普通高等教育“十一五”国家级规划教材

应用高等数学

○主编　沈跃云 马怀远
○主审　高建宁

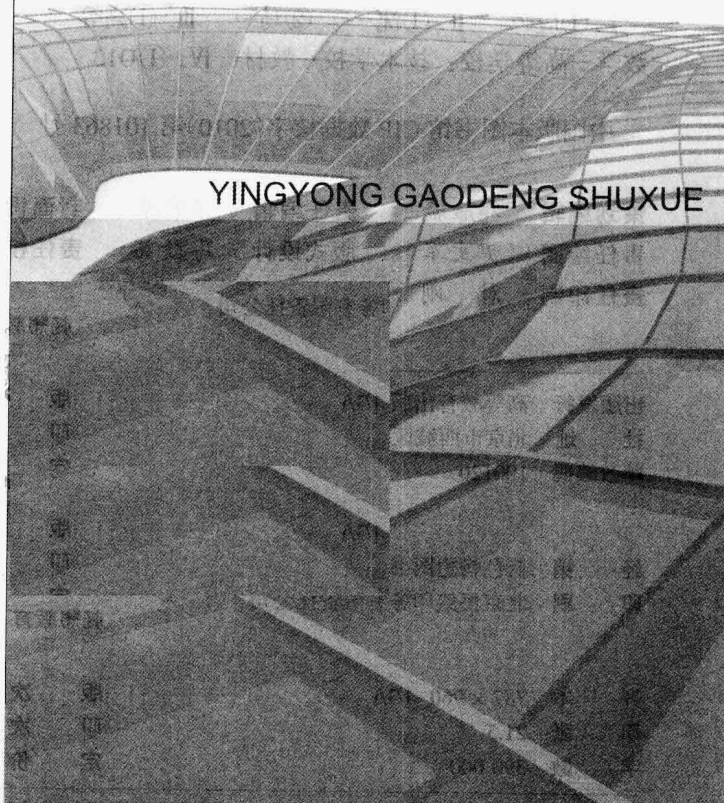
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

应用高等数学

○ 主编　沈跃云 马怀远

○ 主审　高建宁



YINGYONG GAODENG SHUXUE

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书按照高职教育的实际情况和人才培养的目标，从知识、能力、素质的三维空间来构建数学内容体系，用有限的课时着重培养学生的思维能力、应用能力、自学能力和创新能力，从而全面提高学生的数学素质。本书无论是教学内容，还是对课程考核方式的建议都有新颖的构想，具有思想性、科学性、趣味性、实用性、前瞻性和内容伸缩性，特色明显，有利于“教、学、做”一体化。

全书共六章，分别是函数极限与连续、导数与微分、积分、常微分方程、二元微积分、无穷级数。每章都由三部分组成，分别是基础知识部分、应用部分和总结·拓展部分。

本书适合作为高职高专院校、成人高校、继续教育学院和民办高校的高等数学教材，也可作为有关人员学习高等数学知识的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学/沈跃云，马怀远主编. —北京：高等教育出版社，2010. 7

ISBN 978-7-04-029619-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①沈… ②马… Ⅲ.①高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 101863 号

策划编辑	邓雁城	责任编辑	廖掌源	封面设计	王凌波
责任绘图	尹文军	版式设计	马敬茹	责任校对	杨雪莲
责任印制	韩　刚				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京民族印务有限责任公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010年7月第1版
印　　张	21.5	印　　次	2010年7月第1次印刷
字　　数	390 000	定　　价	29.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　29619-00

前　　言

高职院校人才培养目标是以就业为导向，面向产业和服务业第一线，培养具有丰富理论知识和较强动手能力的高级技术应用型人才。因此，很多学校为了增加实训课，将高等数学学时数进行了大量削减。但我们深知，高等数学对学生适应社会需求变化和可持续发展的能力提高所起的作用是其他任何课程无法替代的。在这样的形势下，我们大胆进行教材改革。按照普通高等教育“十一五”国家级规划教材建设的要求，在知识、能力、素质的三维空间构建数学内容体系，用有限的课时着重培养学生的思维能力、应用能力、自学能力和创新能力，从而全面提高学生的数学素质。

