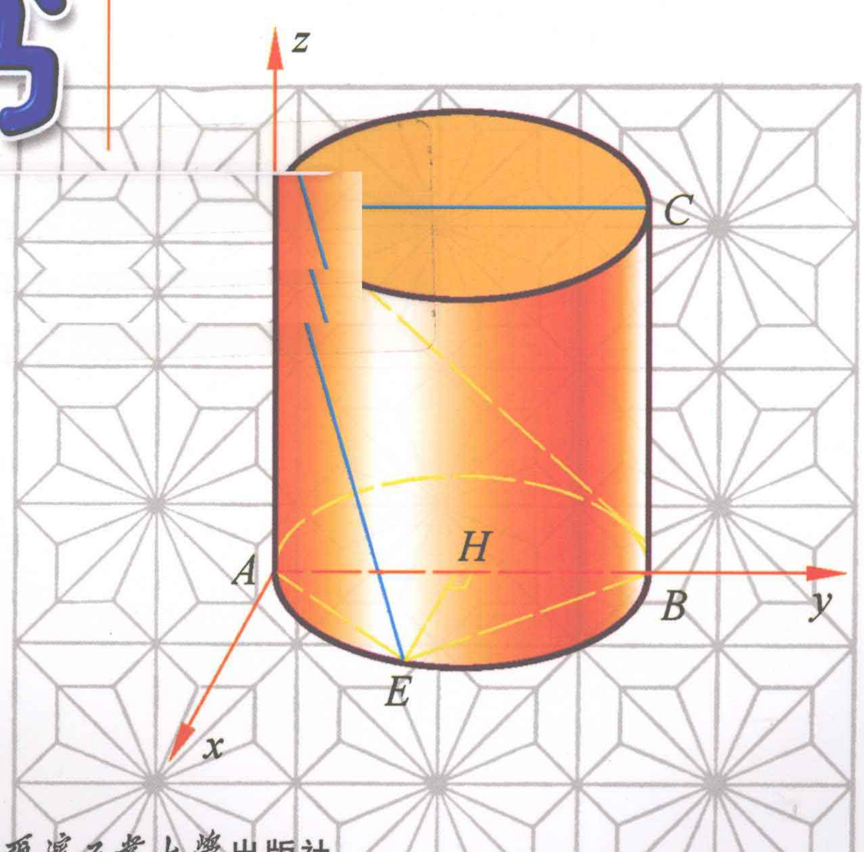
新编中学数学解题方法全书

（高考精华卷）

主编　陈小鹏　邵德彪

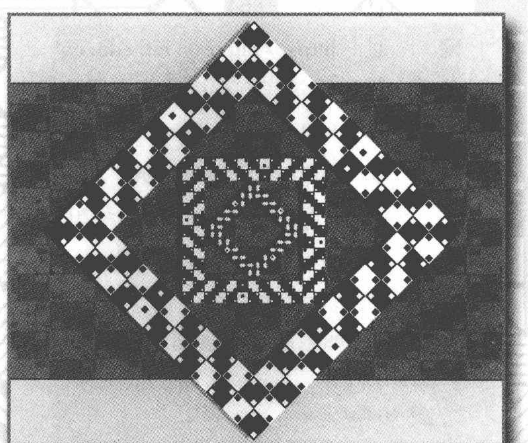


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS
HITP

新编中学数学解题方法全书

（高考精华卷）

策　划　刘　勋　王世堃　王成维



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书遴选了2007年、2008年、2009年及2010年试题中长考不懈的典型题目，并以2010年试题为主分门别类，整合成以显示“区分度”为准的“精品试题汇编”，并且从实际出发，对各章节的体系作出了更为合理的调整，既有“简解”，又有周详的思维过程和解题程序，不仅有利于考生在应试第一卷时稳操胜券，而且对考生攻克第二卷解答也是一种有效的备战演习。

本书适合高中师生及数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书. 高考精华卷/陈小鹏，邵德彪主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.3

ISBN 978-7-5603-3208-6

Ⅰ.①新… Ⅱ.①陈… ②邵… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解-升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第036332号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张永芹
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 880mm×1230mm 1/16 印张39 字数849千字
版 次 2011年3月第1版 2011年3月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3208-6
定 价 68.00元

前　　言

2007年、2008年我们相继编写了《高考数学试题解法研究与点拨评析》。编写过程中,我们从命题立意、考查要点及解题思路等方面对试题进行了详尽的剖析和深入的探索。它不同于东拼西凑罗列题解的版本,因此受到了广大师生及数学教研人员的欢迎。

2009年高考结束不久,一名考生的家长(一名资深的数学教师)来电,他提出了一个十分中肯的建议:"……学生不仅需要知道题目'怎么做',更需要了解的是'怎么想',为什么'这样想'……希望你们立足于'审题',做好下一本书。"为此,我们从2009年起将原有的体例改为《审题要津与解法研究》。

"审题"应当是贯穿于解题全过程的思考行为。了解、整合题目给出的条件是"审题",挖掘隐含信息的是"审题",解题过程中搜寻随机信息的是"审题"。

高考考的就是"审题"!将这种理念传输给读者,就需要对700余道试题进行探究并付诸于文字谈何容易!这在各种版本的教辅书中是从无先例的,但读者的要求,就是指令。以生为本是教师的责任,迎难而上是有志者的个性,我们决心做一次"第一个吃螃蟹的人"。着墨于"审题要津",越写越觉得心明眼亮——这竟是一个"自我启迪"的过程。审题率先到位,题解也一气呵成。兴奋之余,更希

