配上海市二期课改新教材

数学

初、高中教材衔接读本

上海教育出版社

SHUXUE

ISBN 7-5444-0943-0

9 787544 409438 >

易文网: www.ewen.cc

定 价: 21.00元

数　　学

初、高中教材衔接读本

上海市复兴高级中学　编

主编：刘　寅
编委：朱　良　　杨继红
沈小勇　　程振唐
薛建国

上海教育出版社

数学　初、高中教材衔接读本

上海市复兴高级中学　编

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路 123 号　　邮编：200031）

各地新华书店经销　　上海颛辉印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 8.5

2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

印数 1－5,000 本

ISBN 7-5444-0943-0/G·0769　定价：21.00 元

（如发生质量问题，读者可向工厂调换）

序

现实世界的一切事物都不是孤立存在而是相互依存的.事物的发生、发展,往往看似偶然,却都存在一定的因果关系.这种相互依存和因果关系无不以一定的形式表现出来,对其研究就必须用到数学.可见数学在现实世界和日常生活中是无处不在的.但我们最容易看到它的存在的却是现实世界的空间形式和数量关系,也就是我们常见的各种运动和图形中位置、大小关系的研究.我们从这里开始学习数学,但必须举一反三,认识到数学规律是存在于我们周围的一切事物之中的.如果我们对数学学习扩展视野,就能处处发现数学规律,从而把数学运用于实际.我们就会在处理任何问题时,使自己的行为符合客观规律,我们就能少犯错误,能够创造性地解决问题.

我们每个同学从开始学习数学起,已经至少有9年了,但往往是就事论事地花了大量的时间在记忆概念的定义和解题方法上.做了大量的习题,关心的是结果是否正确.事实上,数学不是这些结果,而存在于我们寻求方法与结果的过程之中.要把我们的注意力转移到寻求结果的思维过程,这是很不容易的.这就需要我们的思维方法从怎样做转变到为什么要这样做?换一个方法行不行?哪种方法最好?为什么?三个星期的时间使我们长期形成的习惯有一个改观,是需要花很大的力气的.希望同学们在运用这本教材衔接读本学习数学时,严格按照教师要求,时时处处注意改变以往不合理的思维方法和学习习惯.如果能注意对比,收获就更大了.

姚晶　2005年

前　言

初、高中数学的教学要求、教学内容有很大的不同. 初中的数学内容是数学的基础知识，一般要求学生学会对直观的现象作简单的定量描述和计算，思维的过程比较直接和单一，较少涉及分类、变换、化归等数学思想. 而高中的数学内容则较为抽象，对象往往是动态的，思维过程也较初中复杂，学生将要完成从简单的模仿理解，从单一的练习，到学会思考的转化. 要通过三年的高中数学教学，“进一步发展数学实践能力”，“培养和提高思维能力”成为我校为高等学校输送在数学认知上有较高水平的优秀学生.

高一新生来自全国不同的地区、不同的学校，而不同的学校对初中数学的内容和要求在把握和理解上存在着差异，学生在知识内容的掌握程度上也不一样，形成学生自身不同的学习方法和学习习惯，重新组成一个新的学习群体，应当有一个磨合期. 对在初中时已形成的学习习惯、学习方法和数学思维定势要有所调整，并且因为高中数学的难度增大，应当有适当的知识和方法的铺垫. 同时，对诸如课堂笔记、回家作业、试卷订正等学习要求也应当有一个规范的过程. 因此，从 2000 年起我们安排了初高中衔接教学，使学生能较好地完成初中到高中的过渡.

衔接教学的内容包括两个方面，其一是数学知识的教学，对初中数学的某些内容进行补齐，适当地进行推广；有些则作更深入的学习(例如：字母参数的讨论、二次方程根的分布等)；增加了一些高中数学学习的预备知识. 其二是思想方法上的训练，主要是引导学生在数形结合、分类讨论、等价变换、类比推广、归纳论证等数学思维方法上有一个初步的认识；同时对学习新知识的能力、探索问题的能力、解决实际问题的能力，以及创新能力也有所渗透.

我们希望通过初、高中数学衔接教学，使学生在进入高中后有一个比较整齐、较高层次的起点.

本书是全组教师经过六年的教学，在教案的基础上多次修改整理而成. 另外，还添加了平面几何的部分内容供选学.

