(一)未经著作权人许可,复制发行其文字作品、音乐、电影、电视、录像作品、计算机软件及其他作品的;

(二)出版他人享有专有出版权的图书的;

……

第二百一十八条 以营利为目的,销售明知是本法第二百一十七条规定的侵权复制品,违法所得数额巨大的,处三年以下有期徒刑或者拘役,并处或者单处罚金。

——摘自《中华人民共和国刑法》

目　录

中　册

复变函数习题全解及导学(西大四版)

中　册

复变函数习题全解及导学

（与西安交大四版《复变函数》相配套）

今天所做的事，

勿候明天，

自己所做的事，

勿候别人。

——歌德

第一章　复数与复变函数

生命，那是自然付给人类去雕琢的宝石。

——诺贝尔

导学

复变函数就是自变量为复数的函数。本课程研究的主要对象是在某种意义之下可导的复变函数，通常称为解析函数。为建立这种解析函数的理论基础，在这一章中，首先引入复数的代数运算及其多种表示法；其次介绍复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念，这些概念及性质与一元或二元微积分中相应概念及性质在形式上几乎完全相同，但本质上却有很大差别，应当特别给以关注。

每学一个概念、定理，均要与高等数学中相应部分进行对照，尤其要记住差别。$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是联系高等数学与复变函数的重要桥梁，全书许多定理的表述或证明均须借助于 $u(x,y)$，$v(x,y)$。

习题全解

1. 求下列复数 z 的实部与虚部，共轭复数，模与辐角主值

(1) $\dfrac{1}{3+2i}$; (2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$;

(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$; (4) $i^8-4i^{21}+i$

解 (1) $\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3}{13}+\left(\dfrac{-2}{13}\right)i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{13};\mathrm{Im}(z)=\dfrac{-2}{13};\bar{z}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i;$

$|z|=\dfrac{1}{\sqrt{13}};\arg z=-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

(2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=-i-\dfrac{3i-3}{2}=\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{-5}{2}\right)i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2};\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{5}{2};\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i;$

$|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{2};\arg(z)=-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5}{3}\right)$

(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\dfrac{(-4+3i)}{-2}(2-5i)=-\dfrac{7}{2}-13i$

$\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{7}{2};\mathrm{Im}(z)=-13;\bar{z}=-\dfrac{7}{2}+13i;$

$|z|=\dfrac{5}{2}\sqrt{29};\arg z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{26}{7}\right)-\pi$

(4) $i^8-4i^{21}+i=1-4i+i=1-3i$

$\mathrm{Re}(z)=1;\mathrm{Im}(z)=-3;\bar{z}=1+3i;|z|=\sqrt{10};$

$\arg z=-\operatorname{arctg}3$

2. 当x,y等于什么实数时,等式$\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$成立?

解 由$\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$可得

$$(x+1)+i(y-3)=2+8i$$

因此 $\begin{cases}x+1=2\\y-3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=11\end{cases}$时等式成立。

3. 证明虚单位 i 有这样的性质：$-\mathrm{i}=\mathrm{i}^{-1}=\bar{\mathrm{i}}$

证明　$\mathrm{i}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}=\bar{\mathrm{i}}$

因此　$-\mathrm{i}=\mathrm{i}^{-1}=\bar{\mathrm{i}}$

4. 证明：

(1) $|z|^2=z\bar{z}$；　　(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；　　(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2\neq 0$；

(5) $\bar{\bar{z}}=z$；

(6) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(\bar{z}+z), \mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$

证明　(1) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$　由 $z=x+y\mathrm{i}$，

得 $|z|^2=x^2+y^2$

$z\cdot\bar{z}=(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})=x^2+y^2$ 等式成立。

(2) 设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}, z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$

则左式 $=\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+y_1\mathrm{i})\pm(x_2+y_2\mathrm{i})}$

$=\overline{(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)\mathrm{i}}$

$=(x_2\pm x_2)-(y_1\pm y_2)\mathrm{i}$

右式 $=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2=\overline{(x_1+y_1\mathrm{i})}\pm\overline{(x_2+y_2\mathrm{i})}$

