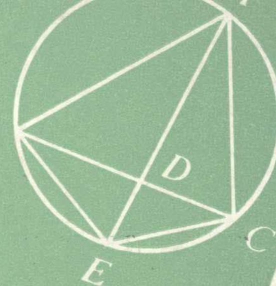
$a^2+b^2=c^2$

$\Delta=b^2-4ac$

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$

$\pi=3.1415$



在教学中……

初中数学例题精选与讲解

任仲文 主编

北京师范大学出版社

在教学中
初中数学
例题精选与讲解

任仲文 主编

乔家瑞 张鸿菊 韩玉琴 编

李兰田 张惠娟 田云成

北京师范大学出版社

（京）新登字160号

在教学中
初中数学例题精选与讲解
任仲文　主编

北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
北京朝阳展望印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：8.75　字数：183千
1991年9月第1版　　　1991年9月第1次印刷
印数：1—11 000

ISBN7-303-01273-7/G·759
定价：3.30元

前　言

根据国家教委颁布的新教学大纲，我们约请了北京市几所重点中学（四中、五中、八中、师大二附中、汇文中学、一〇九中等）的几位有经验的教师，共同编撰了这套教学丛书.本书的特点是，紧密结合教学大纲与学生的实际，取材新颖，言简意赅，从教学理论上与实践上，阐述了例题的选择和讲解的原则及方法，列举了大量的思考性强，构造巧妙的典型例题，给出了解法，并介绍了一些解题的思路和规律.每章最后还配备了两组验测题，这些题目来源于老师们多年的积累和近几年统练中精选出来的有代表性的题目.因此，本书是青年教师的很有价值的教学参考书，同时也是广大初中学生，青年职工，自学、复习、提高解题能力的理想读物.

任仲文

1991.3

目　　录

例题的选择与讲解

不管采用哪种教学方法进行数学教学，提供给学生必要的例题，都是实现教学目的的重要教学环节.任何一位有经验的数学教师，都非常重视对例题的积累和研究.他们经过多年的反复试用，加工修改，总结提高，都具有一套行之有效的例题体系，并十分注意发挥例题在教学中的特殊作用，从而保证了教学质量的稳定提高.事实证明，有必要从理论上、实践上对例题的选择与讲解进行全面研究.

一、例题在数学教学中的作用

学生在学习任何一个新知识前，教师都要通过适当的实际问题或已掌握的知识做为例子，使学生认识新知识产生的背景，并通过知识之间的逻辑联系，使学生认识新知识产生的必要性与合理性.例如，教师应以温度计为原型，精确地说明数轴的产生不是偶然的，它是生产和生活实际的反映.

学生在学习了一个新知识后，教师要根据具体情况，选配适当的模仿性例题．继而从学生理解和接受中暴露出来的问题，有针对性选配一些例题，并进一步挖掘例题的潜在功能，使之揭示出知识的规律.从而保证学生对新知识的认识，能够从现象到本质，从外部联系到内部联系，从感性认识上升到理性认识.例如，在讲清了函数的定义后，指出“自变量

的可取值范围叫做函数的定义域.”并举出下述一些简单的例题，求函数的定义域：

$$y=3x+2;\qquad y=2x^2-3x+1;$$

$$y=\frac{1}{x-1};\qquad y=\frac{x+1}{x+2};$$

$$y=\sqrt{x-1};\quad y=\sqrt{2+x}.$$

从而归纳出求函数定义域的一般方法：

函　数	整　　式	分　　　　式	根　式（根指数为2）
定义域	全体实数	使分母不等于零的自变量的所有值	使被开方数大于等于零的自变量的所有值

进而再选配如下例题：

$$y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{5-x};\qquad y=\frac{\sqrt{x+1}}{4x-3};$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-3x}},$$

和

$$y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x};\quad y=\sqrt{1-x}-\sqrt{x-4};$$

$$y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-4};\quad y=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{4-x},$$

使学生在模仿单一求定义域的基础上，能够应用方程和不等式的有关知识，解决由一个根式和一个分式或由两个根式所构成的函数解析式，用求数集公共部分的方法，求函数的定义域，从而使学生对函数的定义域加深了认识，并牢固掌握了定义域的一般求法.

为了纠正学生形式套用，学会具体问题具体分析，还应

选配如下例题：

(1) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$，要保证所有的分母都不为零，即$x\neq 0$，$1+\dfrac{1}{x}\neq 0$，所以定义域应为$x\neq 0$，$x\neq -1$.