望广大考生也分享这种喜悦，而这正是我们的初衷。

今年8月初，持续高温，正当我们为编写2010年试题伏案捉刀时，四川一位编者来电："……像往年一样，把试卷的每一道题都编进去，有这个必要吗？有些题目像白开水，无滋无味，一目了然；而有些题又难得出奇，连尖子生都望而生畏。在没有什么"区分度"的题目上做文章，岂不浪费笔墨，耽误时间？"针对他的想法，我们又征求了一些学校师生的意见，大家一致认为这个建议提得很好。

为了不负众望，我们决定从2007年、2008年、2009年及2010年的试题中筛选出长考不懈的典型题目，并以2010年试题为主分门别类，整合成以显示"区分度"为准的"精品试题汇编"。对入选的07年、08年的试题重新补写"审题要津"，对其中的解答题(包括09年的试题)一律改为每问都写出审题过程。补写、改写加新编，工程之大可想而知，然而在"这本书一定会比往年的书更受欢迎"这一信念的支持和诸多教师的勉励下，我们奋起拼搏，日夜兼程，反复推敲，数易其稿，历时近五个月，终于杀青。

本书以2010年试题为主，从实用出发，对各章节的体系作出了更为合理的调整。

本书在编写"函数"、"数列"、"三角函数"、"向量"、"不等式"、"圆锥曲线"、"立体几何"、"导数"、"新定义"等重要章节时，精心遴选了数量较多的选择、填空题。既有"简解"，又有周详的思维过程和解题程序。这样做，不仅有利于考生在应试第一卷时稳操胜券，而且对攻克第二卷解答题也是一种有效的备战演习。一石二鸟，何乐不为？这正是本书最具特色的亮点。

本书在各章节的题目排序上，绞尽脑汁地做了大量深入细致的工作，有利于教师备课选材，更有利于学生循序渐进、举一反三。长年从事高考把关教学的教师，也一定会从中窥见高考命题人"万变不离其宗"的命题准则。

本书的立意受到了各地教师的关切，也得到了王连笑、储瑞年、周沛耕等名师的支持。

后期参加本书勘误工作的有天津市南开中学张广民，天津市47中学孔德民、兰志江、闫天霞、纪秋华、朱学忠、刘素敏、张盈盈、李蕊、董正业、曹晓辉、谭立召等老师及耀华中学朱振民同学，在此一并致谢。

编委会

2010年10月25日

目　录

第一章　集合与简易逻辑

本章试题考点举要：涉及本章知识的试题主要有三类：1. 基本题型，此类题目以客观题的形式出现，主要涉及集合运算、简单不等式、命题、充要条件等；2. 小综合题，也是以客观题的形式出现，以本章知识为载体，与其他章节知识结合；3. 大综合题，与不等式、向量、函数、方程等知识交汇，综合考查解题能力. 解决本章试题，需要有坚实的知识基础、扎实的解题基本功以及基本的数学素养，解题时应注意隐含条件等各种陷阱，并善于灵活运用数形结合、分类讨论等解题思想.

1.1　集合的概念与集合运算

题目1(09 山东　文1 理1) 集合 $A=\{0,2,a\}, B=\{1,a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 a 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【审题要津】 由题设知 $A\cup B$ 的元素个数为 A,B 两集合的元素个数之和，即是说"A,B 中没有公共元素"，这正是解答本题的切入点.

解　依题意，有 $\{a,a^2\}=\{4,16\}$，所以只能是 $a=4, a^2=16$. 故选 D.

【解法研究】 注意到 $A\cup B=\{0,1,2,a,a^2\}=\{0,1,2,4,16\}$，从而"一锤定音".

(王文清供解)

题目2(10 辽宁　理1) 已知 A,B 均为集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$ 的子集，且 $A\cap B=\{3\}$，$(\complement_U B)\cap A=\{9\}$，则 $A=$(　　).

A. $\{1,3\}$　　B. $\{3,7,9\}$　　C. $\{3,5,9\}$　　D. $\{3,9\}$

【审题要津】 由 $A\cap B=\{3\}$，即知 $3\in A$，又因为 $A\cap(\complement_U B)=\{9\}$，所以 $9\in A$，且 $9\in\complement_U B$，于是由集合运算可解.

解　由 $(A\cap B)\cup(A\cap\complement_U B)=A\cap U=A$，即知 $A=\{3,9\}$. 故选 D.

【解法研究】 解答本题的另一个思路是，因为 $B\cup(\complement_U B)=U=\{1,3,5,7,9\}$，由 $9\in\complement_U B$，即知 $B=\{1,3,5,7\}$，于是由 $3\in A, 9\in A$ 即可确定 $A=\{3,9\}$.　(邵立武供解)

题目3(08 山东　文1 理1) 满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$ 的集合 M 的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【审题要津】 在集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 的子集中，找出既含有 a_1,a_2 又不含有 a_3 的集合个数即可.

解　因为 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$. 所以 $M=\{a_1,a_2\}$ 或 $M=$

$\{a_1, a_2, a_4\}$. 选 B.

【解法研究】实际上,$M = \{a_1, a_2\} \cup X$,其中 $X \subseteq \{a_4\}$. M 的个数取决于 X 的个数.

