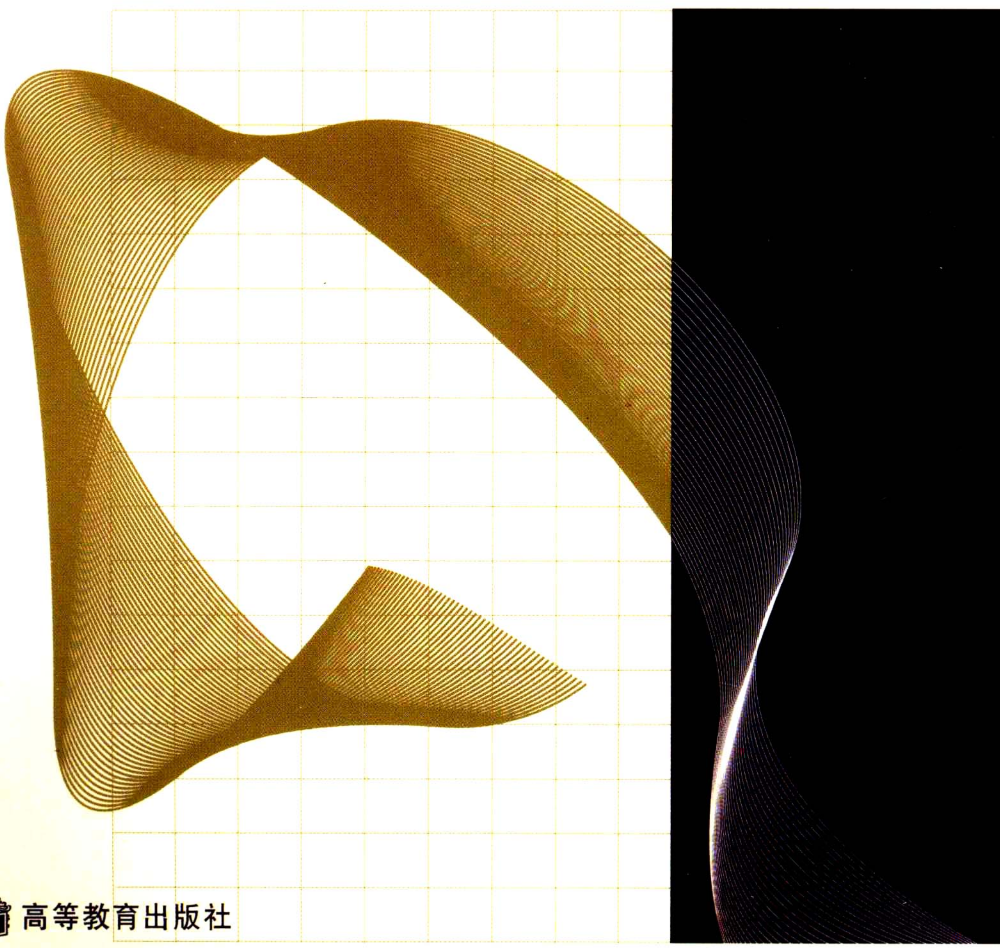
College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计习题辅导

袁荫棠 范培华 编



高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

经济应用数学基础(三)

概率论与数理统计习题辅导

Gailülun yu Shuli Tongji Xiti Fudao

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是为高等学校经济管理类数学基础课程系列教材中的《经济应用数学基础(三)概率论与数理统计》(袁荫棠编,高等教育出版社2009年7月第一版,以下简称教材)编写的配套辅导书。全书与教材完全同步,共分七章。每章包括内容提要、教材习题解析、补充练习题及其练习题解析四个部分。书后还配置了三套综合练习题及其解答,可供读者学习完教材后自我检测。

本书可作为普通高等学校经济管理类本科师生的教学与学习参考书。由于在各章的补充练习题中编入了历届硕士研究生入学考试的部分试题,本书亦可供报考研究生的读者复习时参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(3)概率论与数理统计习题辅导/袁荫棠,范培华编.—北京:高等教育出版社,2010.1
ISBN 978-7-04-028397-6