(2) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+1}$，使根式$\sqrt{x-2}$有意义的$x$值$x\geqslant 2$，已能保证分母$x+1\neq 0$，所以定义域应为$x\geqslant 2$，而不应写成$x\geqslant 2$，且$x\neq -1$.

(3) $y=\dfrac{1}{2-\sqrt{x-1}}$，这是由一个根式和一个分式构成的解析式，应先求使根式$\sqrt{x-1}$有意义的x值$x\geqslant 1$，再求使分母$2-\sqrt{x-1}\neq 0$的x值$x\neq 5$，所以定义域应为$x\geqslant 1$，且$x\neq 5$.

(4) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$和$y=\sqrt{x^2+x+1}$，由于x取任何实数时x^2+1都不等于零，$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，所以这两个函数的定义域都是全体实数.

经过对具有模仿性、针对性、规律性的例题的讲解后，还应选择具有灵活性的例题进行讲解，使学生对知识的认识不断完善，不断充实.还以函数的定义域为例，在掌握了定义域的一般求法之后，在以后的有关问题中，就要选配典型例题，引导学生灵活地加以运用.例如，在求函数值时，就要首先检查所给的自变量的值，是否属于函数的定义域：

已知函数$y=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求当$x=a$（a是实数）时y的值.

解：$a\geqslant 2$时，　$y=\frac{|a-2|}{a+1}=\frac{a-2}{a+1}$；

$a<2$，且$a\neq -1$时，　$y=\frac{|a-2|}{a+1}=\frac{2-a}{a+1}$；

$a=-1$时，y的值不存在。

综上所述，例题在各个教学阶段所发挥的最主要作用，是使学生牢固地掌握系统的数学基础知识，并形成必要的技能技巧，我们称之为例题的教养作用．

例题的作用决不是单纯地为掌握科学知识，它对培养学生的科学态度，非智力品质以及辩证唯物主义世界观等方面的教育作用也是十分突出的．数学中充满了辩证法，在例题的选择与讲解中，教师应努力发掘辩证因素，使学生在获取知识的同时，逐步领会运动的观点、矛盾的观点、转化的观点和发展的观点．例如，在初一引进了负数，从而把数的范围扩充到有理数；到了初二又引进了无理数，从而把数的范围扩充到实数．在教学中，要用发展的观点和矛盾的观点，讲清数的范围为什么要扩充？怎样扩充？以后是否还要扩充？由于反复渗透发展的观点和矛盾的观点，就可以使学生领会数学是以螺旋式上升的，不断向前发展的，决不会停留在一个水平上．又如，在讲解方程的解法时，在分析例题时，要突出强调转化的观点：

$$\text{高次方程}\xrightarrow{\text{低次化}}\text{低次方程（一元方程）}$$

$$\text{分式方程}\xrightarrow{\text{整式化}}\text{整式方程}$$

$$\text{根式方程}\xrightarrow{\text{有理化}}\text{有理方程}$$

即把复杂问题转化成为简单问题，把新知识转化成为旧知识，把不会的转化成为会的．在教学中，经常渗透转化的观点，就

可以使学生领会一切矛盾着的事物总是相互联系的，不但在一定条件下共处一个统一体中，而且在一定条件下可以相互转化．又如，在讲解相交弦定理、切割线定理及割线定理后，用具体的例题进行比较，使学生认识到可以用运动的观点把它们统一起来：

如图1，设⊙O的弦AB和CD相交于圆内一点P，即P内分弦AB和CD成四条线段PA，PB，PC，PD，通过证明$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$，得出相交弦定理$PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

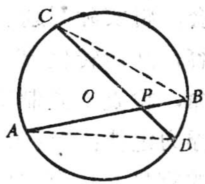


图 1

如图2，变动弦AB的位置，使弦AB和CD相交于⊙O外一点P，即P外分弦AB和CD成四条线段PA，PB，PC，PD，这四条线段也满足$PA \cdot PB = PC \cdot PD$，仍可以通过$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$推导出来．

如图3，变动割线PBA，使A，B点重合，PA是⊙O的切线，由$PA = PB$，通过$\triangle PAD \backsim \triangle PCA$，得出$PA^2 = PC \cdot PD$.

