离散数学

LISAN SHUXUE

李世群 马千里 主编

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

x

y

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

离 散 数 学

主　编　李世群　马千里
主　审　刘金旺

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是参照国内外多种同类教材，结合多年的教学实践编写而成的. 全书共分 12 章，包括了数理逻辑、集合论、代数系统和图论的基础知识四大部分.

本书叙述详细，难点分散，推演严密，深入浅出. 本书既有严谨的、系统的理论阐述，也有丰富的具有代表性和启发性的例题和习题. 各章内容按模块化组织以适应不同的教学要求.

本书可作为高等院校各理工科专业的离散数学教学用书，也可作为考研、自学人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/李世群，马千里主编. —天津：天津大学出版社，2010. 8

ISBN 978-7-5618-3510-4

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①李…②马… Ⅲ. ①离散数学 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 145799 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
网　　址 www. tjup. com
印　　刷 天津泰宇印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm × 260mm
印　　张 18
字　　数 450 千
版　　次 2010 年 8 月第 1 版
印　　次 2010 年 8 月第 1 次
印　　数 1 – 3 000
定　　价 29. 80 元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支,是研究离散量的结构及相互关系的学科.它是随着计算机的发展而逐步建立的,它形成于20世纪70年代初期.当前,人类社会从农业经济、工业经济进入知识经济和信息化时代,人们越来越多地依赖计算机进行信息处理,而离散数学则是计算机科学和电子信息科学专业的基础课程和核心课程,也成为其他许多理工科专业的基础课程.随着我国现代化建设的飞速发展,越来越多的专业需要离散数学的基础理论和基本思想方法,因此,开设离散数学课程的专业也越来越多,甚至许多文科专业也要学习离散数学中的部分内容.除了以上所说的专业学习的需要外,离散数学中思考问题和处理问题的方法在我们日常生活中也处处有用.

当前,随着教学改革越来越深入;我们讨论更多的是,在教学生知识的同时,如何培养学生的自主学习能力,应用知识和解决实际问题的能力,提高他们的数学素养,以适应新时代的高素质人才的需要.而离散数学具有内容丰富、趣味性强、应用性广、处理方法独特的特点,一部好的离散数学教材无疑是完成上面目标的基础.本教材就是遵循这一目标,且在总结多年教学经验的基础上编写而成。

本教材具有如下几个特点:

(1)难点问题从具体模型引入,这样便于学生接受;

(2)淡化抽象的概念及定理的证明,增加一些具体实例,便于学生自学;

(3)选取一些具趣味性的例题和习题,提高学生的学习兴趣;

(4)将矩阵基础知识的介绍作为本教材的一节,便于没有学习“线性代数”课程的学生学习本课程;

(5)除了每节后面附有练习题外,还配有综合自测题,便于学生复习巩固和进行自我检测,书末附有答案和提示,以便学生检查练习效果.

本教材由李世群、马千里主编,参加编写的人员还有刘光辉、陈署波、吴毅清、周勇,并由刘金旺教授主审.

由于离散数学的特点,全书内容虽然分成若干章,但各章也可以独立,考虑到教学学时和选修课程的安排,“矩阵的定义及运算”这一节对于已经学习过“线性代数”课程的学生,可以不讲.

本书既可以作为计算机及其他所有理工科专业本科生“离散数学”课程的教材，也可以作为考研学生的辅导教材，同时适合于从事计算机软硬件开发和计算机应用的科技人员使用.

最后，我们诚恳欢迎广大读者对本书的批评和指正.

编者

2010 年 8 月

目　　录

第 1 章　命题逻辑

逻辑学是研究思维规律和思维形式结构的一门科学. 它分为辩证逻辑与形式逻辑两种，前者是哲学所要研究的重要内容，而后者是计算机科学的重要基础.

数理逻辑是用数学的方法研究逻辑学中形式逻辑的一个分支学科. 这里的数学方法的主要特点是引进了一套符号体系作为重要的研究手段，因此数理逻辑又称为符号逻辑.

数理逻辑的基本内容分为命题逻辑和谓词逻辑两部分，本章与第 2 章介绍命题逻辑，第 3 章介绍谓词逻辑.

命题逻辑研究的对象是命题，其主要内容为命题的演算，所以命题逻辑又称为命题演算，它是逻辑演算中最简单、最基本的部分.

1.1　命题与联结词

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提与结论都是表达判断的陈述句. 命题逻辑中将陈述句中的肯定或否定分别用逻辑值"真"或"假"(英文 true 或 false，简记为 T 或 F)来表达，统称为真值.