Ⅰ.经… Ⅱ.①袁…②范… Ⅲ.①经济数学-高等学校-解题②概率论-高等学校-解题③数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.F224.0-44 021-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第224853号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 李晓鹏 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 吴文信
版式设计 张 岚 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com

开 本	787×960 1/16	**版 次**	2010年1月第1版
印 张	12	**印 次**	2010年1月第1次印刷
字 数	220 000	**定 价**	14.70元

物料号 28397-00

前　　言

本书是《经济应用数学基础(三)概率论与数理统计》(袁荫棠编,高等教育出版社2009年7月第一版,以下简称教材)的配套辅导书.其内容有以下特点:

1. 本书与教材同步编写,书中各章的内容与教材紧密衔接.不仅概括了概率论与数理统计课程的主要概念、定理和公式等基本内容,而且还归纳出一些求解和思考问题的常用结论、方法.书中各章的起首处,还给出了本章的内容提要,作为复习提纲.

2. 对于教材中各章后的习题,本书都作了详细的解答.为使读者更好地掌握解题思路和方法,对有些典型习题还给出了深入分析和评述,其中一部分还列举了多种不同的解法.

3. 书中各章后面都配备了少量的补充练习题,并给出了详细的解释和分析.这些练习题的一部分选自历届硕士研究生入学考试的试题,一部分是在教材习题的基础上加以提升和充实形成的.此外,在这些练习题中还补充了近年经常出现的填空题和选择题.

4. 作为全书的结束,我们配备了三套综合练习题.读者可以用它作为学完教材后的自我检测,亦可作为教师出考题的参考.其中每套综合练习题都包含选择题、填空题和问答题三部分.习题的整体难度稍高于一般学校该门课程期末考试的试题要求,练习完成时间以控制在2~2.5小时为宜.

本书第一、二章以及综合练习题及其解答由袁荫棠编写;第三至七章由范培华编写.全书最后由袁荫棠统稿.

本书是根据编者的教学实践与经验编写的,希望能对从事概率论与数理统计教学和学习的师生,以及参加全国研究生入学统一考试的读者有所帮助.书中如有不妥之处,恳请读者批评指正.

编　者

2009年8月

目　录

第一章　随机事件与概率

一、内 容 提 要

对于初学概率论的读者，首先要理解随机事件与概率这两个概率论中最基本的概念以及独立性与条件概率这两个概率论中最重要的概念. 事件的关系与运算、概率的定义和性质以及概率计算的基本公式和伯努利试验概型是本章的主要内容，也是学习以后各章的必要基础.

（一）随机事件

1. 随机现象与随机试验

随机现象是我们无法事先准确预知其每次试验结果的现象，它在大量重复试验所表现出来的量的规律性，称为随机现象的**统计规律性**.

对随机现象进行的观察或实验称为**随机试验**，一般的要求其满足可重复性、可观察性与随机性（详见袁荫棠编写的《概率论与数理统计》（高等教育出版社 2009 年第一版，以下简称教材）一书的 §1.1 节）.

2. 样本点与样本空间

随机试验的每个可能发生的基本结果称为该试验的一个**样本点**，用 ω 表示；由随机试验的所有可能发生的基本结果，即所有样本点构成的集合称为该试验的**样本空间**，用 Ω 表示.

3. 随机事件　由试验某些最基本结果复合而成且具有一个可观察的特征的结果称为该试验的一个**随机事件**. 简称**事件**，用 $A,B,C,\cdots$ 表示.

4. 基本事件　试验中可能出现的最基本结果称为**基本事件**. 基本事件是最简单的随机事件.

5. 必然事件与不可能事件　每次试验中一定出现的事件称为**必然事件**，记作 Ω；每次试验中一定不出现的事件称为**不可能事件**，记作 $\varnothing$.

6. 事件的集合表示

必然事件即样本空间 Ω，它是由试验的样本空间中所有样本点组成的全集；不可能事件是不含任何一个样本点的空集；基本事件是只包含一个样本点的单点集合；随机事件则是由样本空间 Ω 中一部分样本点组成的子集.