$=(x_1-y_1\mathrm{i})\pm(x_2-y_2\mathrm{i})$

$=(x_1\pm x_2)-(y_1\pm y_2)\mathrm{i}$　　∴ 左 = 右

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

设　$z_1=x_1+y_1\mathrm{i}, z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$

$\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}}$

$=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$

$\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(x_1-y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})$

$=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$ 等式成立

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2\neq 0$;

设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}, z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1+y_1\mathrm{i}}{x_2+y_2\mathrm{i}}\right)}=\overline{\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)\mathrm{i}}{(x_2^2+y_2^2)}}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{x_1-y_1\mathrm{i}}{x_2-y_2\mathrm{i}}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-(x_2y_1-x_1y_2)\mathrm{i}}{x_2^2+y_2^2}\quad 左=右$$

(5) $\bar{\bar{z}}=z$

设 $z=x+y\mathrm{i}\quad \bar{z}=x-y\mathrm{i}\quad \overline{(\bar{z})}=x+y\mathrm{i}=z$

(6) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(\bar{z}+z), \mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$

设 $z=x+y\mathrm{i}$ 则 $\bar{z}=x-y\mathrm{i}$

$$\frac{1}{2}(\bar{z}+z)=\frac{1}{2}(x-y\mathrm{i}+x+y\mathrm{i})=x=\mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(x+y\mathrm{i}-x+y\mathrm{i})=y=\mathrm{Im}(z)$$

5. 对任何 z,$z^2=|z|^2$ 是否成立?如果是,就给出证明,如果不是,对哪些 z 值才成立?

答:不成立,例如 $z=\mathrm{i}, z^2=\mathrm{i}^2=-1$,而 $|z|^2=[\mathrm{i}]^2=1, z^2\neq|z|^2$。只有 z 为实数时,等式 $z^2=|z|^2$ 才成立。

6. 当 $|z|\leqslant 1$ 时,求 $|z^n+a|$ 的最大值,其中 n 为正整数,a 为复数。

解 $|z^n+a|\leqslant|z^n|+|a|\leqslant 1+|a|$ 故 $1+|a|$ 为所求。

7. 判定下列命题的真假:

(1) 若 c 为实常数,则 $c=\bar{c}$; (2) 若 z 为纯虚数,则 $z\neq\bar{z}$;

(3) $\mathrm{i}<2\mathrm{i}$; (4) 零的辐角是零;

(5) 仅存在一个数 z,使得 $\dfrac{1}{z}=-z$;

(6) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$； (7) $\frac{1}{i}\bar{z}=\overline{iz}$

解　(1) 真命题；　(2) 真命题；　(3) 假命题；

(4) 假命题；　(5) 假命题；　(6) 一般不真；

(7) 真命题

8. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式：

(1) i；　(2) -1；

(3) $1+i\sqrt{3}$；　(4) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$；

(5) $\frac{2i}{-1+i}$；　(6) $\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}$

解　(1) i

$$\begin{aligned}i&=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\\&=e^{i\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

(2) -1

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}$$

(3) $1+i\sqrt{3}$

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

(4) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})i}$$

(5) $$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=\sqrt{2}e^{(-\frac{\pi}{4}i)}$$

(6) $$\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=\frac{(e^{i5\varphi})^2}{(e^{-i3\varphi})^3}=e^{i19\varphi}=\cos19\varphi+i\sin19\varphi$$

9. 将下列坐标变换公式写成复数的形式：

(1) 平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1\\y=y_1+b_1\end{cases}$

(2) 旋转公式:$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$

解 (1) 平移公式:$\begin{cases} x = x_1 + a_1 \\ y = y_1 + b_1 \end{cases}$

$z = x + y\mathrm{i} = (x_1 + a_1) + (y_1 + b_1)\mathrm{i}$

$\quad = (x_1 + y_1\mathrm{i}) + (a_1 + b_1\mathrm{i}) = z_1 + A$ (其中 $A = a_1 + \mathrm{i}b_1$)

(2) 旋转公式:$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$

设 $\quad z = x + y\mathrm{i}, \quad z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$

则
$$\begin{aligned} z &= (x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) + \mathrm{i}(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) \\ &= (\cos\alpha)(x_1 + \mathrm{i}y_1) + (-y_1 + \mathrm{i}x_1)\sin\alpha \\ &= (\cos\alpha)z_1 + \mathrm{i}(\sin\alpha)z_1 \\ &= z_1(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \\ &= z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \end{aligned}$$

10. 一个复数乘以 $-\mathrm{i}$,它的模与辐角有何改变?