定义 1.1　在数理逻辑中，命题(proposition)是能区分真假，有唯一真值的陈述句.

从这个定义可以看出命题有两层含义. ①命题是陈述句. 其他的语句，如疑问句、祈使句、感叹句均不是命题. ②这个陈述句表述的内容可以分辨真假，而且不是真就是假，不能不真也不假，也不能既真又假，即有唯一的真值.

凡是与事实相符的陈述句称为真命题，而且说它的真值为真，记作"1". 而与事实不符合的陈述句称为假命题，且说它的真值为假，记作"0".

例 1.1　判断下列语句是否为命题，并指出其真值.

(1)雪是白色的.

(2)5 可以被 2 整除.

(3)$2+2=5$.

(4)请安静!

(5)明下午有会吗?

(6)这个小男孩多勇敢啊!

(7)地球外的星球上存在生物.

(8)明年元旦是晴天.

(9)$x+y>5$.

(10)我正在说谎.

解　(1),(2),(3),(7),(8)是命题，其中(1)是真命题，(2),(3)是假命题. 值得注意的是，像 $2+2=5$ 这样的数学等式也是一个命题，事实上，一个完整的数学等式与一个完整的陈述句并没有什么本质的差异. (4)是祈使句，(5)是疑问句，(6)是感叹句，因而这 3 个句子都不

是命题.对于(7)命题,虽然目前我们无法确定其真值,但它的真值客观存在,而且是唯一的,随着科技的发展,不久的将来就会知道其真值.(8)的真值现在虽然还不知道,但到了明年元旦就知道了,因此它的真值也是唯一的.(9)不是命题,因为它没有确定的真值,当 $x=2,y=5$ 时,$2+5>5$ 正确;而当 $x=1,y=3$ 时,$1+3>5$ 不正确.(10)不是命题,因为若(10)的真值为真,即“我正在说谎”为真,则(10)的真值应为假;反之,若(10)的真值为假,即“我正在说谎”为假,也就是“我正在说真话”为真,则又推出(10)的真值应为真.可见(10)的真值无法确定,它显然不是命题,像(10)这样由真推出假,又由假推出真的语句叫悖论,悖论都不是命题.

这里需要强调的是:一个语句是否是命题,在于它本身是否存在唯一的真值,但这并不代表我们现在能判定它的真值,如“明年5月1日北京有雨”是命题,虽然我们今天还无法知道它的真假,但到了明年5月1日就知道了.

容易看出,例1.1中给出的命题都不能再进一步分解了,类似这种不能再分的命题,称为原子命题(atomic proposition)或简单命题.原子命题是命题逻辑中最基本、最小的单位.由简单命题通过联结词联结而成的命题,称为复合命题(compoud proposition).本书中用小写英文字母的 $p,q,r,\cdots$ 或带下标的 $p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示命题,将表示命题的符号放在该命题的前面,称为命题的符号化.例如:

p: 2是素数.

q: $2+2=5$.

例1.2 判断下面哪些是复合命题,哪些是原子命题:

(1)林刚和林强是三好学生;

(2)林刚和林强是朋友;

(3)如果 $3+2<4$,那么太阳从西边出来.

解 其中(1),(3)是复合命题,(2)是原子命题.

特别指出,在数理逻辑中,一些互不相干的命题可以通过联结词组成复合命题,这是与日常语言不同的地方,如例1.2中的(3).

复合命题是用自然语言中的联结词联结简单命题而成的,而自然语言中常用的联结词有不精确性.如“明天早餐我们吃米粉或面包”,“派张三或李四中的一人去开会”,这里的“或”,有时表示相容性或,有时表示排斥性或,可是在数理逻辑中不允许联结词的这种二义性的存在,因此对联结词必须给出精确的定义.另外,为了书写和推演的方便,我们还需要对自然语言中的各种联结词用符号表示,以便得到复合命题的形式.在数理逻辑中,我们将这种自然语言联结词的形式符号称为命题逻辑联结词(logical connective).

定义1.2 设 p 是命题,复合命题“非 p”称为 p 的否定式,记作 $\neg p$,称符号 $\neg$ 为否定联结词.规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

为了更好地理解联结词所代表的含义,引入一种表格——真值表(truth table),如表1.1所示就是否定联结词的真值表.

表1.1 $\neg p$ 的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

例 1.3　求下列命题的否定式：

(1) p：3 是偶数；

(2) q：所有的大学生会讲英语.