全书共六章，分别是函数极限与连续、导数与微分、积分、常微分方程、二元微积分、无穷级数。每章都由三部分组成，分别是基础知识部分、应用部分和总结·拓展部分。

本教材无论是教学内容，还是对课程考核方式的建议都有大胆的构想，特色明显，具有思想性、科学性、趣味性、实用性、前瞻性和内容伸缩性，有利于“教、学、做”一体化。

本教材主要特色如下：

1. 贯彻以应用为目的，以必需、够用为度的原则。本书对基础知识必学内容进行了合理的整合，同时省略了定理的严格证明。不求深，不求全，只求实用，注重与专业课接轨。体现“有所为，必须有所不为”，追求全书体系的整体优化(基础知识内容由有多年教学经验的教师编写)。

2. 注重数学文化和思想的渗透，在教材开篇和每章开头分别介绍了微积分发展简史和数学文化小故事等。

3. 增加了“想一想”环节，让学生能从思考中感受到微积分的魅力。

4. 介绍数学建模入门知识，引进流行并常用的最新版本 Matlab 数学软件，以提高学生利用计算机及数学软件技术求解高等数学问题及建立数学模型的能力(该部分内容由指导学生多次获得全国数学建模竞赛一等奖的教师编写)。

5. 例题、习题经过精心设计与编选，与概念、理论、方法的讲述完全配套。带“*”的习题是针对应用及拓展内容的习题，题量充足，不需要另配习题册就可以完全巩固所学知识，满足教学需要。

6. 总结·拓展部分留给教师选教和学生自主学习，很符合高职教学的理念。

7. 注重微积分在经济、工程中的应用，以期有力地提高学生的解题应用能力，同时通过案例带给学生一种时代感和亲近感。

8. 注重经济类专业和理工类专业对高等数学的不同需求，让教师可以随意地选择与专业需要匹配的内容进行教学。

9. 根据各部分内容的教学特征，可以选择多种考核方式，避免以往单一的闭卷考核定成绩的现象。

教学模式的建议：

内　　容	建议学时	教学模式	建议考核方式	适合专业
第一章　函数极限与连续 基础知识部分	10	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第二章　导数与微分 基础知识部分	8	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第三章　积分 基础知识部分	16	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第四章　常微分方程 基础知识部分	6	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第五章　二元微积分 基础知识部分	10	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第六章　无穷级数 基础知识部分	10	课堂教学	笔试	经济类 理工类
第一至六章 软件应用计算	3 小时	讲座	应用到论文中	经济类 理工类
第一至六章 经济应用	3 小时	讲座	论文	经济类
第一至六章 工程应用	3 小时	讲座	论文	理工类
第一至六章 总结·拓展部分	根据各学校 实际情况决定	自学或选学	不参与考核	经济类 理工类

考核方式的建议：

1. 采用基础考试和实践考试两种考核方式

基础考试范围是教材中的基础知识部分，考最基本的问题，考试题型与教材上的例题与习题相近，只要是认真学习的学生都能通过。这样可以促使学生养成认真读书的良好习惯，使学生具有较为扎实的基本功。实践考试范围是教

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

材中的应用部分，按照教师的两次讲座内容写一篇论文或报告，主要是考查学生应用数学知识解决实际问题的能力。

2. 考试时间

基础考试为90分钟，在期末进行. 实践考试方式为递交论文或报告，可以在平时进行。

3. 记分方法

基础考试总分为100分，考试成绩≥60分视为合格，考试成绩<60分视为不合格，基础考试不合格者必须参加补考(不论其实践考试的成绩怎样)；实践考试的总分为40分。

基础考试合格者的总分计算公式为

$$60+0.2(A-60)+0.8B,$$

其中A表示基础考试的分数，B表示实践考试的分数。如某位同学基础考试成绩为85分，实践考试成绩为30分，那么该同学的总分为$60+0.2\times(85-60)+0.8\times30=89$(分)。

