经纶图书

经纶学典

修订版

总主编◎李朝东

JINGLUN XUEDIAN

教材解析

重难疑点 详尽解读 各种题型 一网打尽

北师国标

数学

九年级（上）

中国少年儿童新闻出版总社

经纶学典

总主编◎李朝东

JINGLUN XUEDIAN

教材解析

北师国标

数学

九年级（上）

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年兒童出版社

图书在版编目(CIP)数据

经纶学典教材解析. 九年级数学. 上 / 李朝东主编;王新刚编写. —3 版. —北京:中国少年儿童出版社,2009.4(2010.3 重印)

ISBN 978-7-5007-8121-9

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①李…②王… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 029516 号

经纶学典·教材解析

数学 九年级(上)

(北师国标)

出版发行:中国少年儿童新闻出版总社

中国少年儿童出版社

出 版 人:李学谦

执行出版人:赵恒峰

总 主 编:李朝东　　封面设计:杭永鸿

责任编辑:赵海力 朱玉兰　　责任印务:李建国

地 址:北京市东四十二条 21 号

电 话:010-64132053　　邮政编码:100708

E-mail: dakaiming@sina.com　　传 真:010-64132053

印刷:皖南海峰印刷包装有限公司　　经销:新华书店

开本:880×1230 1/32　　印张:10.5　　本次印数:10000 册

2010 年 3 月第 3 版第 5 次印刷

ISBN 978-7-5007-8121-9/G·6066　　定价:16.00 元

目录

CONTENTS

第一章 证 明 (二)

1. 你能证明它们吗

A 知识详解

知识点一 四个公理和一个推论

公理:三边对应相等的两个三角形全等.(SSS)

公理:两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.(SAS)

公理:两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.(ASA)

公理:全等三角形的对应边相等、对应角相等.

推论:两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.(AAS)

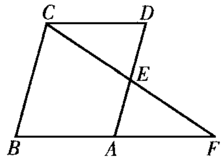
友情提醒 (1)几何中公理是证明定理、推论以及解题的依据,一定要结合图形分清公理的条件和结论.

(2)前面三个公理和后面的推论是证明三角形全等的主要依据,描述的是三角形全等的各组条件,指出的都是一个三角形中的三个元素,只有一个三角形中的三个元素与另一个三角形中对应的三个元素相等时,才能判定三角形全等,各条件中必须有一个是边相等的条件,要特别注意不存在"SSA"这样的判定三角形全等的公理.

(3)第四个公理描述的是全等三角形的一个重要性质,是三角形全等的最重要的应用,它是证明两条线段相等和两个角相等的常用方法.

例1 如图,已知$\square ABCD$中,E为AD的中点,CE的延长线交BA的延长线于点F.求证:$CD=FA$.

解析 要判断CD与FA是否相等,我们可先判断$\triangle CDE$与$\triangle FAE$是否全等,由E为AD的中点,可知$ED=EA$,由$\square ABCD$可知$\angle D=\angle DAF$,$\angle F=\angle DCE$,这时再根据"AAS",便可判断$\triangle CDE$与$\triangle FAE$全等,从而有CD与FA相等.



证明 $\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore CD/\!/BF$.

$\therefore \angle F=\angle DCE, \angle FAE=\angle D$.

又$\because E$为AD的中点,$\therefore ED=EA$.

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle FAE.$

$\therefore CD = FA.$

友情提醒 要说明两条线段相等,可以考虑说明这两条线段所在的两个三角形全等,而后根据全等三角形的对应边相等的性质进行说明.

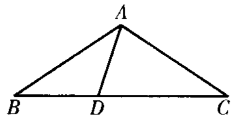
知识点二　等腰三角形的性质定理及其证明

等腰三角形的两个底角相等(等边对等角).

友情提醒 (1)运用"等边对等角"定理,一定要注意前提条件是在同一个三角形中.

(2)等腰三角形性质定理的推理格式:$\because AB = AC$,$\therefore \angle B = \angle C$(等边对等角).

例2 如图,在$\triangle ABC$中,$AB = AC$,点D在BC上,且$BD = AD$,$DC = AC$,求$\angle B$的度数.