衔接教学始终得到了复兴中学名誉校长、数学特级教师姚晶老师，复兴中学前校长、数学特级教师马惠生老师的关心和帮助. 有些章节是他们亲手所写和讲授. 并提出了许多宝贵的修改意见，得以今天的出版.

本教材教学时间三周(代数部分)，已列入学校的必修课课时.

目 录

一、代　数

1. 集　合

一、集合的概念

"集合"早在我们小学一年级学加法时就接触到了. 例如,3 只白鸡和 5 只黑鸡的和是 8 只鸡,鸡是白鸡和黑鸡这两种元素的集合,它们既不相同又有着共同点. 又如,平行四边形是具有四条边而对边都相等且平行的四边形. 矩形也是平行四边形,但相邻两边必须互相垂直,菱形也是平行四边形但相邻两边必须相等. 这里平行四边形就是一个集合,它的各种性质就是集合的**内涵**. 矩形和菱形就是这个集合中的不同元素,它们除都具有平行四边形的性质外,又各具有不同的个性. 我们就称它们是集合的**外延**.

在现实生活和数学中,我们常常需要把一些对象放在一起,作为一个整体来研究. 例如:

(1) 某校高中一年级全体学生;

(2) 所有的锐角三角形;

(3) 一个正方形 $ABCD$ 内部的点的全体;

(4) 1,3,5,7,9;

(5) 不等式 $3x+2>0$ 的解的全体.

我们常常把能够确切指定的一些对象看作一个整体,这个整体就叫做**集合**,简称**集**.

集合中的各个对象叫做这个集合的**元素**. 对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的. 也就是说,任何一个对象要么是给定集合的元素,要么不是这个集合的元素,二者必居其一,即集合中的元素具有确定性.

例如,王老师不是某校高中一年级全体学生组成的集合的元素. 又如,一个等边三角形是所有锐角三角形组成的集合的一个元素.

对于一个给定的集合,集合中的元素是各不相同的. 也就是说,一个给定的集合中的任何两个元素都是不同的对象. 集合中的元素不重复出现,即集合中的元素具有互异性.

对于一个给定的集合，集合中的元素没有先后的次序之分．也就是说，交换元素的先后次序，仍然是同一个集合，即集合中的元素具有无序性．

综上，集合中的元素具有确定性、互异性、无序性．

集合常用大写字母 A、B、C……表示，集合中的元素常用小写字母 a、b、c……表示．

如果 a 是集合 A 的元素，就记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"．

如果 a 不是集合 A 的元素，就记作 $a\notin A$，读作"a 不属于 A"．例如，设由 1，3，5，7，9 组成的集合 A，那么 $3\in A$，$2\notin A$．

数的集合简称数集，我们把常用的数集用特定的字母表示：

全体自然数组成的集合，即**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$，不包括零的自然数组成的集合，记作 $\mathbf{N}^*$．

全体整数组成的集合即**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$．

全体有理数组成的集合即**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$．

全体实数组成的集合即**实数集**，记作 $\mathbf{R}$．

从上面 5 个例子可以看出，有些集合，如(1)、(4)，它们都只含有有限个元素；而有些集合，如(2)、(3)、(5)，它们都含有无限个元素．我们把含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**．

一种特殊的集合叫做**空集**．空集是不含有任何元素的集合，记作 $\varnothing$．例如，方程 $x^2-2=0$ 的有理数解所组成的集合是空集；方程 $x^2+1=0$ 的实数解所组成的集合是空集；满足不等式组 $\begin{cases}2x-5>0,\\2(x-1)<1\end{cases}$ 的实数 x 的全体是空集；两个外离的圆，它们的公共点所组成的集合也是空集．

二、集合的表示方法

集合的表示方法常用列举法和描述法．

将集合中的元素一一列举出来（在列举时不考虑元素的顺序），并且写在大括号内．这种表示集合的方法叫做**列举法**．例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的集合，可表示为 $\{2,3\}$，也可表示为 $\{3,2\}$；又如方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\x-y=-1\end{cases}$ 的解组成的集合可表示为 $\{(2,3)\}$．

在大括号内先写出这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线后面写上集合中元素所共同具有的特征，即 $A=\{x\mid x\text{ 满足性质 }p\}$，这种表示集合的方法叫做**描述法**．

例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的解集可表示为 $\{x\mid x^2-5x+6=0\}$；直线 $x+y=1$ 上

的点组成的集合，可以表示为$\{(x,y)|x+y=1\}$.