解　(1) $\neg p$：3 不是偶数，或者：并非 3 是偶数.

(2) $\neg q$：并非所有的大学生会讲英语.

上例的 $\neg p$，虽然否定式的两个汉语表示形式并不完全一致，但它们有完全一样的真值，故形式语言中都用"$\neg p$"表示，说明符号表示可以避免多样化和二义性.

定义 1.3　设 p，q 都是命题，复合命题"p 并且 q"称为 p 与 q 的合取式，记作 $p\wedge q$，称符号 $\wedge$ 为合取联结词. 并规定 $p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真. 合取联结词的真值表如表 1.2 所示.

表 1.2　$p\wedge q$ 的真值表

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如，设 p:2 是素数，q:2 是偶数，则"2 是素数并且是偶数"可用符号化为 $p\wedge q$. 由于 p，q 真值均为 1，故 $p\wedge q$ 真值为 1.

例 1.4　构造以下两原子命题的合取.

(1) p：股市下跌了，q：孩子睡着了.

(2) r：情有可原，s：理无可恕.

解　(1) $p\wedge q$：股市下跌了且孩子睡着了.

(2) $r\wedge s$：情有可原，理无可恕.

在日常生活中，像(1)这样两个语义无关的语句联结在一起听起来很可笑，但它完全符合逻辑上的语法规则，这也反映形式语言与所论述的具体内容和我们自身的感受无关.(2)在自然语言环境中，"情有可原，理无可恕"，"理无可恕，情有可原"是有差异的，但在形式语言中它们有完全一样的真值，都用 $r\wedge s$ 表示，这也说明符号表示可以避免二义性.

p 与 q 的合取表达式的逻辑关系是 p 与 q 两个命题同时成立，因而，自然语言中常用的联结词"既 …又…"，"不仅…而且…"，"虽然…但是…"等，都可以符号化为 $\wedge$，见下面的例子.

例 1.5　将下列命题符号化：

(1)李平既聪明又用功；

(2)李平虽然聪明，但不用功；

(3)李平不但聪明，而且用功；

(4)李平不是不聪明，而是不用功.

解　p：李平聪明，q：李平用功.

(1) $p\wedge q$，(2) $p\wedge(\neg q)$，(3) $p\wedge q$，(4) $(p)\wedge(\neg q)$.

不能一见到"和"、"与"就用连接词 $\wedge$. 例如，李文与李武是兄弟，王芳和陈兰是好朋友，都

是简单命题而不是复合命题.

定义 1.4 设p,q都是命题,复合命题"p或者q"称为p与q的析取式,记作$p \vee q$,称符号$\vee$为析取联结词. 并规定$p \vee q$为真当且仅当p与q中至少有一个为真. 析取联结词的真值表如表 1.3 所示.

表 1.3 $p \vee q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

析取式$p \vee q$是具有相容性(可兼)或,即允许p,q同时为真. 例如,设p表示"王燕学过英语",q表示"王燕学过法语". 则"王燕学过英语或法语"可用符号表示为$p \vee q$. 当且仅当p为真,q为真,p,q同时为真,$p \vee q$为真.

自然语言中的"或"具有二义性,有时具有相容性,有时具有排斥性(不可兼). 对应的分别称为相容或和排斥或,排斥或是指p和q之中恰好有一个成立的情形. 例如,"派小王或小李中的一人去开会",就不能符号化为$p \vee q$的形式. 因为这里的"或"是排斥或,但可以借助联结词$\neg$,$\wedge$,$\vee$共同来表达,即符号化为$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$的形式或$(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$的形式.

有些自然语句中的"或"不能当联结词看待,如"我们班有 2 名或 3 名党员".

定义 1.5 设p,q都是命题,复合命题"如果p,那么q"称为p与q的蕴涵式,记作$p \to q$,其中p为蕴涵式前件,q为蕴涵式后件,称符号$\to$为蕴涵联结词. 并规定$p \to q$为假当且仅当p为真且q为假. 蕴涵联结词的真值表如表 1.4 所示.

表 1.4 $p \to q$ 的真值表

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例如,设p表示"我是老师",q表示"我年龄大了". 则"如果我是老师,那么我年龄大了"可用符号表示为$p \to q$.

$p \to q$表示的基本逻辑关系为:q是p的必要条件,或p是q的充分条件. 自然语言中,表示p是q充分条件的联结形式有"如果p,那么q","倘若p,则q","因为p,所以q","要是p,就q"等等.