7. 事件的关系与运算(见表 1.1)

表 1.1　事件间的关系与运算

事件间关系与运算的文字叙述	集合论中的表示法	概率论中的含义
事件 A 包含事件 B(或事件 B 含于事件 A)	$A\supset B$(或 $B\subset A$)	事件 B 发生,则事件 A 一定发生
事件 A 和 B 相等(或等价)	$A=B$	事件 A 发生,则 B 一定发生,反之亦然
事件 A 与 B 之和(或并)	$A\cup B$ 或 $A+B$	两个事件 A,B 中,至少有一个事件发生
有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 的和(或并)	$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$	n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生
可列个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(或并)	$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$	可列个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个事件发生
事件 A 与 B 的积(或交)	$A\cap B$(简记为 AB)	事件 $A\cap B$ 发生,当且仅当 A 与 B 同时发生
有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 的积(或交)	$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $A_1A_2\cdots A_n$)	n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生
可列个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 的积(或交)	$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$	可列个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生
事件 A 与 B 的差	$A-B$	事件 $A-B$ 发生,当且仅当事件 A 发生,B 不发生
事件 A 的逆事件(或对立事件)	$\overline{A}\xlongequal{\Delta}\Omega-A$	事件 $\overline{A}$ 发生,当且仅当事件 A 不发生
事件 A 和 B 互不相容(或 A 与 B 互斥)	$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与 B 不可能同时发生
事件 $A_1,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组	$A_1\cup\cdots\cup A_n=\Omega$ $A_iA_j=\varnothing,1\leqslant i\neq j\leqslant n$	n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 中仅发生且必发生其中之一
事件 $A_1,A_2,\cdots$ 是一个完备事件组	$A_1\cup A_2\cup\cdots=\Omega$ $A_iA_j=\varnothing,1\leqslant i<j<+\infty$	可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中仅发生且必发生其中之一

8. 事件关系与运算的性质及常用结论

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$,　$A\cup B\supset A\supset A-B$,　$A\supset AB$;

(2) $\overline{A}=\Omega-A$, $\overline{\overline{A}}=A$, $\overline{\Omega}=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=\Omega$;

(3) $A-B=A\overline{B}=A-AB$;

(4) $A-B$, AB, $B-A$ 两两互不相容，且

$A\cup B=A\cup(B-A)=(A-B)\cup AB\cup(B-A)=A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B$,

$A=(A-B)\cup AB=A\overline{B}\cup AB$;

(5) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$;

(6) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$,

$(AB)C=A(BC)=ABC$;

(7) 分配律 $A(B\cup C)=AB\cup AC$, $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$;

(8) 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{\bigcup\limits_i A_i}=\bigcap\limits_i \overline{A_i}$, $\overline{\bigcap\limits_i A_i}=\bigcup\limits_i \overline{A_i}$.

（二）随机事件的概率

1. 概率的古典定义 设试验的基本事件(样本空间中样本点)总数为有限个，且每个基本事件(样本点)发生的可能性都相同. 则随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{有利于事件 }A\text{ 的基本事件数}(A\text{ 中样本点数})m}{\text{试验的基本事件总数}(\text{样本空间中样本点总数})n}\stackrel{\Delta}{=}\frac{\#A}{\#\Omega}$$

这样定义的概率称为**古典概率**，符合上述假定的概率模型称为**古典概型**. 其中符号 $\#A$ 与 $\#\Omega$ 分别表示有利于事件 A 的基本事件个数与试验的基本事件总数.

2. 概率的几何定义 在几何概型(见教材 §1.2 节 * 四、几何概型)中，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{区域 }A\text{ 的量度 }\mu(A)}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 的量度 }\mu(\Omega)}$$

其中量度 $\mu(A)$ 与 $\mu(\Omega)$ 可以是长度、面积和体积.