(邵德彪供解)

题目4(10 江西　理2) 若集合 $A = \{x \mid |x| \leqslant 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$,则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$　　B. $A = \{x \mid x \geqslant 0\}$

C. $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$　　D. $\varnothing$

【审题要津】只需注意到 $B = \{y \mid y \geqslant 0, x \in \mathbf{R}\}$ 即可由集合交集运算求解.

解　因为 $A = [-1, 1]$, $B = [0, +\infty)$,所以 $A \cap B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. 故选 C.

【解法研究】如果被题设条件"$B = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$"中字母的设置所迷惑,则会作出错误判断. 透过现象抓本质,是对学好数学的基本要求.　(褚艳春供解)

题目5(07 全国 Ⅰ　理5) 设 $a, b \in \mathbf{R}$,集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$,则 $b - a = (\quad)$.

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【审题要津】两个集合中,每个集合均有"一明两暗"的三个元素,从"一一对应"角度分析,因为 $1 \neq 0$,所以 $a+b$ 和 a 中必有其一为 0,但 $a = 0$ 时,$\frac{b}{a}$ 无意义,故只有 $a + b = 0$. 于是两个集合分别为 $\{1, 0, a\}$, $\{0, -1, b\}$.

解法1　由以上推理,只有 $a = -1$, $b = 1$,所以 $b - a = 2$. 选 C.

解法2　由 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$ 得 $a \neq 0$ 且 $\begin{cases} 1 + a + b + a = 0 + \frac{b}{a} + b \\ 1 \cdot (a+b) \cdot a = 0 \cdot \frac{b}{a} \cdot b \end{cases}$,即

$\begin{cases} 2a = -1 + \frac{b}{a} \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$,所以 $b - a = 2$. 选 C.

【解法研究】本题着重考查了集合中元素的互异性、无序性,活而不难,巧而不偏. 解法1的推理,严谨有序,步步紧逼;解法2的推算,把握实质,整体处理. 两种解法均值得借鉴.

(孟贵增供解)

题目6(07 福建　理3) 已知集合 $A = \{x \mid x < a\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 2\}$,且 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $a \leqslant 1$　　B. $a < 1$　　C. $a \geqslant 2$　　D. $a > 2$

【审题要津】满足 $X \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$ 的集合 X 中,"最小"的是 $X = B$. 要使 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$ 成立,其充要条件是 $A \supseteq B$.

解　接审题要津,注意到 A, B 均为开区间,右端点可重合. 如图1, $a \geqslant 2$. 选 C.

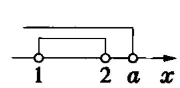


图1

【解法研究】面对这类含参数的不等式的集合问题,利用数轴直观求解为宜. 这里极易出现的错误是忽略 $a = 2$ 而选 D. 避免这种闪失的方法是单独验证端点.

(邵德彪供解)

题目7(10 安徽　理2) 若集合 $A = \left\{x \mid \log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$,则$\complement_{\mathbf{R}} A = ($　　$)$.

A. $(-\infty,0] \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$　　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

C. $(-\infty,0] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$　　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

【审题要津】将题设集合 A 表示成为区间形式,即可求解.

解　由 $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \frac{1}{2}$, 即 $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可得 $0 < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $A = \left\{x \mid 0 < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$,于是$\complement_{\mathbf{R}} A = (-\infty,0] \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. 故选 A.

【解法研究】实际上,本题要求不过是一个解简单对数不等式的问题. 上述求解中,对不等式右端的处理体现了追求“和谐化”的解题思路.　　　　(褚艳春供解)

题目8(10湖北　理2) 设集合$A = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1\}$,$B = \{(x,y) \mid y = 3^x\}$,则$A \cap B$的子集的个数是(　　).

A. 4　　　B. 3　　　C. 2　　　D. 1

【审题要津】注意到集合A,B均为直角坐标系下的点,因此可利用数形结合的方法解决问题.

解　显然曲线$y = 3^x$与椭圆$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$有两个交点. 又因为$\varnothing \subseteq A \cap B$,$A \cap B \subseteq A \cap B$,所以$A \cap B$的子集个数为4. 故选 A.

【解法研究】由曲线$y = 3^x$过点$(0,1)$,而点$(0,1)$又在已知椭圆内部,因此不必实践画图也可确定曲线$y = 3^x$与椭圆有两个交点. 但据此认为所求子集为个数为2,则属不该原谅的审题失误.　　　　(褚艳春供解)

题目9(09 江苏　11) 已知集合$A = \{x \mid \log_2 x \leqslant 2\}$,$B = (-\infty,a)$,若$A \subseteq B$,则实数$a$的取值范围是$(c, +\infty)$,其中$c =$ ______.

【审题要津】由对数函数单调性即可确定集合A,从而通过集合的子集运算即可求解.

解　由已知条件,可得$A = \{x \mid \log_2 x \leqslant 2\} = (0,4]$,又$B = (-\infty,a)$,若$A \subseteq B$,则$a > 4$,故$c = 4$.

【解法研究】B为开区间且a的取值范围也是开区间$(c, +\infty)$,从而已无任何“陷阱”可言. 只需直接求a的范围对照即可.　　　　(邵德彪供解)

题目10(07 北京　理12) 已知集合$A = \{x \mid |x - a| \leqslant 1\}$,$B = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \geqslant 0\}$. 若$A \cap B = \varnothing$,则实数$a$的取值范围是________.

【审题要津】首先将集合A和集合B分别“具体化”,然后利用数轴标注法求解.