解 $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C$(等边对等角),

同理可得$\angle B = \angle BAD$,$\angle CAD = \angle CDA$.

设$\angle B = x$,则$\angle C = \angle BAD = x$.

$\therefore \angle CDA = \angle CAD = 2x.$

在$\triangle ADC$中,

$\because \angle C + \angle CDA + \angle CAD = 180°$,

即$x + 2x + 2x = 180°$,

$\therefore x = 36°.$

$\therefore \angle B = 36°.$

友情提醒 用代数方法解几何计算题常可使问题化繁为简.

知识点三　等腰三角形性质定理的推论及证明

等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合,简称为"三线合一".

例3 如图,已知$\triangle ABC$中,$AB = AC$,AH是高,$\angle B = 70°$,$BC = 6$ cm,求BH的长以及$\angle BAH$、$\angle CAH$的度数.

解析 AH是高,由"三线合一"可知AH是底边BC的中线,即$BH = \frac{1}{2}BC$,且AH是顶角$\angle BAC$的平分线,即$\angle BAH = \angle CAH = \frac{1}{2}\angle BAC$.

解 $\because AB = AC$,AH是高,

$\therefore AH$是底边BC的中线,AH是顶角$\angle BAC$的平分线.

$\therefore BH = \frac{1}{2}BC$,$\angle BAH = \angle CAH = \frac{1}{2}\angle BAC.$

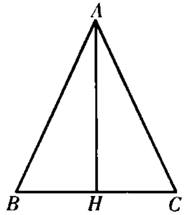
$\because BC=6\text{ cm}$,

$\therefore BH=\frac{1}{2}\times 6=3(\text{cm})$.

$\because \angle B=70^\circ$,

$\therefore \angle BAC=180^\circ-2\angle B=40^\circ$.

$\therefore \angle BAH=\angle CAH=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ$.



友情提醒 利用“三线合一”的性质,可以证明角相等、线段相等或线段垂直,即等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高,三者中只要满足其中一个,就可以得出其他两个.

知识点四 等腰三角形的判定定理及证明

有两个角相等的三角形是等腰三角形(等角对等边).

例4 如图,已知在$\triangle ABC$中,$DE//CA$,$DE=BE$.求证:$AB=AC$.

解析 线段AB和AC是$\triangle ABC$的两条边,要说明$AB=AC$,只需说明$\angle B=\angle C$,从已知条件出发,利用“等角对等边”加以说明.

证明 $\because DE//CA$,

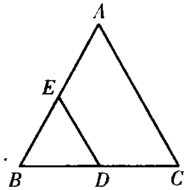
$\therefore \angle C=\angle BDE$.

$\because BE=DE$,

$\therefore \angle B=\angle BDE$.

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\therefore AB=AC$(等角对等边).



友情提醒 当要证明的两条线段是同一个三角形的两条边时,可说明这两边所对的三角形的两个内角相等,利用“等角对等边”证明.

知识点五 反证法

先假设命题的结论不成立,然后推导出与定义、公理、已证定理或已知条件相矛盾的结果,从而证明命题的结论一定成立,这种证明方法称为反证法.

友情提醒 (1)反证法是一种重要的数学证明方法,在解决某些问题时,它常常会有出人意料的作用.

(2)用反证法证明一个命题常采用以下步骤:

①假定命题的结论不成立.

②进行推理,在推理中出现下列情况之一:与已知条件矛盾;与定义矛盾;与公理或定理矛盾.

③由于上述矛盾的出现,可以断言,原来的假定“结论不成立”是错误的.

④肯定原来命题的结论是正确的.

(3)用反证法证明命题实际上是这样一个思维过程:我们假定“结论不成立”,结论一不成立就会出毛病,这个毛病是通过与已知条件矛盾、与定义矛盾、与公理或定理矛盾的方式暴露出来的.这个毛病是怎么造成的呢?推理没有错误,已知条件、定义、公理或定理没有错误,这样一来,唯一有错误的地方就是一开始的假定.“结论不成立”与“结论成立”必然有一个正确.既然“结论不成立”有错误,那么结论必然成立了.

例5 求证:在一个三角形中,不能有两个角是钝角.