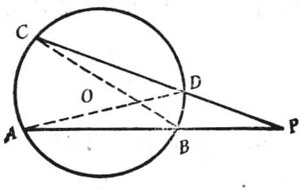


图 2

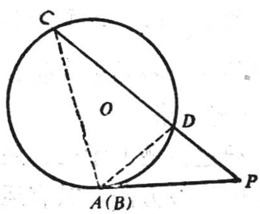


图 3

在教学中，经常用运动的观点选择和讲解例题，就可以培养学生的运动观点，使学生认识运动是物质的根本属性，运动

变化是绝对的，而静止则是相对的.无数事实证明，数学教学对培养学生的辩证唯物主义观点，承担着重要责任，这也是我们数学教师不可推卸的光荣职责.

当然，通过例题的教学还可以发展学生的思维，使他们掌握学习数学知识的有效手段，具备良好的科学思维素养，此种功能我们称之为发展作用.通过例题的示范应使学生学会，将实际问题去掉其物质内容及枝节，揭示出它的本质内容，从而转化成为数学问题.例如，相传阿基米德受国王之命，检查工匠制造的王冠是否纯金所制？他在洗澡时，发现浮力定律："浸入液体的物体所受到的浮力等于其排开液体的重量"，从而完成了在当时看来非常困难的任务，就是一个非常典型的把实际问题抽象成一个数学问题的范例.具体题目如下：

有一顶黄金制造的王冠，重12磅.为了检验是否掺有白银，现有两块都和王冠重量相等的钝金和钝银，分别称一下它们在水中的重量，发现黄金在水中减轻了$\frac{19}{32}$磅，白银在水中减轻了$\frac{57}{64}$磅，王冠在水中减轻了$\frac{85}{128}$磅.求王冠中黄金和白银的含量各是多少磅？

（解答略）.

通过例题的示范，还应使学生掌握证明或反驳某个数学结论的一般方法，具有运用观察、比较、分析、综合、概括、抽象等方法，进行归纳推理和演绎推理的能力，并逐步形成一定的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力.

例题的作用还有很多方面，这些都是值得数学教师认真研究和总结的，以便在教学中更好地发挥例题的作用.

二、例题的主要类型

按例题在教学中的作用来划分，大致可分为下述几种类型：

1．引入概念和理解概念的例题

有些例题的编排就是为了引入和理解概念的．特别是重要的概念，可以反复用例题从内涵和外延诸方面帮助学生理解．同时，通过安排对比性例题，使学生分清易混概念间的区别，相关概念间的本质联系．例如，在学习一元一次方程时，安排下面的例题，就是为了帮助学生理解方程这一概念的：

(1) $4+2=6$是不是方程？为什么？

(2) $x+2=6$是不是方程？为什么？

(3) $x+2$是不是方程？为什么？

(4) $x+2<6$是不是方程？为什么？

(5) $x^2=x$是不是方程？为什么？

(6) $x=0$是不是方程？为什么？是不是一元一次方程？

(7) 你能举出一个你认为最简单的方程吗？你能举出一个你认为最复杂的方程吗？

2．归纳定理、公式和法则，并初步加以运用的例题

在学习某一定理、公式和法则的最初阶段，应使用不同数据、不同形式，由浅入深，由简单到复杂地进行正面训练．例如，在学习利用$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$分解因式时，就采取变化字母、变化系数、变化指数、变化项数等方法进行训练：

$$m^2-n^2\longrightarrow 4a^2-9b^2\longrightarrow a^4-b^4\longrightarrow 4x^2-100y^2\longrightarrow$$
$$(a+2b)^2-c^2\longrightarrow(2x-3y)^2-(3x+2y)^2.$$

进而安排引导学生反用各种法则的例题，例如在学习绝对值

时，可以安排一些相反性的例题，以克服呆板套用公式的状况：

例1 如果一个数的绝对值等于5，求这个数.

例2 求绝对值小于3.1的整数.

同时应注意变换例题的形式，采取填空、选择、判断正误等多种形式，以利于克服由于枯燥给学习带来的不良影响.例如

例1 下列约分是否正确？为什么？

$$\frac{3a}{2a}=a,\quad \frac{x-1}{x+2}=-\frac{1}{2},\quad \frac{a-1}{a}=-1,\quad \frac{6}{a^2}=\frac{3}{a}.$$

例2 以表格的形式进行整式运算：

x	y	$x+y$	$x-y$	xy	x^2	y^3	$-2x^2y$	$(-xy^2)^3$	$2x^2+y^2$
a	a								
a	$-b$								
$-2a$	$-a^2$								
$2ab$	$-b^2$								
$-a^2b$	$-ab^2$								

3. 纠正学生出现的错误，巩固所学知识的例题

根据学生出现的错误，有针对性地编排一些例题，将容易混淆或有关联的问题对照比较，明确它们的异同点以及内部联系，使学生对所学知识得到巩固和深化.