3. 概率的公理化定义 设试验的样本空间为 Ω，对于 Ω 中每一个随机事件 $A(A\subset\Omega)$ 都赋予一个实数 $P(A)$，如果它满足下面三条公理：

(1) 非负性 $P(A)\geqslant 0$;

(2) 正则性 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性 对于 Ω 中任意可列个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，都有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

概率的描述性定义及统计定义见教材.

4. 概率的性质　事件 A 的概率除了具有公理化定义中的三条基本属性，即三条公理外，还有下列一些性质：

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(3) 有限可加性　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$. 特别地，若 A 与 B 互不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

(4) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$;

(5) 求逆公式　$P(\overline{A})=1-P(A)$,

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，则 $P(A_1)+\cdots+P(A_n)=1$;

(6) 减法公式　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$,

若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ 且 $P(A)\geqslant P(B)$;

(7) 加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}P(A_iA_j)+P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

（三）条件概率与事件的独立性

1. 条件概率的定义　设 A,B 是两个随机事件，$P(A)>0$，则称在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率 $P(B|A)$ 为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

2. 条件概率的性质　条件概率也是一种概率，它也具有非负性、正则性与可列可加性和概率的其他性质. 特别要指出的是对于任何事件 A，若 $0<P(A)<1$，则一定有

$$P(B|A)+P(\overline{B}|A)=1\quad 或\quad P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$$

但是 $P(B|A)+P(B|\overline{A})$ 不一定等于 1.

3. 概率的三个基本公式

乘法公式　$P(AB)=P(A)P(B|A)$，$P(A)>0$.

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$$

全概率公式　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则对任何事件 B，都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

贝叶斯公式　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则对于任意概率大于 0 的事件 B，都有

$$P(A_m|B)=\frac{P(A_m)P(B|A_m)}{P(B)}=\frac{P(A_m)P(B|A_m)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},\quad m=1,2,\cdots,n$$

4. 两个事件的相互独立性

(1) 定义　若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**.

(2) 性质

(2.1) 若 $P(A)>0$，则 A 与 B 独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$；

(2.2) 下列四对事件的独立性是等价的，即 A 与 B 独立$\Leftrightarrow A$ 与 $\overline{B}$ 独立$\Leftrightarrow\overline{A}$ 与 B 独立$\Leftrightarrow\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立；

(2.3) 概率为 0 或 1 的事件与任何事件都是相互独立的.

5. n 个事件的独立性

(1) 定义　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果它们中任何两个事件都相互独立，即 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两独立**；如果对于任意正整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=\prod_{j=1}^{k}P(A_{i_j})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

(2) 性质

(2.1) 若 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立，则将其中 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件换成其对立事件，所得到的 n 个事件依然相互独立；

(2.2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则它们中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件都相互独立；

(2.3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i);\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i)$$

6. 可列个事件的独立性　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任何两个事件都是相互独立的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两独立；如果它们中任何有限个事件都是相互

独立的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是相互独立的随机事件序列.

7. 伯努利概型

(1) 相互独立试验　如果 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中任何一个或几个试验的结果都不影响其他各次试验中各种结果出现的概率，则称这 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是相互独立的试验；如果可列个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 中任何有限个试验都是相互独立试验，则称 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 为相互独立试验序列.

(2) 伯努利概型　只有事件 A 发生或 $\overline{A}$ 发生两种对立结果的试验称为伯努利试验；如果独立重复进行 n 次伯努利试验即 n 次试验相互独立；每次试验中只有 A 发生或 $\overline{A}$ 发生两种对立结果；且每次试验中 A 发生的概率都相同，即 $P(A)=p(0<p<1)$ 与试验序号无关. 我们称这 n 次试验为 n 重伯努利试验概型，在 n 重伯努利概型中，事件 A 发生 k 次的概率 $P(B_k)$ 可用下面的伯努利公式直接计算：

$$P(B_k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$$

二、教材习题解析

1. 说明下列各对事件的关系：

(1) "甲产品畅销且乙产品滞销"与"甲产品滞销且乙产品畅销"；

(2) "甲产品畅销且乙产品滞销"与"甲产品滞销或乙产品畅销"；

(3) "3 次试验都成功"与"3 次试验中失败 1 次"；

(4) "3 次试验都成功"与"3 次试验中至少失败 1 次"；

(5) $\{x:x>2\}$ 与 $\{x:x\leqslant 2.5\}$；　(6) $\{x:x>2\}$ 与 $\{x:x<1.8\}$；

(7) $\{x:x>2\}$ 与 $\{x:x\leqslant 2\}$；　(8) $\{x:|x-\pi|<2\}$ 与 $\{x:x-\pi>2\}$.