例 1　用符号$\in$、$\notin$填空：

(1) 0 ______ $\{0\}$；　　(2) 0 ______ $\varnothing$；

(3) 0 ______ $\mathbf{N}^*$；　　(4) 0 ______ $\mathbf{Z}$；

(5) $\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{Q}$；　　(6) -2 ______ $\mathbf{Z}$.

解　(1) $0\in\{0\}$.　　(2) $0\notin\varnothing$.

(3) $0\notin\mathbf{N}^*$.　　(4) $0\in\mathbf{Z}$.

(5) $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$.　　(6) $-2\in\mathbf{Z}$.

例 2　用适当的方法表示下列集合：

(1) 大于 0 且不超过 6 的全体偶数组成的集合 A.

(2) 被 3 除余 2 的自然数全体组成的集合 B.

(3) 直角坐标平面上第二象限的点组成的集合 C.

解　(1) 用列举法：$A=\{2,4,6\}$.

(2) 用描述法：$B=\{x|x=3k-1,k\in\mathbf{N}^*\}$.

(3) 用描述法：$C=\{(x,y)|x<0$ 且 $y>0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

例 3　用另一种方法表示下列集合：

(1) $\left\{(x,y)\left|\begin{cases}2x-y=3,\\3x+4y=10\end{cases}\right.\right\}$；　　(2) $\{x|(x-1)^2(x-2)=0\}$；

(3) $\left\{(x,y)\left|\begin{cases}2x+y=8,\\4x+2y=1\end{cases}\right.\right\}$；　　(4) $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$；

(5) $\{2,3,4\}$.

解　(1) $\{(2,1)\}$.　　(2) $\{1,2\}$.　　(3) $\varnothing$.

(4) $\left\{x\left|x=\frac{n}{n+2},n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant 5\right.\right\}$.　　(5) $\{x|2\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{N}\}$.

三、数集与区间

设 a、b 都为实数，并且 $a<b$，我们规定：

(1) 集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$叫做**闭区间**，表示为$[a,b]$；

(2) 集合$\{x|a<x<b\}$叫做**开区间**，表示为(a,b)；

(3) 集合$\{x|a\leqslant x<b\}$或$\{x|a<x\leqslant b\}$叫做**半开半闭区间**，分别表示为$[a,b)$或$(a,b]$.

在上述所有的区间中，a、b 叫做区间的**端点**. 以后我们可以用区间表示不等式的解集.

(4) 把实数集 $\mathbf{R}$ 表示为$(-\infty,+\infty)$；把集合$\{x|x\geqslant a\}$、$\{x|x>a\}$、$\{x|x\leqslant b\}$和

$\{x|x<b\}$分别用区间$[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$和$(-\infty,b)$表示．a与b也叫做区间的端点．“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”．