本教材由沈跃云、马怀远担任主编，查进道、李继玲、熊建华、宋兵、冯晨担任副主编，国家级教学名师奖获得者高建宁教授担任主审。参加本教材编写、讨论、修改和定稿的还有王娟、孙永红、韩彦林、宋涟钟、韩鑫(排名不分先后)等。

本教材的编写得到了黑龙江人民出版社以及江苏经贸职业技术学院领导的理解和大力支持，在此深表感谢！

由于编者的水平所限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，还望专家、同行及广大读者批评指正。

编 者

2010年5月

目　　录

微积分发展简史

微积分是微分学(Differential Calculus)和积分学(Integral Calculus)的统称，英文简称 Calculus，意为计算. 这是因为早期微积分主要用于天文学、力学、几何学中的计算问题. 后来人们也将微积分称为分析学(Analysis)或无穷小分析，意指用无穷小或无穷大等极限过程分析处理计算问题.

微积分诞生于 17 世纪，是由牛顿(Newton)与莱布尼茨(Leibniz)在前人研究的基础上各自独立创立的. 微积分的产生是人类智慧的光辉结晶，是人类自然科学史上最重大的事件之一，是开启近代文明的钥匙，对当时自然科学的各个领域，如力学、天文学、物理学以及数学本身的发展，产生了空前巨大的推动作用，充分显示了数学的发展对人类文明的影响.

虽然直到 17 世纪，微积分才真正创立，但微积分的萌芽和发展酝酿却是从公元前就开始了.

早在公元前 4 世纪前后，古希腊时期的数学家就已经初步有了极限的思想，如欧多克斯(Eudoxus)、阿基米德(Archimedes)的著作中都有一些关于“无限”的思想和研究. 同时期，我国也产生了“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的极限观念. 公元 3 世纪刘徽的“割圆术”以及公元 5—6 世纪祖冲之、祖暅对圆周率、面积和体积的研究，也应用了极限的思想方法.

到了 16 世纪至 17 世纪上半叶，随着科学技术的发展和对数学研究的深入，一些长期未能解决的数学问题的研究促进了微积分的发展. 一批杰出数学家从几何等各个角度为微积分的正式诞生奠定了基础，如开普勒(Kepler)、帕斯卡(Pascal)、费马(Fermat)、巴罗(Barrow)等. 但他们的工作仍然没能全面、完整地解决微积分的一些基本问题.

与此同时，随着天文学、力学、航海、机械以及解析几何等许多新兴科学的巨大发展，一大批迫切需要解决的力学和数学问题摆在数学家面前. 例如，已知物体的移动距离为 $s=s(t)$(t 为移动的时间)，如何求瞬时速度；如何求已知曲线上某一点的切线；如何求曲线围成的平面图形的面积等.

正是在这个背景下，17 世纪下半叶，微积分应运而生.

牛顿作为那个时代的科学巨人，对力学、天文学、数学、光学都作出了卓越的贡献. 他从力学的研究出发，发现了微积分的一般计算方法，确立了微分与积分的逆运算关系(微积分基本定理)，他在其划时代巨著《自然哲学之数

学原理》中首次发表了这些成果，他把微积分称为“流数术”.

莱布尼茨也是同时代的杰出数学家，同时也是杰出的哲学家.他主要从几何角度出发研究了微积分的基本问题，确立了微分与积分之间的互逆关系.莱布尼茨创设了便利的记号“dx”，“∫”，沿用至今.