$q \to p$表示p是q的必要条件,其联结形式主要有"只有p才q","除非p不q","除非p才q","不p则不q"等等.

在自然语言中,"如果p,那么q"中,p与q往往有内在的联系,但在数理逻辑"$p \to q$"中,p与q不一定有内在联系. 例如,p:年满十八岁,q:他有选举权,那么"只有年满十八岁,他才有选

举权”,可表示为“$q \to p$”. 若 p:2 + 2 = 4,q:他有选举权,那么“只有 2 + 2 = 4,他才有选举权”,同样可表示为 $q \to p$.

定义 1.6 设 p 和 q 都是命题,复合命题“p 当且仅当 q”称作 p 与 q 的等价式,记作 $p \leftrightarrow q$,称符号 $\leftrightarrow$ 为等价联结词. 规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p,q 真值相同. 等价联结词的真值表如表 1.5 所示.

表 1.5 $p \to q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如,设 p 表示“两圆的面积相等”,q 表示“两圆的半径相等”. 则“两圆的面积相等当且仅当其半径相等”可用符号表示为 $p \leftrightarrow q$.

以上介绍的 5 种常用的联结词也称真值联结词或逻辑联结词. 为了叙述方便,我们把用符号表示命题及其联结词的过程称为命题的符号化(proporsitional signify). 在命题逻辑中,可用上述 5 种联结词将所有命题符号化,基本步骤如下:

(1)分析出各简单命题,将它们符号化;

(2)使用合适的联结词,把简单命题逐个联结起来,组成命题的符号化形式.

例 1.6 将下列命题符号化.

(1) 离散数学并非难学的一门课程.

(2) 明天我可能看电影也可能逛公园.

(3) 尽管他有病,但他仍坚持工作.

(4) 倘若他病了,他就不参加这次会议.

(5) 如果我上街,我就去书店看看,除非我很累.

解 (1) 设 p: 离散数学是难学的一门课程. 则命题符号化为 $\neg p$. 其中“…并非…”逻辑含义上表示否定.

(2) 设 p: 明天我看电影,q: 明天我逛公园. 则命题符号化为 $p \vee q$. 其中“…可能…也可能…”在逻辑上具有或的含义.

(3) 设 p: 他有病,q: 他坚持工作. 则命题符号化为 $p \wedge q$. 其中“尽管…但…”在逻辑上具有合取的含义.

(4) 设 p: 他病了,q: 他不参加这次会议. 则命题符号化为 $p \to q$. 其中“倘若…就…”在逻辑上具有蕴涵的含义.

(5)设 p:我上街, q:我去书店看看,r:我很累. “除非”相当于“如果不…”的意思,因而 $\neg r$ 可看成 $p \to q$ 的前件,从而符号化为 $\neg r \to (p \to q)$. 其实,此命题也可叙述为“如果我不累并且我上街,那么我就去书店看看. ”因而也可符号化为 $(\neg r \wedge p) \to q$.

1.2 合式公式

“$x + y > 5$”是陈述句,但由于 x,y 的值不确定,使得整个语句没有确定的真值,故其不是命

题. 但是,若给定 x,y 的一组确定的值,其真值也就确定了.

我们把这种本身没有确定的真值,但给其赋予一定的内容后便可成为原子命题的陈述句称为命题变元(propositional variable). 命题变元与初等数学里的变量类似,不过命题变元只能取值1(真)或0(假),而原子命题则相应地称为命题常元(propositional constant).

将命题变元用联结词和括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式. 下面给出命题合式公式定义.

定义 1.7 (1)单个命题常元(0,1)或单个命题变元($p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$)是命题合式公式,并称之为原子命题合式公式.

(2)若 A 是命题合式公式,则($\neg A$)也是命题合式公式.

(3)若 A、B 是合式公式,则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\to B)$,$(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4)只有有限次地应用(1)~(3)组成的符号串才是命题合式公式.

今后,我们将命题合式公式称为命题公式(propositional formula)或简称公式.

例如,$(\neg(p\vee q))$,$((p\to r)\to q)$是公式,但$(pr\to q)$,$((p\vee q)\to\to r)$等不是公式.

上面定义的方法称为归纳定义法,其中(1)是归纳定义的基础,直接规定简单的内容;(2),(3)是归纳定义的归纳,规定了是由简单到复杂的过程;(4)是归纳定义的界限,规定了满足前述(1)~(3)条件的最小范围.