解　容易求得$A = \{x \mid a - 1 \leqslant x \leqslant a + 1\}$,$B = \{x \mid x \leqslant 1$或$x \geqslant 4\}$. 因为$A \cap B = \varnothing$,所以$\begin{cases} a + 1 < 4 \\ a - 1 > 1 \end{cases}$,故$2 < a < 3$.

【解法研究】除了利用数轴直接求解外,也可做如下解:$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \complement_{\mathbf{R}} B$. $\complement_{\mathbf{R}} B = (1,$

4) 而 $A=[a-1,a+1]$. 注意到端点的开、闭,得 $2<a<3$,若注意到 a 是区间 A 的中心,A 的"半径"为 1,则利用数轴以"形"助解亦可得出结论. (邵德彪供解)

题目 11(07 北京　文 15) 记关于 x 的不等式 $\dfrac{x-a}{x+1}<0$ 的解集为 P,不等式 $|x-1|\leqslant 1$ 的解集为 Q.

(Ⅰ) 若 $a=3$,求 P;

(Ⅱ) 若 $Q\subseteq P$,求正数 a 的取值范围.

【审题要津】(Ⅰ) 无需多言;(Ⅱ) 注意到 $Q=[0,2]$,及 $Q\subseteq P$,即知 P 的形式不能是 $(a,-1)$,而应是 $(-1,a)$,且 $a>2$.

解　(Ⅰ) 由 $\dfrac{x-3}{x+1}<0$,得 $P=\{x\mid -1<x<3\}$.

(Ⅱ) $Q=\{x\mid |x-1|\leqslant 1\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$. 由 $a>0$,得 $P=\{x\mid -1<x<a\}$,又因为 $Q\subseteq P$,所以 $a>2$,即 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

【解法研究】如审题要津中的分析.(Ⅱ) 中 a 为正数的条件是多余的,"多此一举"也许是出于降低思维难度的考虑. 然而,对区间端点给予额外关注还是必要的. (邵德彪供解)

题目 12(09 天津　文 13) 设全集 $U=A\cup B=\{x\in \mathbf{N}^*\mid \lg x<1\}$,若 $A\cap(\complement_U B)=\{m\mid m=2n+1,n=0,1,2,3,4\}$,则集合 $B=$ ________.

【审题要津】通过解不等式 $\lg x<\lg 10(x\in\mathbf{N}^*)$,先求出 U,再结合韦恩图研究. 此时由 $A\cap(\complement_U B)$,可知 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\varnothing$,于是 $\complement_U B=U\cap(\complement_U B)=[(\complement_U A)\cup A]\cap(\complement_U B)=[(\complement_U A)\cap(\complement_U B)]\cup[A\cap(\complement_U B)]$.

解　因为 $U=A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,又 $A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5,7,9\}$,则 $B=\{2,4,6,8\}$.

【解法研究】深刻思考,全面理解"$U=A\cup B$"的作用是关键. 在这个前提下,必有 $U=(A\cap\complement_U B)\cup B$,且 $(A\cap\complement_U B)\cap B=\varnothing$(图 2),因此 $B=\{2,4,6,8\}$. 须知,由题设条件是求不出集合 A 的. 利用韦恩图的直观性,不仅有助于提高解题效率,而且也可以对以上论述作出明示. 从题目要求来看,也没有必要求出 A 来. (王世堃供解)

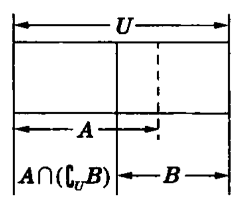


图 2

题目 13(07 安徽　理 5) 若 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2\leqslant 2^{2-x}<8\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid |\log_2 x|>1\}$,则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素个数为(　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【审题要津】依题设,$A=(-1,1]$. 但 $x\in\mathbf{Z}$,于是 $A=\{0,1\}$;$B=(0,\dfrac{1}{2})\cup(2,+\infty)$.

解　$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,0]\cup[\dfrac{1}{2},2]$,$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{0,1\}$. 故选 C.

【解法研究】求 B 时必须注意定义域,而求 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 时,由于全集为 $\mathbf{R}$,则不应再受定义域"束缚". 不注意这一点,则容易漏掉 $(-\infty,0]$. (邵德彪供解)

题目 14(09 江西　理 3) 已知全集 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素,$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 中有 n 个元素. 若 $A\cap B$ 非空,则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　).

A. mn　　B. $m+n$　　C. $n-m$　　D. $m-n$

【审题要津】利用公式$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$或借助韦恩图(图3)可使问题简明.

解　$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$,显然$A\cap B$的元素个数为$m-n$,选D.

【解法研究】事实上,设$M=A\cap B,N=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,有$M\cap N=\varnothing,M\cup N=U$,从而$\mathrm{Card}(U)=\mathrm{Card}(M)+\mathrm{Card}(N)$.此外,设$A\cap B$的元素个数为$x$,由题意恒有$0<x<m$,只有D满足.　　(刘勋供解)

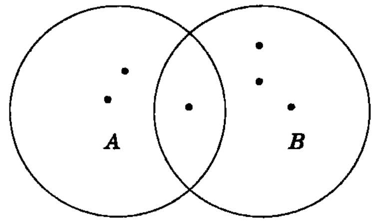


图3

题目15(09湖南　文9理9)某班共30人,其中15人喜爱篮球运动,10人喜爱乒乓球运动,8人对这两项运动都不喜爱,则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为________.