微积分诞生以后，尽管将其应用于科学技术取得了许多辉煌的成就，微积分本身也在迅速地发展完善，这一时期的大数学家，如欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯(Laplace)、勒让德(Legendre)、达朗贝尔(d'Alembert)、傅里叶(Fourier)等都为此作出过巨大贡献，但同时微积分也不断暴露出问题和不足，特别是微积分并没有建立在严格的极限理论基础上.牛顿、莱布尼茨是用不甚严密的方法建立起微积分理论的，微积分的发展历史并不是如我们今天学习的顺序一样——先有极限理论，再有导数概念、积分概念.尽管很多数学家对弥补其缺陷作出了努力，但收效甚微.

直到 19 世纪后，在波尔察诺(Bolzano)、阿贝尔(Abel)，特别是柯西(Cauchy)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass)、戴德金(Dedekind)等数学大师的努力下，微积分的极限基础才得以建立.1821 年，柯西以无穷小作为基本工具比较明确地给出了极限的概念，这也就是本书所采用的极限概念.但这仅仅是一种描述性定义，严格的极限定义直到 1856 年才出现.

微积分发展到今天已远远超越了当初的面貌，以微积分为基础而发展起来的许多数学学科，如微分方程、积分方程、复变函数、实变函数、微分几何等，不仅日渐成熟，而且在实践中获得了广泛的应用，成为数学大厦中的重要组成部分.微积分的思想方法也深深地印刻在数学发展的历史上，成为人类文化的重要组成部分.

牛顿和莱布尼茨的时代与我国清朝的康熙年间相当，但中国直到 1895 年才有了第一本微积分著作的中译本，是由晚清杰出的数学家李善兰与传教士伟烈亚力合译的.这本书上首次出现了微分、积分等名词.五四运动以后，微积分作为大学课程普遍开设，我国的现代数学迎来全面发展的时期.新中国成立以后，微积分更加普及，研究水平也不断提高，在若干项目上，已居世界领先地位.时至今日，微积分已成为普通高校的必修课程，并进入了中学的课堂.

微积分，作为人类文明的宝贵财富，已经并继续深刻影响着我们的生活.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　函数极限与连续

数学文化小故事之一

——我国古代数学家的故事

“无穷”作为一个极富迷人魅力的概念，长久以来就深深激励着人们的心灵．彻底弄清这一概念的实质成为维护人类智力尊严的一种需要．远在两千多年以前，人们就已经产生了对无穷的萌芽认识．

著名的《庄子》一书中有言：“一尺之棰，日取其半，万世不竭．”从中就可体现出我国早期对无穷的认识水平．我国人民很早就创造性地将无穷思想运用到数学中，运用相当自如的是魏晋时期著名数学家刘徽．他提出用增加圆内接正多边形边数的方法来逼近圆的“割圆术”，并阐述道：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．”可见刘徽对无穷的认识已相当深刻．正是以“割圆术”为理论基础，刘徽得出“徽率”，而其后继者祖冲之更是得出了圆周率介于3.141 592 6与3.141 592 7之间的领先国外上千年的惊人成果．

祖冲之(429—500)是我国南北朝时期范阳郡道县(今属河北保定)人．他从小就阅读了许多天文、数学方面的书籍，勤奋好学，刻苦实践，终于成为杰出的数学家、天文学家．下面把他在圆周率方面的研究过程编成故事，与大家共勉．

夜很深了，桌上的油灯已经加了两次油．书桌上堆放着已经看完的《周髀算经》竹简和张衡的《灵宪》竹简，祖冲之正在翻阅刘徽给《九章算术》作的注解，他被刘徽在深入学习古人成果、广泛实践的基础上，用高度的抽象概括力建立的“割圆术”与极限观念所折服，不禁拍案而起，连连称赞：“真了不起!”在一边专心致志看书的儿子被这突如其来的声音所震动，忙问：“爸，谁了不起?”“我说刘徽了不起．”祖冲之的眼睛仍然停留在竹简上．“刘徽是谁?”当时只有十一二岁的孩子还不知道刘徽是个什么样的人．“三国时代的科学家．”“他有什么地方了不起呢?”“他用极限观念建立了‘割圆术’．”