解析 本例是一个命题类证明题,需要先写出已知、求证,而后利用所学知识写出证明过程,本例直接证明不易,可考虑运用反证法来证明.

证明 已知:$\angle A,\angle B,\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角.

求证:$\angle A,\angle B,\angle C$中不能有两个钝角.

证明:假如$\angle A,\angle B,\angle C$中有两个钝角,不妨设$\angle A>90^\circ$,且$\angle B>90^\circ$,则$\angle A+\angle B+\angle C>180^\circ$.这与三角形内角和定理矛盾.故$\angle A,\angle B$均大于$90^\circ$不成立.

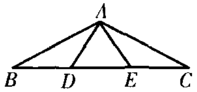
即一个三角形不可能有两个钝角.

友情提醒 运用反证法时应注意三点:一是反证法适用于证明一些用直接证法比较困难的命题;二是证明时,第一步是“假设命题的结论不成立”,亦可理解成该命题结论的反面成立.但此时,要考虑结论的反面可能出现的情况.如果结论的反面只有一种情况,那么只需否定这种情况就足以证明原结论是正确的;如果结论的反面不止一种情况,那么必须把各种可能情况全部列举出来,并且一一加以否定后,才能肯定原结论是正确的;三是证明时,步骤第二步“从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾”其中的矛盾,可以是和已知矛盾,也可以和定义、公理、定理、性质等矛盾,这样都足以说明假设错误,原命题正确.

知识点六 等边三角形的判定定理及证明

有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

例6 如图,点E在线段BC上,$BD=CE$,$\angle B=\angle C$,$\angle ADB=120^\circ$.求证:$\triangle ADE$为等边三角形.



解析 由已知$\angle ADB=120^\circ$,可知$\angle ADE=60^\circ$,只要证$\triangle ABD\cong\triangle ACE$可得$AD=AE$,即可证$\triangle ADE$为等边三角形.

证明 $\because\angle B=\angle C$,$\therefore AB=AC$.

又$\because BD=CE$,$\therefore\triangle ABD\cong\triangle ACE$.$\therefore AD=AE$.

又$\because\angle ADB=120^\circ$,$\therefore\angle ADE=180^\circ-\angle ADB=60^\circ$.

$\therefore\triangle ADE$为等边三角形.

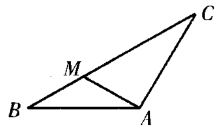
友情提醒　要证三角形是等边三角形，首先证明三角形是等腰三角形，再证明三角形中任一角为60°即可.

知识点七　直角三角形中30°的角所对的直角边的性质

在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

例7　如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，点M在BC上，$AM=BM$. 求证：$CM=2BM$.

解析　要证$CM=2BM$，可先证$CM=2AM$，由已知可得$\angle C=30°$，$\angle MAC=90°$，即可用上面的定理得$CM=2AM=2BM$.



证明　$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle BAC=120°$，

$\therefore \angle B=\angle C=(180°-120°)\div 2=30°$，

$\because AM=BM$，$\therefore \angle MAB=\angle B=30°$，

$\therefore \angle MAC=90°$.

$\therefore CM=2AM$.

$\therefore CM=2BM$.

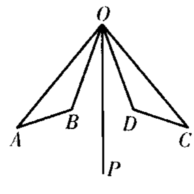
友情提醒　上面的定理可以用来计算线段的长度或证明一条线段的长是另一条线段长的一半或两倍.

B [illegible]

1. 全等三角形的判定和性质的应用

例1　如图，OP是$\angle AOC$和$\angle BOD$的平分线，$OA=OC$，$OB=OD$. 求证：$AB=CD$.

解析　由图可以发现AB、CD分别是$\triangle ABO$和$\triangle CDO$的边，要证$AB=CD$，可考虑证明$\triangle ABO\cong\triangle CDO$，利用“全等三角形对应边相等”的性质说明$AB=CD$，已知条件中有$OA=OC$、$OB=OD$，只需再说明$\angle AOB=\angle COD$，利用“SAS”可证明$\triangle ABO\cong\triangle CDO$.