【审题要津】仅喜爱篮球的人当然含在喜爱篮球的15人里,只需从15人中排除两项运动都喜欢的人即可.

解　由$(15+10+8)-30=3$,得两项都喜爱的人数为3,于是所求人数为$15-3=12$.

【解法研究】设喜爱篮球与喜爱乒乓球的人组成的集合分别为A,B.全班的人组成全集U.则U被严格地划分为四部分:$U_1=A\cap(\complement_U B),U_2=B\cap(\complement_U A),U_3=A\cap B,U_4=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$,且$U_1\cup U_2\cup U_3\cup U_4=U,U_i\cap U_j=\varnothing(i,j=1,2,3,4,i\neq j)$.$U_1\cup U_3=A,U_2\cup U_3=B$,题目问的是$\mathrm{Card}(U_1)$,当然关键是求$\mathrm{Card}(U_3)$.解答中的$15+10+8=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(U_4)=\mathrm{Card}(U_1)+\mathrm{Card}(U_2)+2\mathrm{Card}(U_3)+\mathrm{Card}(U_4)=30+\mathrm{Card}(U_3)$.于是$\mathrm{Card}(U_3)=3,\mathrm{Card}(U_1)=\mathrm{Card}(A)-\mathrm{Card}(U_3)=12$.　　(邵德彪供解)

题目16(09陕西　文16理14)某班有36名同学参加数学、物理、化学课外探究小组,每名同学至多参加两个小组.已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为26,15,13,同时参加数学和物理小组的有6人,同时参加物理和化学小组的有4人,则同时参加数学和化学小组的有________人.

【审题要津】将实际问题"数学化":把同时参加两个小组的人数视为交集元素的个数.由于各组中均有人跨两个学科,将3个组的人数加起来会有重复,好在没有人同时参加3个组,重复的数字就是所有3种同时跨两科的人数之和.

解法1　设同时参加数学和化学的人数为x,则$36=26+15+13-(6+4+x)$,解得$x=8$.

解法2　设同时参加数学和化学小组的有x人,画出韦恩图,由图4知$(20-x)+5+(9-x)+6+x+4=36$,解得$x=8$.

【解法研究】对这类文字冗长的应用题,审读时要特别关注题目表述中的关键语汇,可用"下划线"标注之,如本题"至多参加两个小组"一句.此外,更要"盯住"不同含义的数据.解法1很好地理解出"没有人参加3个组",于是将3个组的人数加起来产生的重复恰为3种同时跨两科的人数之和.这是分析和推理能力的体现.解法2则是为了避免重复,将全集更细地划分为互不重叠的6部分.在这里利用韦恩图是明智的.

(李歆、张东鸣供解)

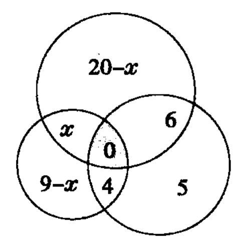


图4

题目17(09湖北　理1)已知$P=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(1,0)+m(0,1),m\in\mathbf{R}\},Q=\{\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{b}=(1,1)+n(-1,1),n\in\mathbf{R}\}$是两个向量集合,则$P\cap Q=(\quad)$.

A. $\{(1,1)\}$　　B. $\{(-1,1)\}$　　C. $\{(1,0)\}$　　D. $\{(0,1)\}$

【审题要津】首先要知道,对 $m,n\in\mathbf{R}$,P,Q 都是以向量为元素组成的集合,因此求 $P\cap Q$ 必须从"两个向量相等"这一条件入手.

解法1　(特殊值法)取 $m=1,n=0$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=(1,1)$,故 $P\cap Q=\{(1,1)\}$. 选 A.

解法2　$P=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(1,m),m\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{b}=(1-n,1+n),n\in\mathbf{R}\}$,由 $\begin{cases}1-n=1\\1+n=m\end{cases}$,$\begin{cases}n=0\\m=1\end{cases}$,$P\cap Q=\{(1,1)\}$,选 A.

【解法研究】还可关注 P,Q 的几何意义:由 $\boldsymbol{a}=(1,m)$ 可知,P 表示的是直线 $x=1$,类似地,由 $\boldsymbol{b}=(1-n,1+n)$,得知 Q 表示的是直线 $x+y=2$,二者联立,解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$,所以 $P\cap Q=\{(1,1)\}$.

(王成维供解)

题目18(07 江西　理6)若集合 $M=\{0,1,2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-2y+1\geqslant0$ 且 $x-2y-1\leqslant0,x,y\in M\}$,则 N 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 2

【审题要津】集合 M 中的元素已"一目了然",因此也要同时将集合 N 中的元素"具体化". 在这里,将集合 N 理解为 $N=N_1\cap N_2$,有利于分散难点走出困惑,其中 $N_1=\{(x,y)\mid x-2y+1\geqslant0$ 且 $x-2y-1\leqslant0\}$(它表示的是坐标平面内直线 $x-2y+1=0$ 及直线 $x-2y-1=0$ 所夹的"带状区域")$N_2=\{(x,y)\mid x,y\in M\}$(它表示的是散落在坐标平面的几个点).

解法1　如图5,作出集合 N_1 所指的可行域,整数集合 N_2 的 $3^2=9$ 个点中,位于区域内(含边界上)的点有4个. 选 C.