从命题公式的定义可以看出,我们可以由一些原子合式公式构造出结构复杂的命题公式,而在一个复杂的公式中,为了避免歧义需要引进许多的括号,但如果括号太多会使人眼花缭乱,如$((p\wedge(q\vee r))\to((p\vee q)\wedge(r\vee s)))$共有6对括号,为了减少括号且不引起歧义,给出如下省略括号的约定:

(1)公式最外层的括号可以省略;

(2)规定联结词运算优先级别由高到低是$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\to$,$\leftrightarrow$,若无括号,优先级高的先运算;

(3)若同一个联结词连续多次出现且无括号,则按从左到右的顺序运算.

按照上述约定,$((p\wedge(q\vee r))\to((p\vee q)\wedge(r\vee s)))$可省略三对括号,简化为$p\wedge(q\vee r)\to(p\vee q)\wedge(r\vee s)$.

省略括号只是让公式书写简便,并不能改变其复杂性. 为了讨论结构复杂的命题公式的真值变化情况,我们给出命题公式层次的定义.

定义 1.8 (1)若公式 A 是单个命题常元或命题变元,则称 A 是0层公式.

(2)称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指 A 符合下列情况之一:

① $A=\neg B$,其中 B 为 n 层公式;

② $A=B\wedge C$,其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式,且 $n=\max(i,j)$;

③ $A=B\vee C$,其中 B,C 层次及 n 取值同②;

④ $A=B\to C$,其中 B,C 层次及 n 取值同②;

⑤ $A=B\leftrightarrow C$,其中 B,C 层次及 n 取值同②.

(3)若公式 A 的层次为 r,则称 A 是 r 层公式.

例如,$\neg p\vee q$ 是2层公式,$p\wedge q\wedge r$ 是2层公式,$\neg(\neg p\wedge q)\to(r\vee s)$则是4层公式.

1.3 真值表与真值函数

一般来说,一个含有命题变元的命题公式是没有确定的真值的,只有给命题公式中每个命

题变元都指定确定的真值,该命题公式才会有确定的真值.

定义 1.9　设 A 是一个命题公式,$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为出现在 A 中的全部命题变元,给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 各指定一个确定的真值,称为公式 A 关于 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的一组真值指派(true value assignment),也称为对公式 A 的一个赋值(value assignment)或解释(explanation). 若指定的一组赋值使 A 的真值为 1,则称这组赋值为公式 A 的成真赋值;若使 A 的真值为 0,则称该赋值为公式 A 的成假赋值.

例如,公式 $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge p_3$ 中,001(即 p_1,p_2,p_3 分别指派 0,0,1),101,111 都是其成真赋值,而 000,010,011,100,110 都是其成假赋值.

由定义易知,含有 n ($n \geqslant 1$) 个命题变元的命题公式,共有 2^n 组不同的赋值. 将命题公式 A 与所有赋值下的对应取值情况列成表,称之为命题公式 A 的真值表.

下面给出命题公式真值表具体的构造步骤:

(1) 找出公式 A 中含有的所有命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,列出所有可能的赋值(共 2^n 种),且为了避免漏写或多写,最好按二进制数从小到大的顺序,即按照从 $\underbrace{00\cdots0}_{n个}$ 开始到 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}$ 的顺序列出;

(2) 按由低到高的顺序写出各层次公式;

(3) 对应每个赋值,计算公式 A 各层次的真值,直到计算出公式 A 的真值.

例 1.7　写出下列命题公式的真值表.

(1) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(2) $\neg (p \to q) \wedge q$

(3) $p \wedge (q \vee \neg r)$

解　公式(1)的真值表如表 1.6 所示.

表 1.6　$(p \wedge (p \to q)) \to q$ 的真值表

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

公式(2)的真值表如表 1.7 所示.

表 1.7　$\neg (p \to q) \wedge q$ 的真值表

p	q	$p \to q$	$\neg (p \to q)$	$\neg (p \to q) \wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

公式(3)的真值表如表 1.8 所示.

表 1.8 $p\wedge(q\vee\neg r)$的真值表

p	q	r	$\neg r$	$q\vee\neg r$	$p\wedge(q\vee\neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

定义 1.10 设 A 为一个命题公式，

(1)若 A 在它的所有可能赋值下取值均为真,则称 A 为重言式或永真式(tautology).

(2)若 A 在它的所有可能赋值下取值均为假,则称 A 为矛盾式或永假式(contradiction).

(3)若 A 至少存在一个成真赋值,则称 A 为可满足式(contingency).

由定义可知,重言式一定是可满足式,但反之不成立.