证明　$\because OP$是$\angle AOC$和$\angle BOD$的平分线，

$\therefore \angle AOP=\angle COP$，$\angle BOP=\angle DOP$，

$\therefore \angle AOP-\angle BOP=\angle COP-\angle DOP$，即$\angle AOB=\angle COD$.

又$\because OA=OC$，$OB=OD$.

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle CDO$(SAS).

$\therefore AB=CD$.

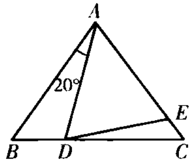
点评 (1)要证明两条线段相等,当这两条线段位于两个三角形中的时候,可考虑证明两个三角形全等,利用“全等三角形对应边相等”的性质得出结论.

(2)全等三角形的判定与性质经常结合在一起综合考查,体现了知识的联系性,这也是各地中考的必考内容之一.

2. 等腰三角形的性质的应用

(1)利用等边证明等角问题

例2 如图,$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle BAD=20^\circ$,且$AE=AD$,则$\angle CDE=$________.



解析 本题主要考查了等腰三角形的性质和三角形外角的性质.由$AB=AC$、$AE=AD$,根据等边对等角知$\angle B=\angle C$,$\angle ADE=\angle AED$,又$\angle ADC=\angle ADE+\angle EDC=\angle B+\angle BAD$,$\angle AED=\angle C+\angle EDC$,所以$\angle ADE=\angle AED=\angle C+\angle EDC=\angle B+\angle EDC$,则$\angle B+\angle EDC+\angle EDC=\angle B+\angle BAD$,所以$2\angle EDC=\angle BAD=20^\circ$,所以$\angle CDE=10^\circ$.

答案 10°

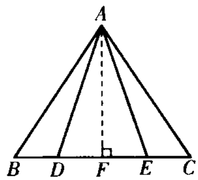
点评 本题中等量代换是解题关键.

(2)“三线合一”性质的应用

例3 如图,已知,$AB=AC$,D、E为线段BC上的点,且$AD=AE$.求证:$BD=CE$.

解析 图中有两个等腰三角形,$\triangle ABC$和$\triangle ADE$,底边DE与BC在同一直线上,所以我们可以运用等腰三角形“三线合一”的性质来证明.作高AF,则可知AF同时平分DE与BC,即可求得$BD=CE$.

证明 如图,作$AF\perp BC$,垂足为F,则$AF\perp DE$.



$\because AB=AC$,$AF\perp BC$,

$\therefore BF=CF$(等腰三角形“三线合一”).

又$\because AD=AE$,$AF\perp DE$,

$\therefore DF=EF$(等腰三角形“三线合一”).

$\therefore BF-DF=CF-EF$,即$BD=CE$.

点评 等腰三角形的底边中线、底边高、顶角的平分线“三线合一”,这个性质应用十分广泛,在遇到等腰三角形的问题时,尝试作这条辅助线,常常会有意想不到的效果.

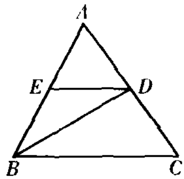
3. 等腰三角形判定的应用

(1)判定一个三角形是等腰三角形

例4 如图,BD 是$\triangle ABC$ 的角平分线,$DE // BC$ 交 AB 于点 E. 求证:$\triangle BED$ 是等腰三角形.

解析 首先,从“结论”出发,识别一个三角形是等腰三角形有两种方法:一是根据定义;二是根据“等角对等边”. 再看已知条件“角平分线”及“平行”都能提供角的条件,所以应选“等角对等边”. 最后,如何利用 $DE // BC$ 呢? 应结合求证的结论有针对性地选择$\angle EDB = \angle DBC$,而不是其他结论.

证明 $\because$ BD 是$\triangle ABC$ 的角平分线,



$\therefore$ $\angle EBD = \angle DBC$.

$\because$ $DE // BC$,

$\therefore$ $\angle EDB = \angle DBC$,

$\therefore$ $\angle EDB = \angle EBD$.

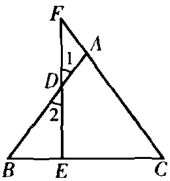
$\therefore$ $EB = ED$(等角对等边),

$\therefore$ $\triangle BED$ 是等腰三角形.