解　(1) 设事件 $A=$"甲产品畅销"；$B=$"乙产品滞销"，则 $AB=$"甲产品畅销且乙产品滞销"；$\overline{A}\,\overline{B}=$"甲产品滞销且乙产品畅销"，由于 $(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing$，因此(1)中的两个事件 AB 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 互不相容；

(2) 依题意，"甲产品滞销或乙产品畅销" $=\overline{A}\cup\overline{B}$，由于 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$，因此(2)中的两个事件 AB 与 $\overline{AB}$ 是对立事件；

(3) 设事件 $A_i=$"第 i 次试验成功"，$i=1,2,3$，则 $A_1A_2A_3$ 表示"3 次试验都成功"；$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$ 则表示"3 次试验中仅失败 1 次"，由于 $A_1A_2A_3(A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3)=\varnothing$，因此(3)中的两个事件互不相容；

(4) 依题意，"3 次试验中至少失败一次" $=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$，且 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3=\overline{A_1A_2A_3}$，因此(4)中的两个事件是对立事件；

(5) 如图 1.1 所示,$A=\{x:x>2\}$ 与 $B=\{x:x\leqslant 2.5\}$ 是相容事件;

(6) $\{x:x>2\}$ 与 $C=\{x:x<1.8\}$ 是互不相容事件;

(7) $\{x:x>2\}$ 与 $D=\{x:x\leqslant 2\}$ 是对立事件;

(8) 如图 1.2 所示 $A_1=\{x:|x-\pi|<2\}$ 与 $A_2=\{x:x-\pi>2\}$ 是互不相容事件.

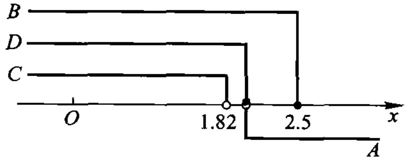


图 1.1

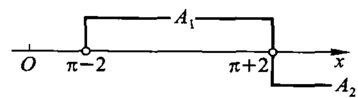


图 1.2

[**评注**] 如果两个事件互不相容,它们不一定是对立事件,如(6)中 A 与 C 和(8)中 A_1 与 A_2;但是如果两个事件是对立事件,则它们一定是互不相容事件,如(7)中 A 与 D.

2. 同时投掷 i 颗骰子,观测其出现的点数之和,对于 $i=1,2,3$,分别写出这 3 个试验的样本空间.

解 记数字 k 表示"点数之和为 k 点",对于 $i=1,2,3$,有

$$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\};$$

$$\Omega_2=\{2,3,4,\cdots,11,12\};$$

$$\Omega_3=\{3,4,5,\cdots,16,17,18\}.$$

3. 将一枚硬币连续抛掷三次,记事件 $A_i=$"第 i 次出现正面",$i=1,2,3$. 用事件 $A_i(i=1,2,3)$ 表示下列事件:

(1) $B_1=$"前两次出现正面";(2) $B_2=$"至少有两次出现正面";

(3) $B_3=$"正面只出现两次";(4) $B_4=$"没有出现正面";

(5) $B_5=$"至少出现 1 次正面";

(6) $B_6=$"前两次中至少出现 1 次正面且第 3 次出现反面".

解 (1) $B_1=A_1A_2$;

(2) $B_2=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3=A_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$;

(3) $B_3=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$;

(4) $B_4=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$;

(5) $B_5=A_1\cup A_2\cup A_3=A_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$
$\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;

(6) $B_6=(A_1\cup A_2)\overline{A}_3=A_1\overline{A}_3\cup A_2\overline{A}_3$.