这些区间在数轴上的表示，如图 1－1 所示．

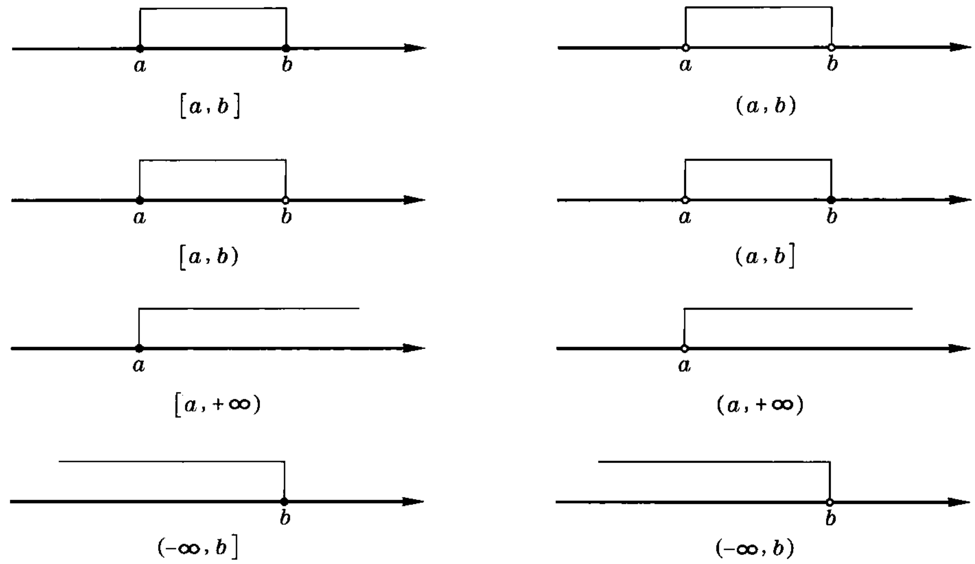

图 1—1

练习

1. 高一某班数学成绩好的学生能否构成一个集合？

2. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 所有偶数组成的集合；

(2) 我所在的班级坐在第一排的学生组成的集合；

(3) 比 1 大且比 10 小的一切实数组成的集合；

(4) 使方程 $x^2+kx-2=0$ 无实数解的实数 k 组成的集合．

习题

1. 判断下列各组对象能否组成集合：

(1) 满足 $x>2$ 且 $x<0$ 的实数 x；

(2) 绝对值小于 0 的实数；

(3) 很小的数的全体；

(4) 我班的高个子学生．

2. 用列举法表示下列集合：

(1) 组成中国国旗的颜色名称的集合；

(2) 上海市各区县名称的集合；

(3) $\left\{x\left|\dfrac{24}{x}\in\mathbf{N}^*, x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$；

(4) $\{y\mid y=x^2-1, -1<x<3, y\in\mathbf{Z}\}$.

3. 用描述法表示下列集合：

(1) 绝对值小于 4 的所有整数组成的集合；

(2) 平面直角坐标系中，第一象限内所有点组成的集合；

(3) 末位数是 3 的自然数组成的集合；

(4) $\{2,3,5,7\}$.

4. 集合$\{(x,y)\mid xy\geqslant 0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$是指 ( )

(A) 第一象限内所有的点；

(B) 第三象限内所有的点；

(C) 第一象限或第三象限内所有的点；

(D) 不在第二象限、第四象限内的所有点.

5. 下列集合中，有限集是 ( )

(A) $\{x\mid x<10, x\in\mathbf{N}\}$； (B) $\{x\mid x<10, x\in\mathbf{Z}\}$；

(C) $\{x\mid x^2<10, x\in\mathbf{Q}\}$； (D) $\{x\mid x=y+10, y\in\mathbf{R}\}$.

6. 如果 $M=\{(0,1)\}$，那么下面写法正确的是 ( )

(A) $0\in M$； (B) $1\in M$；

(C) $(0,1)\in M$； (D) $\{0,1\}\in M$.

7. 如果 $m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{Z}$ 且 $mn<0$，那么下列写法错误的是 ( )

(A) $\dfrac{m}{n}\in\mathbf{R}$； (B) $\dfrac{m}{n}\in\mathbf{Q}$；

(C) $\dfrac{m}{n}\in\mathbf{Z}$； (D) $\dfrac{m}{n}\notin\mathbf{N}$.

8. 用列举法表示$\{(x,y)\mid x+y=2$ 且 $xy=-3\}$.

9. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-2=0$ 的全体实数解组成的集合；

(2) 两直线 $y=2x+1$ 和 $y=x-2$ 的交点组成的集合；

(3) 坐标平面的横轴上所有点组成的集合.

10. 已知集合 $A=\left\{x\mid x=\dfrac{m-1}{m+1}, m\in\mathbf{N}^* \text{ 且 } m\leqslant 3\right\}$. A 中有几个元素？把它们写出来.

2. 有理数、无理数和实数

一、数的概念

1. 偶数：能被 2 整除的整数称为“偶数”. 偶数可用 $2n$（n 是整数）表示. 例如：0，+2，−2，+4，−4，… 正偶数俗称为“双数”.

2. 奇数：不能被 2 整除的整数称为“奇数”. 奇数可用 $2n+1$（n 是整数）表示. 例如：−1，+1，−3，+3，… 正奇数俗称为“单数”.