解法2　分类讨论:

当 $x=0$ 时,$-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$,所以 $y=0$;

当 $x=1$ 时,$0\leqslant y\leqslant1$,所以 $y=0$ 或 $y=1$;

当 $x=2$ 时,$\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{3}{2}$,所以 $y=1$.

综上所述,$N=\{(0,0),(1,0),(1,1),(2,1)\}$. 故选 C.

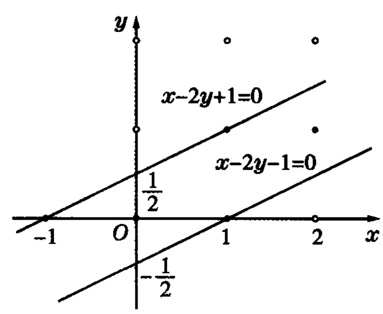


图5

【解法研究】解法1"化整为零"的方案起到了肢解难点的作用,此时以图助解顺理成章;解法2"分类讨论"体现了良好的数学素养.

(王成维、邵德彪供解)

题目19(10 福建　理9)对于复数 a,b,c,d,若集合 $S=\{a,b,c,d\}$ 具有性质"对任意 $x,y\in S$,必有 $xy\in S$",则当 $\begin{cases}a=1\\b^2=1\\c^2=b\end{cases}$ 时,$b+c+d$ 等于(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. i

【审题要津】依集合中元素的互异性,a,b,c,d 互不相同. 所以由 $\begin{cases}a=1\\b^2=1\\c^2=b\end{cases}$,解得

$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=\pm \mathrm{i} \end{cases}$，于是 $S_1=\{1,-1,\mathrm{i},d\}$ 或 $S_2=\{1,-1,-\mathrm{i},d\}$. 以下只需根据题设"对任意 $x,y\in S$，必有 $xy\in S$"，即可确定集合 S，从而求出 $b+c+d$. 在这里只需求出 d 即可.

解　由上对 S_1 有 $d=(-1)\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$；对 S_2 有 $d=(-1)\cdot(-\mathrm{i})=\mathrm{i}$，所以 $b+c+d=-1$. 故选 B.

【解法研究】 利用题设性质确定 d 时，不必考虑以 $a=1$ 为因数，即 $x=1$ 或 $y=1$ 的情况.

（王连笑供解）

题目 20（10 天津　文 7）设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 6\}$　　B. $\{a\mid a\leqslant 2$，或 $a\geqslant 4\}$

C. $\{a\mid a\leqslant 0$，或 $a\geqslant 6\}$　　D. $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 4\}$

【审题要津】 显然 $A=\{x\mid a-1<x<a+1,x\in\mathbf{R}\}$. 据此，结合数轴，由 $A\cap B=\varnothing$，即可作答.

解　依题意，应有 $a+1\leqslant 1$ 或 $a-1\geqslant 5$，解得 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 6$，故选 C.

【解法研究】 对这类给出信息"$A\cap B=\varnothing$"的问题，常以"彼开则此闭"或"彼闭则此开"的常规来应对之. 若将本题改为"$A\cap B\neq\varnothing$"，求 a 的取值范围，请读者自行考虑.

（王成维供解）

题目 21（10 天津　理 9）设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid |x-b|>2,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a,b 必满足（　　）.

A. $|a+b|\leqslant 3$　　B. $|a+b|\geqslant 3$　　C. $|a-b|\leqslant 3$　　D. $|a-b|\geqslant 3$

【审题要津】 借助数轴，由绝对值的几何意义易知 $A=\{x\mid a-1<x<a+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x<b-2$ 或 $x>b+2,x\in\mathbf{R}\}$，于是 $A\subseteq B\Leftrightarrow b-2\geqslant a+1$ 或 $b+2\leqslant a-1$：据此即可做出正确判断.

解　综上，$A\subseteq B\Leftrightarrow a-b\leqslant -3$ 或 $a-b\geqslant 3\Leftrightarrow |a-b|\geqslant 3$，故选 D.

【解法研究】 从题设条件的结构上分析，集合 A 表示数轴上去掉端点的连续"线段"，集合 B 表示去掉端点的两条"射线"，据此应排除 A，C. 以下利用赋值法（如令 $a=b=2$）又可排除 C，故选 D. 本题也可以将"$A\subseteq B$"转化为逻辑关系求解：因为 $A\subseteq B$，所以"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分条件，于是有"若 x 与 a 的距离小于 1，则 x 与 b 的距离一定大于 2". 如图 6，显然 $|a-b|\geqslant 3$.

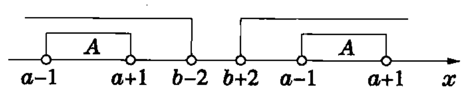


图 6

（王连笑供解）

1.2　逻辑联结词与四种命题

题目 1（10 广东　文 8）"$x>0$"是"$\sqrt[3]{x^2}>0$"成立的（　　）.

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 非充分非必要条件　　D. 充分必要条件

【审题要津】 由于“$\sqrt[3]{x^2}>0$”与“$x^2>0$”是等价的,所以所求即可转化为“$x>0$”与“$x^2>0$”之间的充要关系. 显然“$x>0$”是“$x^2>0$”的充分非必要条件. 故选 A.