“割圆术?”他茫然地望着父亲.“计算圆面积、圆柱的体积和球的体积都要用圆周率，原来似乎没有科学的方法，可是刘徽提出了割圆术，找到了完善的算法，你看!”祖冲之指着手里拿着的竹简，滔滔不绝地给儿子讲着.“刘徽提出，在圆内作一个正六边形，每边和半径相等.然后把六边所对的六段弧线一一平分，作出一个正十二边形，这个正十二边形的边长总和比正六边形的边长总和要大，比较接近圆周，但仍比圆周短.刘徽认为，用同样方法，作出正二十四边形，边长总和又增加了，更接近圆周.这样一直把圆周分割下去，割得越细，和圆周相差就越少，割而又割，直到不可再割的时候，这个正无限边形就和圆周密合为一，完全相等了.刘徽用割圆术计算了正六边形、正十二边形、正二十四边形、正四十八边形，一直到正九十六边形的边长之和，得出圆周是直径的3.14倍的结果.”祖冲之把刘徽计算圆周率的“割圆术”讲给儿子听，他虽然似懂非懂，但产生了无限的兴趣.“刘徽真了不起!真行!”祖冲之听着孩子的话，沉思片刻说:“我告诉你吧，刘徽算出的圆周率，其实他自己也不满意.他声明，实际的圆周率应该比3.14稍大.如果他继续‘割而又割’地割下去，就会算得更精确.”“那我们来继续‘割而又割’，行吗?”儿子问了一句.“行呀，我们可以算出更精确的圆周率!这就需要我们付出更为艰辛的劳动!”这一夜，父子俩久久未能入睡.枯燥无味的数学，却引起了儿子无限的兴趣和丰富的幻想.祖冲之则盘算着如何尽可能地消化前人智慧的全部成果，开拓数学研究的新路.

公元461年，一个叫刘子鸾的皇族被任命为南徐州刺史，祖冲之也被调离“华林学省”这个研究学术的机关，派在刘子鸾手下做一个小官.祖冲之虽然离开了华林学省，又承担了繁杂琐碎的行政工作，但他勤奋好学的习惯并没有随着环境变化而有所改变，他始终没有放松对科学技术的钻研.每天早上都得去衙门办事，下午一回来，就一头钻进了书房，有时甚至忘了吃晚饭，忘了休息.年幼的儿子被父亲这种孜孜不倦、废寝忘食的刻苦攻关精神所感动.

一天，祖冲之早上去衙门办完杂事，就匆匆赶回了家，在书房的地板上画了一个直径一丈的大圆，运用“割圆术”的计算方法，在圆内先作了一个正六边形，他的工作就这样开始了.日复一日，不论是酷暑，还是严寒，不间断地辛勤地计算着……祖冲之为了求出最精密的圆周率，对九位数进行包括加减乘除及开方在内的130次以上的运算.在当时，既没有电子计算机，也没有算盘，只靠一些被称为“数筹”的小竹棍，摆成纵横不同的形状，用来表示各种数目，然后进行复杂的计算，这不仅需要掌握纯熟的技巧，更需要具备踏踏实实、一丝不苟的严谨态度.祖冲之为了求出最精密的圆周率，逐次以圆内接正六边形、正十二边形、正二十四边形、正四十八边形、正九十六边形……的边长之和作为圆周长，计算其与直径的比值，一直割圆到正24 576边形，这时

边已经和圆周紧贴在一起，不能再割了，于是他算出：正 12 288 边形边长之和为 3. 141 592 51 丈，正 24 576 边形边长之和为 3. 141 592 61 丈.