点评 判定等腰三角形的关键是根据已知条件选择合适的判定方法. 分析综合法是最常用的证题方法.

(2)利用等角证明等边问题

例5 已知:如图,在$\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,D 是 AB 上一点,过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E,并与 CA 的延长线相交于点 F. 求证:$AD = AF$.



解析 要证 $AD = AF$,需先证 $\angle 1 = \angle F$,而 $\angle 1 = \angle 2$,$\angle 2$ 在 $\triangle BDE$ 中,$\angle F$ 在 $\triangle FEC$ 中,因为 $DE \perp BC$,所以它们都是直角三角形,且 $\angle 2$ 与 $\angle F$ 的余角分别为 $\angle B$ 与 $\angle C$,由已知可得 $\angle B = \angle C$,因而结论成立.

证明 在$\triangle ABC$ 中,$\because$ $AB = AC$,

$\therefore$ $\angle B = \angle C$(等边对等角).

$\because$ $DE \perp BC$,$\therefore$ $\angle DEB = \angle DEC = 90°$(垂直定义).

$\therefore$ $\angle 2 + \angle B = 90°$,$\angle F + \angle C = 90°$(直角三角形两锐角互余).

$\therefore$ $\angle 2 = \angle F$(等角的余角相等).

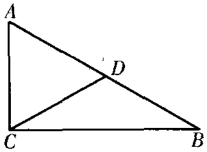
$\because$ $\angle 1 = \angle 2$,$\therefore$ $\angle 1 = \angle F$(等量代换).

∴ $AD=AF$(等角对等边).

点评 善于观察较为复杂的图形,正确使用条件是顺利解决本题的保证.本题容易出现的错误是不能根据图形准确使用 $DE\perp BC$ 这个条件证出 $\angle 2=\angle F$,从而进一步得出 $\angle 1=\angle F$、$AD=AF$.

4. 等边三角形的判定

例6 如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 是 AB 上一点,且 $AD=DC=DB$,$\angle B=30°$.求证:$\triangle ADC$ 是等边三角形.



解析 由已知条件知 $\triangle ADC$ 是等腰三角形,要想证明它是等边三角形,只需要说明这个三角形中有一个内角等于60°即可.

证明 ∵ $DC=DB$.

∴ $\angle B=\angle DCB=30°$(等边对等角).

∴ $\angle ADC=\angle DCB+\angle B=60°$(三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和).

又∵ $AD=DC$,

∴ $\triangle ADC$ 是等边三角形(有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形).

点评 要证明一个三角形是等边三角形,可以考虑:①利用定义证明;②证明三个角相等;③证明它是等腰三角形,并且有一个角是60°.

5. 线段的比值问题

例7 如图,已知 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,AD 是 $\angle CAB$ 的平分线,$DM\perp AB$ 于点 M,且 $AM=MB$.求证:$CD=\frac{1}{2}DB$.

解析 由题意,易得 $AD=BD$,故只要证 $CD=\frac{1}{2}AD$,为此,在 Rt$\triangle ACD$ 中,只要证 $\angle 1=30°$.

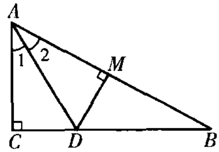
证明 ∵ $DM\perp AB$,

∴ $\angle DMA=\angle DMB=90°$.

在 $\triangle DMA$ 和 $\triangle DMB$ 中,

∵ $AM=MB$,$\angle DMA=\angle DMB$,$DM=DM$,

∴ $\triangle DMA\cong\triangle DMB$(SAS).



$\therefore DB=AD, \angle B=\angle 2.$

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$\therefore \angle 1=\angle 2.$

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle B.$

$\because \triangle ABC$ 为直角三角形, $\angle C=90^\circ$,

$\therefore \angle CAB+\angle B=90^\circ.$

即 $\angle 1+\angle 2+\angle B=90^\circ.$

$\therefore 3\angle 1=90^\circ, \angle 1=30^\circ.$

$\therefore CD=\frac{1}{2}AD.$

$\therefore CD=\frac{1}{2}DB$(等量代换).