4. 事件 A,B,C 如图 1.3 所示都相容,将事件 $A\cup B,A\cup B\cup C,AC\cup B,C-AB$

用一些互不相容事件的和表示出来.

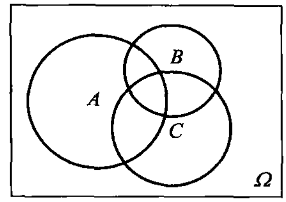


图 1.3

解 $A\cup B=A\cup\bar{A}B=A\bar{B}\cup B=\bar{A}B\cup AB\cup A\bar{B}$

$A\cup B\cup C=A\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}C$

$AC\cup B=B\cup AC\bar{B}$

$C-AB=\bar{A}C\cup AC\bar{B}=\bar{B}C\cup\bar{A}BC$

5. 设 A,B,C 是随机事件，化简下列各事件：

(1) $(A\cup B)(B\cup C)$；　　(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})$；

(3) $\overline{BC}(A\cup B)\cup A(B\cup C)$.

解 (1) $(A\cup B)(B\cup C)=(A\cup B)B\cup(A\cup B)C=B\cup AC\cup BC=B\cup AC$；

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})=(A\cup B)A\cup(A\cup B)\bar{B}=A\cup A\bar{B}\cup B\bar{B}=A$；

(3) $\overline{BC}(A\cup B)\cup A(B\cup C)=(\bar{B}\cup\bar{C})(A\cup B)\cup AB\cup AC$

$$=A\bar{B}\cup A\bar{C}\cup B\bar{C}\cup AB\cup AC$$

$$=(A\bar{B}\cup AB)\cup(A\bar{C}\cup AC)\cup B\bar{C}$$

$$=A\cup B\bar{C}.$$

6. 掷 3 枚硬币，求出现 3 个正面的概率.

解 设事件 A 表示掷 3 枚硬币出现 3 个正面，该试验的样本空间共有 8 个等可能的样本点. 而事件 A 仅包含其中的一个样本点，根据古典概型公式

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

7. 10 把钥匙中有 3 把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率.

解 设 $P(A)$ 为所求概率，则事件 A 表示取的两把钥匙中至少有一把能打开门.

$$\#A=C_3^2+C_3^1C_7^1=24,\quad \#\Omega=C_{10}^2=45$$

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{8}{15}$$

或 $\#\bar{A}=C_7^2=21$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{21}{45}=\frac{8}{15}$$

8. 7 张卡片上有 3 张写有数字“1”，2 张写有数字“0”，另外 2 张分别写有数字“2”与数字“9”，现将它们随机地放成一排，求它们从左到右恰好排成 2001911 的概率.

解 设 $P(A)$ 为所求事件的概率，7 张卡片随机排放共有 $7!$ 种等可能的不同排法，而有利于事件 A 的排法共有 $3!\cdot 2!$ 种. 根据古典概型公式

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{2!\ 3!}{7!}=\frac{1}{420}$$

9. 10 件产品中有 2 件次品，从中一次任取 3 件，求取到 i 件次品的概率，$i=0,1,2$.

解 设事件 A_i="取到 i 件次品"，$i=0,1,2$，从 10 件产品任取 3 件共有 C_{10}^3 种不同的等可能取法，而取到 i 件次品是从 2 件次品中取 i 件，且从其余 8 件中取 $3-i$ 件，因此事件 A_i 所含样本点数 $\#A=C_2^iC_8^{3-i}$，$i=0,1,2$. 依古典概型公式

$$P(A_i)=\frac{\#A_i}{\#\Omega}=\frac{C_2^iC_8^{3-i}}{C_{10}^3},\quad i=0,1,2$$

将 $i=0,1,2$ 代入上式计算可得

$$P(A_0)=\frac{7}{15},\quad P(A_1)=\frac{7}{15},\quad P(A_2)=\frac{1}{15}$$

10. 10 件产品中有 5 件一等品，3 件二等品与 2 件三等品. 从中一次任取 3 件产品，求恰好有一、二、三等品各 1 件的概率.