祖冲之经过艰苦的计算，终于得出圆周率介于 3. 141 592 6 与 3. 141 592 7 之间的结论，用现代数学符号写出，就是 $3.1415926<\pi<3.1415927$. 功夫不负有心人，祖冲之求出的圆周率，精确到小数点后七位，这在当时，全世界只有他一人能做到. 祖冲之为世界数学史和文明史作出的这一伟大贡献，是我们中华民族的骄傲！

基础知识部分

我们先来看一个银行连续复利的计算问题.

设银行某种定期储蓄的年利率是 r，本金是 1 万元，按年计算复利，那么 10 年后，本金与利息合计值应为 $A_{10}=(1+r)^{10}$万元；

若改为每半年计息一次，则每半年的利率应是$\frac{r}{2}$，共计息 20 次，10 年后的本利和为 $A'_{10}=\left(1+\frac{r}{2}\right)^{20}$万元；

若改为每月计息一次，则每月的利率应是$\frac{r}{12}$，共计息 120 次，10 年后的本利和为 $A''_{10}=\left(1+\frac{r}{12}\right)^{120}$万元；

……

过去曾有外国银行为吸引储户，宣称采用连续复利，即瞬时复利，每时每刻都计利息，那么在这种储蓄方式下 10 年后的本利和为多少？储户是否因此发财？

我们假设每年计息 n 次，则每次计息的利率为$\frac{r}{n}$，共计息 $10n$ 次，故 10 年后的本利和为 $A'''_{10}=\left(1+\frac{r}{n}\right)^{10n}$万元. 如果计算瞬时复利，就是 n 的取值应该很大很大乃至无限大，这时 A'''_{10}的值会是多少呢？还是一个确定的数吗？会不会无限变大导致储户发财而银行倒闭？

这是一个初等数学无法解决的问题，实际上是本利和$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{10n}$在 n 无限增大时（记作 $n\to\infty$）的极限问题，我们将在本章 § 1.7 中给出更一般情况的解答.

现实世界中的很多自然规律、社会现象、经济问题都需要用极限来描述和解决. 微积分正是利用极限工具研究实际问题的科学方法和理论. 微积分的两

类基本问题，一类如变速直线运动的瞬时速度问题、平面曲线的切线问题（详见§2.1），一类如曲线围成的平面图形的面积问题（详见§3.5），最终都归结为极限问题. 因此，极限知识是微积分的基础，极限是研究微积分的主要工具. 同时，极限也是一种研究问题的思想方法，在形成科学的思维方式上起着独特的作用. 在中学阶段同学们已经有了数列极限、函数极限的初步概念，但这些知识对于我们进一步学习微积分来说还远远不够. 微积分的研究对象是函数，而极限是打开微积分大门的钥匙. 因此，我们将在中学有关函数知识的基础上进一步学习函数极限的知识，为后面几章的学习打好基础.

§1.1 初等函数

函数是中学阶段、特别是高中阶段数学的重要学习内容. 这里将中学阶段的函数知识作一简要总结，并补充一些必需的内容，为进一步学习打下基础. 本节最后将给出初等函数的概念，并举一些有用的函数的例子.

一、函数的概念

1. 函数的定义

函数是从量的角度对运动变化的抽象描述，是一种刻画运动变化中变量相依关系的数学模型.

定义 1.1 设有两个变量 x 与 y，如果对于变量 x 在实数集合 D 内的每一个值，变量 y 按照一定的法则都有唯一的值与之对应，那么就称 x 是**自变量**，y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，其中自变量 x 取值的集合 D 叫做函数的**定义域**，函数值的集合叫做函数的**值域**.

“函数”一词，最早见于德国数学家莱布尼茨的著作. 函数概念的形成经历了长期和曲折的过程，现代意义上的函数概念是由德国数学家狄利克雷在19世纪给出的，而函数记号 $y=f(x)$ 则是由瑞士大数学家欧拉首先使用的.

函数也可以用映射来定义，这里就不叙述了.