3. 素数：亦称“质数”. 一个大于 1 的正整数，只能被 1 和本身整除，不能被其他正整数整除. 例如：2，3，5，7，11，13，17，19，…

4. 合数：一个正整数除了能被 1 和本身整除以外，还能被另外的正整数整除. 例如：4，6，8，9，12，14，15，16，…

5. 两个自然数互素：如果它们除了 1 没有其他公因数，则称这两个自然数互素.（也可以推广到整数）

6. 有理数：整数和分数的统称. 可将分数 $\frac{m}{n}$（其中 m、n 为整数且互素，且 $n\neq0$）表示为有理数.（整数可以表示成分母为 1 的分数）有限小数或无限循环小数也称为有理数. 对于无限循环小数可以表示成分数的形式. 例如 $0.\dot{3}$，当令 $x=0.\dot{3}$ 时，可以记作 $x=0.3333\cdots$，$10x=3.3333\cdots$，从而可得 $9x=3$，进而可以得到 $x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，即 $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$. 类似，$0.0\dot{3}$、$0.\dot{6}\dot{3}$、$0.4\dot{3}$…都可以化为分数的形式.

7. 无理数：无限不循环小数称为无理数.

二、数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{零}\\\text{正有理数}\\\text{负有理数}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{整数}\begin{cases}\text{偶数}\begin{cases}\text{正偶数}\\\text{零}\\\text{负偶数}\end{cases}\\\text{奇数}\begin{cases}\text{正奇数}\\\text{负奇数}\end{cases}\end{cases}$$

非零自然数（正整数）$\begin{cases}\text{1（即不是素数也不是合数）}\\ \text{合数}\\ \text{素数}\end{cases}$

注　整数还可以分为正整数、零、负整数.

三、有理数的三大特征

1. 有理数的稠密性.

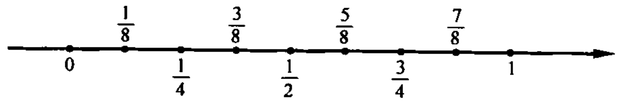

图 1—2

如图 1—2 所示，数轴上两个有理点 0、1 之间的中点$\frac{1}{2}$也是有理点；0、$\frac{1}{2}$的中点$\frac{1}{4}$；0、$\frac{1}{4}$的中点$\frac{1}{8}$；$\frac{1}{2}$、1 之间的中点$\frac{3}{4}$；$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$的中点$\frac{5}{8}$；…也都是有理点，可以看出两个有理点 0、1 之间存在无限多个有理点，用这种取中点的办法可以知道，任意两个有理点之间，存在无限多个有理点，有理点是密密麻麻地分布在整个数轴上的.

有理数的稠密性可叙述为：任意两个相异的有理数 a、b 之间，存在着无限多个有理数，具体地说，无论 a、b 是怎样的两个相异的有理数，不妨设 $a<b$，则一定存在一个有理数 c，使得 $a<c<b$，这是一个存在性命题.

2. 有理数的不连续性.

既然两个相异的有理点之间还存在有理点，数轴上的有理点密密麻麻地聚集在一起，那么，有理点是否布满了整个数轴呢？回答自然是否定的. 这就是说，在数轴上是找不到哪怕再小的“一整段”全部都是有理点. 任意两个有理点之间，存在密密麻麻无数个空洞，这些空洞不是有理点，我们称它为无理点. 反之任意两个无理点之间，也有密密麻麻的无数个有理点. 有理点和无理点就是这样，你中有我，我中有你，布满了整个数轴.

3. 有理数的可数性.

如果问有理数和正整数的个数哪一个多，有人立即会说：正整数是有理数的一部分，当然是有理数个数多！

先举这样一个例子，如果问某教室中桌子多还是椅子多，一种方法是数出桌子、椅子的数目，然后比较多少，另一种方法是一个桌子配一把椅子，这样一一对应，答案很快就能得出.

由于有理数和正整数都是无限多个，因此，上述第一种方法显然无法得到结果，采用第二种方法，就是看全体有理数能否和全体正整数做到一一对应.

下面我们要来证明一个事实：有理数和正整数个数“一样多”.