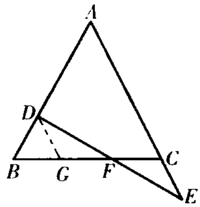
点评 求线段的长度或求一条线段是另一条线段的一半或两倍,常用到"30°的角所对的直角边是斜边的一半".

6. 巧添辅助线证题

例 8 如图,已知在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D、E分别是AB及AC延长线上的点,连接DE交BC于点F,若F是DE的中点.求证:$BD=CE$.

解析 如何利用好已知条件,把不同类三角形转化为同类三角形是解题的关键.

证明 证法一:如图①,过点D作$DG/\!/AC$,交BC于点G.



①

$\because DG/\!/AC$,

$\therefore \angle DGB=\angle ACB, \angle DGF=\angle ECF.$

$\because AB=AC, \therefore \angle B=\angle ACB, \therefore \angle B=\angle DGB.$

$\therefore DB=DG.$

$\because F$ 是 DE 的中点, $\therefore DF=EF.$

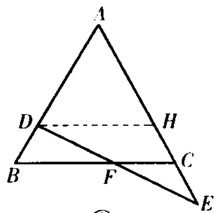
在$\triangle DFG$与$\triangle EFC$中,

$\because \angle DFG=\angle EFC, \angle DGF=\angle ECF, DF=EF,$

$\therefore \triangle DGF \cong \triangle ECF.$

$\therefore DG=CE. \therefore DB=CE.$

证法二:如图②,过点D作$DH/\!/BC$,交AC于点H.



②

$\because F$ 是 DE 的中点, $\therefore C$ 是 HE 的中点.

$\therefore CH=CE.$

$\because AB=AC, \therefore \angle ABC=\angle ACB.$

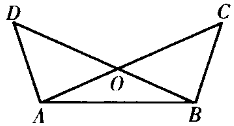
又$\because DH/\!/BC$, $\therefore$ 四边形$BDHC$是等腰梯形.

$\therefore DB=HC. \therefore DB=CE.$

点评 此例题的解题方法不止这两种，但这两种方法基本上指明了这类问题的解题规律，即当题目中存在线段中点时，可作为解题的出发点；如需移动点的位置时，可构造全等三角形或构造中位线.

7. 开放探究题

例 9 如图，$\angle BAC = \angle ABD$，请你添加一个条件：________，使 $OC = OD$（只添一个即可）.



解析 这是一个条件探究题，由题意知$\triangle OAB$是等腰三角形，$OA = OB$，要使$OC = OD$，可考虑添加条件$BD = AC$；也可考虑添加条件使$\triangle DAB \cong \triangle CBA$，从而得到$BD = AC$，这样也能得到$OC = OD$，按这种思路可添加条件$\angle DAB = \angle CBA$.

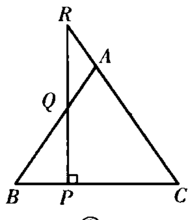
答案 $\angle C = \angle D$（或$\angle ABC = \angle BAD$或$AC = BD$或$\angle OAD = \angle OBC$，答案不唯一）

点评 （1）添加条件时要首先考虑运用了什么知识才得到后面已知的结论的.

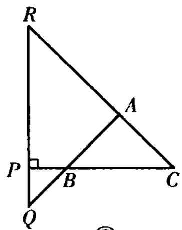
（2）开放性问题为中考的热点题型、必考题型，要加强这方面问题的训练.

例 10 （1）如图①所示，P是等腰$\triangle ABC$的底边BC上的一个动点，过点P作BC的垂线，交AB于点Q，交CA的延长线于R，观察AR与AQ，它们有什么关系？证明你的猜想；

（2）如果点P沿着底边BC所在直线，按由C向B的方向运动到CB的延长线上时，第（1）题中的结论还成立吗？请在图中完成图形，并给出证明.



①



②

解析 这是一道开放性试题，题中没有直接给出结论，而是让自己观察，猜想并证明，从而得到正确结论.

解 （1）$AR = AQ$. 证明如下：

$\because AB = AC$，$\therefore \angle B = \angle C$.

$\because RP \perp BC$，$\therefore \angle B + \angle BQP = \angle C + \angle CRP = 90°$.

$\therefore \angle BQP = \angle CRP$.