【解法研究】 当 $x>0$ 时,$\sqrt[3]{x^2}>0$ 是显然的,但 $x=-2$ 时,$\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{(-2)^2}=\sqrt[3]{4}>0$,因此“$x>0$”不是“$\sqrt[3]{x^2}>0$”成立的必要条件.　　(褚艳春供解)

题目2(10天津　理3) 命题“若$f(x)$是奇函数,则$f(-x)$是奇函数”的否命题是(　　).

A. 若$f(x)$是偶函数,则$f(-x)$是偶函数

B. 若$f(x)$不是奇函数,则$f(-x)$不是奇函数

C. 若$f(-x)$是奇函数,则$f(x)$是奇函数

D. 若$f(-x)$不是奇函数,则$f(x)$不是奇函数

【审题要津】 只需了解命题“若$\neg p$,则$\neg q$”即可作出判断.

解　已知命题的否命题是“若$f(x)$不是奇函数,则$f(-x)$不是奇函数”. 故选 B.

【解法研究】“是”的否定即为“不是”. 由已知命题出发,描述其否命题,要注意的是,否定前提的同时也要否定结论. 但仍须保持原有的“若”前“则”后的顺序.　　(王成维供解)

题目3(10全国新课标　理5) 已知命题p_1:函数$y=2^x-2^{-x}$在$\mathbf{R}$上为增函数,p_2:函数$y=2^x+2^{-x}$在$\mathbf{R}$上为减函数,则在命题$q_1:p_1\vee p_2$,$q_2:p_1\wedge p_2$,$q_3:(\neg p_1)\vee p_2$和$q_4:p_1\wedge(\neg p_2)$中,真命题是(　　).

A. q_1,q_3　　B. q_2,q_3　　C. q_1,q_4　　D. q_2,q_4

【审题要津】 判断命题p_1,p_2的真假是确定命题q_1,q_2,q_3,q_4真假的先决条件.

解　考查命题p_1:因为函数$y=2^x-2^{-x}=2^x-\frac{1}{2^x}$,由“$2^x$及$-\frac{1}{2^x}$均为$\mathbf{R}$上的增函数”,故函数$y=2^x-2^{-x}$为$\mathbf{R}$上的增函数,从而$p_1$为真. 考查命题$p_2$:因为函数$y=2^x+2^{-x}$为$\mathbf{R}$上的偶函数,它不可能为$\mathbf{R}$上的减函数,所以$p_2$不真. 由复合命题的真值表,$q_1:p_1\vee p_2$为真;$q_2:p_1\wedge p_2$不真;$q_3:(\neg p_1)\vee p_2$不真;$q_4:p_1\wedge(\neg p_2)$为真. 故真命题是$q_1,q_4$. 选 C.

【解法研究】p_1,p_2的真假亦可通过求导做出判断. 实际上,由p_1为真,p_2不真,即知q_2不真,于是可以排除 B,D. 由“$\neg p_1$”不真又可排除 A. 故选 C.　　(王成维供解)

题目4(10广东　理5)“$m<\frac{1}{4}$”是“一元二次方程$x^2+x+m=0$有实数解”的(　　).

A. 充分非必要条件　　B. 充分必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 非充分非必要条件

【审题要津】 众所周知,“一元二次方程x^2+x+m有实数解”等价于其判别式$\Delta=1-4m\geqslant 0$,于是针对所求,只需分析“$m<\frac{1}{4}$”与“$1-4m\geqslant 0$”之间的逻辑关系.

解法1　由$x^2+x+m=0$知,$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1-4m}{4}\geqslant 0\Leftrightarrow m\leqslant\frac{1}{4}$,则一元二次方程$x^2+x+m=0$有实数解的充分必要条件是$m\leqslant\frac{1}{4}$,所以“$m<\frac{1}{4}$”只是“一元二次方程$x^2+x+m=0$有实数解”的充分非必要条件. 故选 A.

解法2　当$m<\frac{1}{4}$时,方程的判别式$\Delta=1-4m>0$,所以一元二次方程$x^2+x+m=$

0有实数解. 当一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解,则 $\Delta=1-4m\geqslant 0$,即 $m\leqslant\frac{1}{4}$.

所以“$m<\frac{1}{4}$”只是“一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解”的充分非必要条件. 故选A.

【解法研究】 分析两个命题之间的等价性,可设法找出一个与其中之一等价的命题取代之. （王连笑供解）

题目5(07海南　文2理1) 已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R},\sin x\leqslant 1$,则(　　).

A. $\neg p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x\geqslant 1$　　B. $\neg p:\forall x\in\mathbf{R},\sin x\geqslant 1$

C. $\neg p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x>1$　　D. $\neg p:\forall x\in\mathbf{R},\sin x>1$

【审题要津】 本题涉及量词及其否定,掌握全称命题与特称命题的关键是——全称命题的否定是特称命题;特称命题的否定是全称命题.

解　$\neg p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x>1$. 故选C.

【解法研究】 了解逻辑联结词 $\wedge,\vee,\neg$ 的意义,其中 $\neg p$ 是命题的否定,命题 p:“$\forall x\in\mathbf{R},\sin x\leqslant 1$”表示对于集合 $\mathbf{R}$ 的任何一个元素 x,都有 $\sin x\leqslant 1$,命题 $\neg p$ 表示集合 $\mathbf{R}$ 中至少存在一个 x_0 使 $\sin x_0>1$ 即 $\exists x\in\mathbf{R},\sin x>1$. （李士铭供解）

题目6(07海南　文2理1) 下列命题中的假命题是(　　).