因为有理数总可以写成分数的形式，我们可以按分母大小，先将有理数排成下面的方块：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} & \frac{6}{4} & \frac{6}{5} & \frac{6}{6} & \cdots
\end{array}
$$

方块中被圈掉的是有重复的数，如$\frac{2}{2}$、$\frac{3}{3}$等$\left(已有\frac{1}{1}\right)$，$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$等$\left(已有\frac{1}{2}\right)$，…

再在每个横列中，用后面…号中数字按规律及上述做法依次序补上，得下表：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{2}{1} & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{2}{11} & \cdots \\[6pt]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} & \cdots \\[6pt]
\frac{4}{1} & \frac{4}{3} & \frac{4}{5} & \frac{4}{7} & \frac{4}{9} & \frac{4}{11} & \cdots \\[6pt]
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} & \frac{5}{7} & \cdots \\[6pt]
\frac{6}{1} & \frac{6}{5} & \frac{6}{7} & \frac{6}{11} & \frac{6}{13} & \frac{6}{17} & \cdots
\end{array}
$$

再按表中箭头的顺序将正有理数一一排列，这样，所有的正有理数都将无重复无遗漏地被排入下列横列.

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{2}{1}\quad \frac{3}{1}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{2}{5}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{4}{1}\quad \frac{5}{1}\quad \frac{4}{3}\quad \frac{3}{4}\quad \frac{2}{7}\quad \frac{1}{5}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{2}{9}\quad \frac{3}{5}\quad \cdots$$

按照规律，上述横列中任意一个有理数，都可以和它所处的“位置数”(即正整数)对应，例如$\frac{4}{3}$排在第 12 位，即有理数$\frac{4}{3}$与正整数 12 对应，$\frac{2}{9}$排在第 17 位，有理数$\frac{2}{9}$与正整数 17 对应，…

如果再考虑符号，在排队时先排 0，然后在每个正有理数后面，排上它的相反数，这样，每个有理数都可以有它自己的“位置数”，即每个有理数都能与正整数对应.

因此我们可以说，有理数与正整数的个数“一样多”.

有理数的这个特性，称为有理数的可数性，也称有理数是“可数的”. 这里补充一句：无理数就不具备可数性，它是无限不循环小数.

四、无理数

1. 无理数客观存在，在数轴上可以找到.

例如：根据勾股定理，直角边长为 1 的等腰直角三角形的斜边长就是$\sqrt{2}$，如图 1－3 所示：

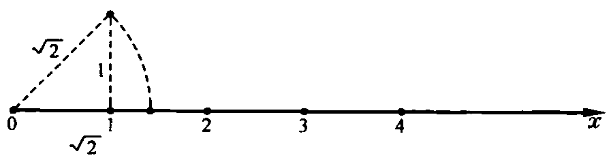

图 1－3

可是$\sqrt{2}$绝不可能是有理数. 因为若令$\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$（m、$n\in\mathbf{Z}$，且互素），则 $m=\sqrt{2}n$，即 $m^2=2n^2$，可见 m^2 是偶数，m 必然也是偶数. 令 $m=2k$（$k\in\mathbf{Z}$），则 $m^2=4k^2$，从而 $4k^2=2n^2$，$n^2=2k^2$. 于是 n^2 和 n 都是偶数，这与 m、n 互素相矛盾，所以$\sqrt{2}$不可能写成分数的形式，即$\sqrt{2}$不是有理数.

2. 我们知道有理数可以用整数、有限小数或无限循环小数表示，那么无理数呢？

对于$\sqrt{2}$，可以先利用它的平方等于 2 在平方数 1 与 4 之间，即 $1<2<4$，再从左右两个方向寻找平方数以逐步接近. 如由 $1.96<2<2.25$，可知 $1.4<\sqrt{2}<1.5$；再由 $1.9881<2<2.0164$，可知 $1.41<\sqrt{2}<1.42$. 由此类推可知$\sqrt{2}$是在两个逐步接近的两个小数之间，但这样的小数可以无限的找下去，都不会成为循环小数.

注　*对于$\sqrt{2}$还可以更加直观地从笔算开平方的过程中感受出.*

3. 除了有理数开方可以得到无理数以外，还可以用很多其他方法找到无理数. 例如，圆的周长和它的直径之比随着尺的精确度增加，这个比值也会不断变化. 我们还可以从图形关系加以说明. 由三角形的两边之和大于第三边可以导出过两点的外包线大于内包凸折线，从而可知同一圆的外切多边形的周长必大于其内接多边形的周长（相同边数）. 可以用计算方法算出，以三角形或正方形为基础的圆的外切正多边形的周长和内接多边形的周长会随着边数的增加而越益接近，但不会相等，这里也是一个无限不循环小数.

4. 由于无理数必存在于有理数之间，可见无理数也是稠密的，并且不连续的，但它们是不可列的，因而也是不可数的.