函数的实质是指明了某个变化过程中两个变量具有的特殊关系. 函数概念的提出是数学发展的重要转折点，数学因此由对常量的研究深入到对变量的研究. 恩格斯对此高度评价：数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了. 这里说的“变数”即变量.

2. 函数的表示方法

常用的函数表示方法有三种：

(1) **解析法**

即用解析式(或称数学式)表示函数. 如 $y=2x+1$, $y=|x|$, $y=\lg(x+1)$, $y=\sin 3x$ 等.

(2) **列表法**

即用表格形式给出两个变量之间函数关系的方法. 如汽车站的票价表, 其中运输里程是自变量, 票价是函数. 又如数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表等, 也是用列表法来表示函数关系的.

(3) **图像法**

即用图像来表示函数关系的方法. 这在中学里已经很熟悉了, 我们经常通过某个函数的图像来研究其性质. 日常生活中见到的某地某天的气温随时间变化的曲线, 也是用图像来表示函数关系的.

这三种表示方法各有特点, 如图像法非常形象直观, 能从图像上看出函数的某些特性; 列表法则便于查得某一处的函数值; 解析法便于对函数进行精确的计算和深入的分析.

用解析法表示函数时, 除了很常见的如 $y=3x+2$ 这样最简单的形式外, 还有一些特殊的形式:

分段函数——即当自变量取不同值时, 函数的表达式不一样, 如

$$y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ -2x-1, & x<0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

等.

隐函数——相对于显函数而言的一种函数形式. 所谓显函数, 即直接用含自变量的式子表示的函数, 如 $y=x^2+2x+3$, 这是最常见的函数形式. 而隐函数是指变量 x, y 之间的函数关系是由一个含 x, y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的, 如 $2x+y-3=0$, $e^{x+y}-x-y=0$ 等. 而由 $2x+y-3=0$ 可得 $y=3-2x$, 即该隐函数可化为显函数.

想一想: 所有的隐函数都能化为显函数吗?

例如 $e^{2x}-e^{y}+x-y=0$ 就不能化为显函数. 这说明, 隐函数是函数表达中不可缺少的一种形式.

参数式函数——若变量 x, y 之间的函数关系是通过参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t\in T)$ 给出的, 这样的函数称为由参数方程确定的函数, 简称参数式函数, t 称为参数. 例如, 炮弹发射后运动曲线的函数, 可写成 $\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha,\\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}$ 其中 α 为

发射角，v_0 为炮弹的初速度.

3. 反函数

定义 1.2 如果在已给的函数 $y=f(x)$ 中，把 y 看作自变量，x 也是 y 的函数，则所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$ 或 $y=f^{-1}(x)$（以 x 表示自变量）.

其实，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数. 互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如，$y=2x$ 与 $y=\frac{1}{2}x$ 互为反函数，$y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 互为反函数.

注：并非每个函数都存在反函数. 例如函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$ 就没有反函数，因为若以 y 为自变量，所对应的 x 值不止一个（$y\neq 0$ 时），不符合函数的定义，因此这里 x 不是 y 的函数.

二、函数的常见性质

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

1. 单调性

定义 1.3 设 x_1，x_2 是定义域 D 内某个区间 I 上的任意两个自变量的值，若 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的. 若 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

在区间 I 上单调增加或单调减少的函数称为区间 I 上的**单调函数**，区间 I 称为函数的**单调区间**.

在单调区间上增函数的图像是上升的，减函数的图像是下降的.

例如，$y=2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

2. 奇偶性

定义 1.4 设 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如 $y=\sin x$，$y=x^3+x$ 是奇函数，$y=|x|$，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=2x+1$，$y=x^3(x\in\mathbf{R}^+)$ 是非奇非偶函数.

3. 周期性

定义 1.5 若存在一个不为零的常数 T，对任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的**周期**. 当周期函数存在最小正周期时，通常所说的周期指的是最小正周期.

周期函数的图像每间隔一段（一个周期）是重复出现的. 例如，$y=\sin x$ 的

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com