A. $\forall x\in\mathbf{R},2^{x-1}>0$　　B. $\forall x\in\mathbf{N}^*,(x-1)^2>0$

C. $\exists x\in\mathbf{R},\lg x<1$　　D. $\exists x\in\mathbf{R},\tan x=2$

【审题要津】 只须清楚 $(x-1)^2$ 是非负数即可.

解　对于A,由指数函数性质即知其真;对于C,由 $\lg 1=0$,即知其真;对于D,由 $x\in\mathbf{R}$,$\tan x\in(-\infty,+\infty)$ 及其连续性即知其真.

【解法研究】 本题也可结合题设函数的图象作出判断. 利用单位圆的正切线,完全也可作出使其正弦值为2的角. （李士铭供解）

题目7(08广东　理6) 已知命题 p:所有有理数都是实数,命题 q:正数的对数都是负数,则下列命题中为真命题的是(　　).

A. $(\neg p)\vee q$　　B. $p\wedge q$　　C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\vee(\neg q)$

【审题要津】 首先判定已知命题 p 和 q 的真、假,再判断各个复合命题的真、假.

解　因为 p 为真命题,q 为假命题,所以 $\neg p$ 为假命题,$\neg q$ 为真命题,得 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 为真命题. 选D.

【解法研究】 p,q 之中有一真,则 $p\vee q$ 为真;p,q 都为真,则 $p\wedge q$ 为真. （李士铭供解）

题目8(08山东　文4) 给出命题:若函数 $y=f(x)$ 是幂函数,则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中,真命题的个数是(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

【审题要津】 本题涉及四种命题的关系和命题的真假关系. 应首先判断所给命题的真假. 由于互为逆否命题的两个命题同真假,所以只需再判定逆命题或否命题其中的一个命题,就可做出正确选择.

解　原命题:“若 $f(x)$ 是幂函数,则 $f(x)$ 的图象不过第四象限”,此命题为真.

逆命题:“若函数 $f(x)$ 的图象不经过第四象限,则 $f(x)$ 是幂函数”而函数 $y=2^x$,其图象不

过第四象限,但不是幂函数,由此可见,该命题为假. 逆命题与否命题等价,所以否命题也假.

由原命题为真,故其逆否命题为真. 所以三个命题中只有 1 个为真,选 C.

【解法研究】函数的图象是重要的基础知识,函数图象形象直观地揭示函数的性质. 解答本题除去掌握四种命题的关系以外,还要掌握幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 及其他有关函数的图象.

(陈小鹏供解)

题目 9(09 天津　理 3) 命题"存在 $x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}\leqslant 0$"的否定是(　　).

A. 不存在 $x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}>0$　　B. 存在 $x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}\geqslant 0$

C. 对任意的 $x\in\mathbf{R},2^{x}\leqslant 0$　　D. 对任意的 $x\in\mathbf{R},2^{x}>0$

【审题要津】由题设信息知,不存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $2^{x_0}\leqslant 0$,语句转换即知选 D.

解　依题意,已知命题的否定,即是"对任意的 $x\in\mathbf{R}$,均有 $2^{x}>0$". 选 D.

【解法研究】从逻辑上讲,$\neg(\exists x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}\leqslant 0)=(\forall x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}>0)$. (王连笑供解)

题目 10(09 海南　文 4 理 5) 有四个关于三角函数的命题:

$p_1:\exists x\in\mathbf{R},\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$;　　$p_2:\exists x,y\in\mathbf{R},\sin(x-y)=\sin x-\sin y$;

$p_3:\forall x\in[0,\pi],\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$;　　$p_4:\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\dfrac{\pi}{2}$.

其中的假命题是(　　).

A. p_1,p_4　　B. p_2,p_4　　C. p_1,p_3　　D. p_2,p_3

【审题要津】首先要识别"$\exists$"及"$\forall$"的含义. 其次,从四个选项上分析,本题只需找出两个假命题即是. p_1 显然是假命题,从而可排除 B,D. 以下只需考查 A,C 两个选项. 在 p_3,p_4 中,或指出其中一个真命题,或指其中一个假命题,本题即可作答.

解法 1　结合审题要津,知 p_1 为假命题.

又由:$x=y=\dfrac{5\pi}{4}$ 时,有 $\sin x=\cos y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故 p_4 是假命题. 选 A.

解法 2　由 $\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,当 $x\in[0,\pi]$ 时,$\sin x\geqslant 0$,$\sin x=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$. 于是可判断 p_3 为真命题,故排除 C,D. 结合审题要津所述,p_1 为假命题,所以选 A. 除此之外,也可从考查 p_2 入手,令 $x=y=0$,显然有 $\sin(x-y)=\sin x-\sin y$,即 p_2 为真命题. 从而排除 B,D.(下略)选 A.

【解法研究】四个选项中,p_1,p_2 为"特称命题",量词为"$\exists$";p_3,p_4 为"全称命题",量词为"$\forall$"("$\forall$"虽然没在 p_4 中出现,这是所谓"量词省略",p_4 的含义是:"所有满足 $\sin x=\cos y$ 的 x,y 必然满足 $x+y=\dfrac{\pi}{2}$"). 否定全称命题往往从举反例入手(如解法 1),肯定全称命题则须论证之(如解法 2).

(王世堃供解)

题目 11(10 江西　理 9) 给出下列三个命题:

① 函数 $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 是同一函数;

② 若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则函数 $y=f(2x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2}g(x)$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称;