给定一个命题公式,判断其类型的一种直观方法是利用命题公式的真值表.

从公式 A 的真值表构造过程可以看出,若公式 A 的真值表最后一列的值全部为 1,则说明对公式 A 的所有赋值都是成真赋值,即公式 A 为重言式,如例 1.7(1). 若 A 的真值表最后一列的值全为 0,则说明对公式 A 的所有赋值都是成假赋值,即公式 A 为矛盾式,如例 1.7(2). 若 A 的真值表最后一列的填入值中有 0 也有 1,则说明对公式 A 的所有赋值中至少有一个是成真赋值,即公式 A 为可满足式,如例 1.7(3).

许多公式虽形式上不同,但它们的赋值与公式对应的真值其实是相同的,如 $n=2$ 时,$p\to q$,$\neg p\vee q$ 和$\neg(p\wedge\neg q)$的真值表在相同的赋值下,对应的真值是完全相同的,即仅对我们所关注的公式的赋值和对应的真值来讲,它们在本质上是一样的.

定义 1.11 一个 n 元真值函数是指 $F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ $(n\geq 1)$,即此函数以 n 个命题变项为变元,其定义域和值域均由真假两值构成.

真值函数也可用真值表表示. n 个命题变项可以构成 2^{2^n} 个不同的真值函数,这是因为对于 n 个命题变元,可能的赋值有 2^n 个,而对于每个赋值,真值函数的取值又有 1,0 两种可能.

下表是一元真值函数真值表,显示了 1 个命题变项可以构成 $2^2=4$ 个不同的真值函数.

表 1.9 一元真值函数真值表

p	$F_1(p)$	$F_2(p)$	$F_3(p)$	$F_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

满足这 4 个真值函数取值的合式公式有无穷多种,这里对每个 $F_i(p)$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$,只给出最简单的 1 个,即

$$F_1(p)=p\wedge\neg p,\quad F_2(p)=p,\quad F_3(p)=\neg p,\quad F_4(p)=p\vee\neg p$$

任何一个含有 n 个命题变项的命题形式,其真值一定与由这 n 个命题变项对应的 2^{2^n} 个 n 元真值函数中的一个真值函数的真值相同.

因此,我们总可以根据有有限个命题变项的命题形式的真值表判断其类型. 这种问题称为命题形式的判定问题,并称这种判定问题是可解的,即命题形式是可判定的.

1.4　命题逻辑中的等值关系

给定 n $(n\geqslant 1)$ 个命题变元,按照命题公式的形成规则,可以形成多个不同形式的命题公式. 对其中许多比较复杂的公式,如果用真值表来研究,就需要作出很大的一张表. 但是,如果仅对我们所关注的公式的赋值和对应的真值来讲,这些真值表有许多是相同的. 如 $n=2$ 时,$p\rightarrow q$,$\neg p\vee q$ 和 $\neg(p\wedge\neg q)$ 的真值表在相同的赋值下,对应的真值是完全相同的,也就是说,它们在逻辑上是等值的.

定义 1.12　设 A、B 是两个命题公式,若等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式,则称 A 与 B 逻辑等值(logical equivalence),记作 $A\Leftrightarrow B$.

判断两命题公式是否等值,可应用真值表的方法,即若 $A\leftrightarrow B$ 的真值表的最后一列的值全为 1,则 $A\leftrightarrow B$ 为永真式,此时 A 与 B 等值. 当然,也可以通过 A 与 B 的真值表中公式所在的列的填入值是否对应相同来判定,若相同则说明 A 与 B 是等值的,否则就不是等值的.

例 1.8　判断 $\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 是否等值.

解　根据题意及两个命题公式是否等值的判定方法作真值表如表 1.10 所示.

表 1.10　$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

可以看到,真值表最后一列的填入值全部为 1,故 $\neg(p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$. 当然我们也可以不列出 $A\leftrightarrow B$ 这一列,仅从 $\neg(p\vee q)$ 和 $\neg p\wedge\neg q$ 所在的列在所有可能赋值下,填入值均对应相同,可得到 $\neg(p\vee q)$ 和 $\neg p\wedge\neg q$ 是等值的结论.

我们还可用真值表验证下面的基本等值式,可将它们当作定律来使用.

(1) 双重否定律　$A\Leftrightarrow\neg(\neg A)$

(2) 等幂律　$A\Leftrightarrow A\vee A$,$A\Leftrightarrow A\wedge A$

(3) 交换律　$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$,$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

(4) 结合律　$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

(5) 分配律　$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$