（1）将容易混淆的运算编排成对比性例题

例如在学习分式运算时，为了帮助学生搞清楚运算顺序，可编排下述例题：

计算：$1-\frac{3a}{2b}\div\frac{3a}{2b}\cdot\frac{2b}{3a}$；

$$1-\frac{3a}{2b}\div\left(\frac{3a}{2b}\cdot\frac{2b}{3a}\right).$$

又如，在学完解分式方程后，为防止在分式计算中出现“去分母”的错误，可编排下述例题：

计算：$\frac{6}{1-x^3}-\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x-1}$；

解方程：$\frac{6}{1-x^3}-\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x-1}=0$.

（2）将有关联的运算编排成对比性例题

例如为了更深刻地理解因式分解的意义和方法，可适当与乘法运算进行对比，编排成下述例题：

例1 计算 $\left(2x+\frac{1}{3}y\right)\left(2x-\frac{1}{3}y\right)$；

例2 分解因式 $4x^2-\frac{1}{9}y^2$；

例3 计算 $3(a+b)(a-b)$；

例4 分解因式 $3a^2-3b^2$.

（3）将典型的解题方法编排成对比性例题

例1 在用公式分解因式时，可安排下述例题：

分解因式a^6-b^6（用两种方法分解）.

例2 在用分组分解法分解因式时，可安排下述例题：

用不同的分组方法分解$ax+by+ay+bx$.

这种安排可以活跃学生的思维，激发学生的学习兴趣，

使人耳目一新.

4. 技能技巧性较强的例题

根据教材要求和学生的实际水平，可编排灵活程度较高的例题，循序渐进地进行有关技能技巧的训练.例如，在学习分式运算时，应帮助学生逐步过渡到更高层次的运算，可选用下述例题：

(1) 如果参加运算的分式中，有的分式不是最简分式，应首先化成最简分式，再进行运算：

例1 化简 $\dfrac{x^3-x^2y+xy^2}{x^3+y^3}-\dfrac{x^3+x^2y+xy^2}{x^3-y^3}$.

(2) 利用乘法分配律进行化简：

例2 化简 $(a^2-b^2)\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}\right)$.

(3) 利用乘法公式进行化简：

例3 化简 $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}\right)$.

(4) 采取逐步通分的方法进行化简：

例4 化简 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{2x}{x^2+a^2}+\dfrac{4x^3}{x^4+a^4}$.

(5) 先把分式化成部分分式，再进行加减法运算：

例5 化简 $\dfrac{a^3+a+1}{a^2-1}+\dfrac{2a^2+4a-3}{a-1}-\dfrac{3a^2+9a+7}{a+1}$.

5. 综合运用所学知识的例题

这种例题涉及到较多的知识，应用到较多的解题方法，有助于提高学生的分析问题和解决问题的能力.例如在讲过二元一次方程组后，结合旧知识可以选配下述例题：

例1 设$a+b=50$，$a-b=10$，求a^2+b^2的值．

例2 已知$2a+3b=8$，$3a-2b=-1$，解方程

$$\frac{(a+2)x-(3b-1)}{2}=\frac{ax-(b+1)}{6}-2.$$

例3 已知$y=ax^2+bx+c$中，$x=1$时，$y=24$，并且$a:b:c=1:2:3$，求$x=-\frac{1}{2}$时，y的值等于多少？

例4 已知$3x-2y+z=0$和$2x+3y+3z=0$，把x,y分别用含z的代数式表示出来．

6． 有关教材改革和教学方法改革试验的例题

根据教材改革和教学方法改革的需要进行试验时，安排的例题需要明确目的，需要有足够的理论根据，并注意及时反馈学生接受的情况认真进行统计和总结．

三、选择例题的主要标准

1． 科学性

教师在备课时，应以严谨的治学精神，认真负责的工作态度，深入钻研和理解教材．同时又不迷信教材及教学参考资料，及时发现教科书中的错误例题和习题，以保证教给学生符合科学原理的正确的知识．例如，在因式分解一章的教材及教参中，都特别指出“因式分解必须分解到每一个因式都不能再分解为止，是指在规定的数系范围内，不能再分解为止．本章是在有理数范围内研究因式分解”．所谓在有理数范围内研究因式分解，是指已知多项式的系数及分解后各因式的系数，必须都是有理数．但教科书中有些题目却违反了这个要求：

如图4，在半径为R的圆形钢板上，冲去半径为r的四个