答:模不变,辐角减小$\frac{\pi}{2}$。

11. 证明:$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ 并说明其几何意义。

证明
$$\begin{aligned} 左 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 \\ &\quad - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 右 \end{aligned}$$

几何意义:平行四边形两条对角线的平方和等于平行四边形相邻两边平方和的两倍。

12. 证明下列问题:

(1) 任何有理分式函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+\mathrm{i}Y$ 的形式，其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数；

(2) 如果 $R(z)$ 为(1)中的有理分式函数，但具有实系数，那末 $R(\bar{z})=X-\mathrm{i}Y$；

(3) 如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，那末 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根。

证明　(1) 令 $z=r(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$Q(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m\quad(a_i,b_i\in R)$$

则
$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)\overline{Q(z)}}{|Q(z)|^2}$$

而
$$\begin{aligned}P(z)\overline{Q(z)}&=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_n+C_{n+1}\bar{z}\\&\quad+\cdots+C_{n+m}\bar{z}^m\\&=C_0r^n(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx)+\cdots\\&\quad+C_{n+m}r^m[\cos(-mx)+\mathrm{i}\sin(-nx)]\\&=[C_0r^n\cos nx+\cdots+C_{n+m}\cos(-mx)]\\&\quad+[C_0r^n\sin nx+\cdots+C_{n+m}r^m\sin(-mx)]\end{aligned}$$

令
$$X=\frac{1}{|Q(z)|^2}[C_0r^n\cos nx+\cdots+C_{n+m}r^m\cos(-mx)]$$

$$Y=\frac{1}{|Q(z)|^2}[C_0r^n\sin nx+\cdots+C_{n+m}r^m\sin(-mx)]$$

则
$$R(z)=X+Y\mathrm{i}$$

(2) $R(\bar{z})=\dfrac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})}=\dfrac{P(\bar{z})Q(z)}{|Q(z)|^2}$　由上面所证，类似可得

$$\frac{P(\bar{z})Q(z)}{|Q(z)|^2}=X-Y\mathrm{i}$$

(3) 令 $R(z)=a_0z^n+\cdots+a_n$

当 $z=a+ib$ 时 $R(z)=0$,(将 0 看做 $0+i0$)

由(1)(2)可得 $\bar{z}$ 使得

$$R(\bar{z})=a_0(\bar{z})^n+\cdots+a_{n-1}\bar{z}+a_n=0-i0=0$$

因此 $a-ib$ 也是它的根。

13. 如果 $z=e^{it}$,证明:

(1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$;　　(2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$

证明　由于 $z=e^{it}$ 故可得 $z=\cos t+i\sin t$

(1) $$z^n+\frac{1}{z^n}=(\cos nt+i\sin nt)+\frac{1}{(\cos nt+i\sin nt)}$$
$$=\cos nt+i\sin nt+\cos nt-i\sin nt$$
$$=2\cos nt$$

(2) $$z^n-\frac{1}{z^n}=(\cos nt+i\sin nt)-\frac{1}{(\cos nt+i\sin nt)}$$
$$=\cos nt+i\sin nt-\cos nt+i\sin nt$$
$$=2i\sin nt$$

14. 求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$;　　(2) $(1+i)^6$

(3) $\sqrt[6]{-1}$;　　(4) $(1-i)^{1/3}$

解　(1) $$(\sqrt{3}-i)^5=\left[2(\cos(\frac{\pi}{-6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))\right]^5$$
$$=32\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$$
$$=-16\sqrt{3}-16i$$

(2) $$(1+i)^6=\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right]^6$$
$$=8(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi)=-8i$$