解 设 A="取到的 3 件产品中有一、二、三等品各 1 件"从 10 件产品中一次取 3 件产品共有 C_{10}^3 种不同的等可能取法. 有利于事件 A 的所有取法为 $C_5^1C_3^1C_2^1$ 种，根据古典概型公式

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=0.25$$

11. 一副扑克牌有 52 张，不放回抽取，每次 1 张，连续抽取 4 张求下列各事件的概率：

(1) A="4 张花色各异"；　(2) B="4 张中只有两种花色".

解 该试验的样本空间共有 C_{52}^4 个等可能的样本点.

(1) 有利于 A 的样本点数为 $(C_{13}^1)^4$，根据古典概型公式，

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{(C_{13}^1)^4}{C_{52}^4}=0.105$$

(2)
$$\#B=C_4^2(C_2^1C_{13}^3C_{13}^1+C_{13}^2C_{13}^2)$$

$$P(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{6}{C_{52}^4}(7\ 436+6\ 084)=0.300$$

12. 一间宿舍内住有 6 位同学，求他们中有 4 个人的生日是在同一个月份的概率.

解 设事件 A="有 4 人生日在同一月份"，假定每人生日在各个月份的可能性相同，因此 6 位同学的生日月份共有 12^6 种不同的可能结果. 若 4 个人生日

在同一月份，则其余 2 人生日应该在另外的 11 个月份内. 因此事件 A 中所含样本点数为 $11^2C_6^4C_{12}^1$. 根据古典概型公式

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{11^2C_6^4C_{12}^1}{12^6}=0.007\ 3$$

13. 已知 $P(A)=1/3$, $P(AB)=1/4$, $P(A\cup B)=1/2$, 求 $P(B)$.

解 根据加法公式有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

可得

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

14. 由长期统计资料得知，某一地区在 4 月份下雨(记作事件 A)的概率为 $4/15$，刮风(用 B 表示)的概率为 $7/15$，既刮风又下雨的概率为 $1/10$，求 $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A\cup B)$.

解 依题意，

$$P(A)=\frac{4}{15},\quad P(B)=\frac{7}{15},\quad P(AB)=\frac{1}{10}$$

根据条件概率定义与加法公式计算可得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/10}{7/15}=\frac{3}{14}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/10}{4/15}=\frac{3}{8}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{4}{15}+\frac{7}{15}-\frac{1}{10}=\frac{19}{30}$$

15. 设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)=1/4$, $P(B|A)=1/3$, $P(A|B)=1/2$, 求 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 根据乘法公式有，

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$$

根据加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

[**评注**] 该题的关键是求出 $P(B)$，至于计算 $P(\overline{A}\,\overline{B})$ 的方法不止一种，比

如可以用乘法公式求出 $P(\overline{A}B)=P(B)P(\overline{A}\mid B)=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$，再根据 $P(\overline{A})=P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B})$ 可得

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$

如果通过$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，先计算 $P(A\cup B)$，其方法也不唯一，比如

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(\overline{A}B)=P(B)+P(A\overline{B})\\&=P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})\end{aligned}$$

16. 假设在空战中，若甲机先向乙机开火，则击落乙机的概率为0.2；若乙机未被击落，就进行还击，击落甲机的概率是0.3；若甲机亦未被击落，则再次进攻乙机，击落乙机的概率为0.4，在这几个回合中，分别计算甲、乙机被击落的概率.

解 设事件 A、B 分别表示甲、乙机被击落，B_i 表示乙机第 i 次被甲机击落，$i=1,2$. 依题意 $\overline{B}_1\supset A$，$\overline{B}_1\overline{A}\supset B_2$.

$P(B_1)=0.2$，$P(A\mid\overline{B}_1)=0.3$，$P(B_2\mid\overline{A}\,\overline{B}_1)=0.4$

$P(A)=P(A\overline{B}_1)=P(\overline{B}_1)P(A\mid\overline{B}_1)=0.8\times0.3=0.24$

$P(B_2)=P(\overline{B}_1\overline{A}B_2)=P(\overline{B}_1)P(\overline{A}\mid\overline{B}_1)P(B_2\mid\overline{B}_1\overline{A})=0.8\times0.7\times0.4=0.224$

$P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)=0.2+0.224=0.424$

17. 设袋内有 $a(a\geqslant2)$ 个白球，b 个黑球，在袋中接连取3次，每次取1个球，取后不放回，求取出的3个球都是白球的概率.

解 设 A_i="第 i 次取出白球"，$i=1,2,3$. 根据乘法公式

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\\&=\frac{a(a-1)(a-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}\end{aligned}$$

*18. 袋内装有 b 个黑球，r 个红球，从中任取1个球，观察后放回并再放入 c 个与取出的颜色相同的球. 第二次再从袋里取出1球. 将上述过程进行 n 次，求取出的球都是黑球的概率.

解 设事件 A_i 表示"第 i 次取出的是黑球"，$i=1,2,\cdots,n$. 根据乘法公式

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=\frac{b(b+c)\cdots[b+(n-1)c]}{(b+r)(b+r+c)\cdots[b+r+(n-1)c]}\end{aligned}$$

[评注] (1) 在两个事件的乘法公式中，已知 $P(AB)$，$P(A)$，$P(B\mid A)$（要

求 $P(B|A)>0$)中任何两个,可以计算出第 3 个,比如在习题 15 中,我们通过乘法公式 $P(AB)=P(B)P(A|B)$,根据已知的 $P(AB)$ 与 $P(A|B)$ 的值,计算出 $P(B)$ 的值.

(2) 如果事件 $B\supset A$,则 $P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)$. 对于多个事件亦如此. 这也是乘法公式对于包含事件的一种应用. 如习题 16 中的 $P(A)$ 以及 $P(B_2)$ 都是如此.

19. 用 3 个机床加工同一种零件,零件由各机床加工的概率分别为 0.5, 0.3, 0.2. 各机床加工的零件合格率分别为 0.94, 0.9, 0.95, 求整批产品的合格率.

解 设事件 B=“产品为合格品”,A_i=“产品为 3 个机床中的第 i 个机床加工的”. $i=1,2,3$,依题意 A_1,A_2,A_3 是一完备事件组,$P(B)$ 待求,且

$$P(A_1)=0.5,\quad P(A_2)=0.3,\quad P(A_3)=0.2$$

$$P(B|A_1)=0.94,\quad P(B|A_2)=0.9,\quad P(B|A_3)=0.95$$

应用全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.5\times0.94+0.3\times0.9+0.2\times0.95=0.93$$

20. 一个机床有 1/3 的时间加工零件 A,其余时间加工零件 B,加工零件 A 时,停机的概率是 0.3,加工零件 B 时,停机的概率是 0.4,求这个机床停机的概率.

解 设事件 B=“机床停机”,A=“机床加工零件 A”,依题意,

$$P(A)=\frac{1}{3},\quad P(\overline{A})=\frac{2}{3},\quad P(B|A)=0.3,\quad P(B|\overline{A})=0.4$$

应用全概率公式

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=\frac{1}{3}\times0.3+\frac{2}{3}\times0.4=0.367\end{aligned}$$

21. 甲、乙两部机器制造大量的同一种零件,根据过去资料,甲机器制造出的零件废品率为 1%,乙机器生产的零件废品率为 2%. 现有同一机器制造的一批零件. 估计它们是乙机器制造的可能性比它们是甲机器制造的可能性大一倍,现从该批零件中任取 1 件,经检验是废品. 试从该检验结果计算这批零件是由甲机器生产的概率.

解 设事件 B=“取出的 1 个零件是废品”,A=“取出的 1 个零件为甲机器生产”. $\overline{A}$=“取出的零件为乙机器生产”. 条件概率 $P(A|B)$ 待求. 依题意,

$$P(A)=1/3,\quad P(\overline{A})=2/3,\quad P(B|A)=0.01,\quad P(B|\overline{A})=0.02$$