高级金融学译丛

Finance Textbook

〔澳〕埃克哈德·普拉滕 (Eckhard Platen)
大卫·西斯 (David Heath) 著

陈代云 译

数理金融基准分析法

A BENCHMARK APPROACH TO QUANTITATIVE FINANCE

格致出版社 上海人民出版社

〔澳〕埃克哈德·普拉滕 (Eckhard Platen)
大卫·西斯 (David Heath) 著
陈代云 译

Finance Textbook

数理金融基准分析法

A BENCHMARK APPROACH TO QUANTITATIVE FINANCE

格致出版社 上海人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

数理金融基准分析法/（澳）普拉滕（Platen，E.），（澳）西斯（Heath，D.）著；陈代云译. —上海：格致出版社：上海人民出版社，2010
（高级金融学译丛）
ISBN 978－7－5432－1852－9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①普…②西…③陈… Ⅲ. ①金融学：数理经济学－数学分析 Ⅳ. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 214558 号

责任编辑　谷　雨
封面装帧　人马艺术工作室・储平

高级金融学译丛
数理金融基准分析法
［澳］埃克哈德・普拉滕　大卫・西斯　著
陈代云　译

出　版　世纪出版集团　www.ewen.cc
格致出版社　www.hibooks.cn
上海人民出版社
（200001　上海福建中路193号24层）

编辑部热线 021－63914988
市场部热线 021－63914081

发　行　世纪出版集团发行中心
印　刷　上海书刊印刷有限公司
开　本　787×1092 毫米　1/16
印　张　43
插　页　2
字　数　829,000
版　次　2011 年 1 月第 1 版
印　次　2011 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5432－1852－9/F・342
定　价　78.00 元

Preface

前 言

近年来，基于金融衍生工具的产品已经成为风险管理者和投资者手中必不可少的工具。几乎在每一个商业机构和个人的资产组合中都可以找到保险产品的踪影。共同基金和养老基金的管理也日益得到个人投资者的认可。银行、保险公司和其他公司对运用金融和保险工具对风险进行积极管理的依赖性逐渐增强。同时，越来越多的证券的交易风险可以通过某种方式的对冲以满足特定投资者和公司的个性化需求。因此，能否高效率地处理和利用现代数量方法已经成为决定市场参与者在金融和保险领域中处于何种竞争地位的关键因素。基于这些原因，金融机构、保险公司和其他公司必须重视对数量金融领域专业技术的投入，而正是在这些领域，相关的新的数量方法和技术层出不穷，发生着日新月异的变化。

本书旨在为读者提供一本关于数量金融的入门读物。更准确地讲，是提供一个关于金融建模、衍生工具定价、投资组合选择和风险管理中常用的数学工具框架的入门介绍。本书介绍的基准方法为风险和绩效管理提供了一个统一的分析框架。与时下数理金融流行的分析范式相比，这一分析框架存在着一些差别，这一点将在本书中得到系统的、严谨的论述。

本书的基准方法是一个选择增长最优投资组合(growth optimal portfolio)作为计价物，将真实世界的概率测度作为定价测度的方法。等价风险中性概率测度的存在性不再是必要的条件，这就是本书中基准方法不同于其他传统数理金融教材的地方。根据我们的经验，许多实务界人士欣然接受真实世界概率测度，因为这样做更为自然，而且，在风险中性的概率测度不存在的情况下他们仍然能够对衍生工具进行定价。

我们试图让本书实现多重目标，它将为广大的专业人士、学者和研究生提供信息和各种方法。它适合三类读者。第一类读者包括金融分析师，以及在投资、银行和保险行业的实务界人士，本书将为其提供非常有用的信息。另外，包括在金融软件公司、对冲基金公司、咨询界以及监管机构的其他专业人士也将从阅读本书中获益。第二类读者是具有良好的数理基

础的数理金融领域的人士。工程学、计算机科学、数值分析，物理学、理论化学、生物学、天文学、统计学、计量经济学、精算学和其他学科的读者也可以经由本书而进入数理金融领域。第三类读者，也就是金融数学领域的研究者也将会发现本书最后几个章节非常有趣且具有一定的挑战性。当然，本书的重要目的之一在于促进对于基准方法的进一步发展。

本书各章节自成体系，与金融相关的概率与统计、随机微积分、优化问题和数值方法都在本书中得到了介绍，可以作为数理金融专业硕士或博士课程材料的一部分。本书采用模块化的编写方式，相关内容，如定义、公式和结论可以方便地交互参考和检索查阅，因此本书也可以作为一个手册使用。

本书分为 15 章。第 1 章和第 2 章概述了数理金融中的关键的概率论和统计学内容。第 2 章的结尾部分包括了对指数的对数收益分布的统计分析。

第 3 章和第 4 章介绍了随机过程。与金融建模中使用的微分方程相关的随机微积分在第 5 到第 7 章中得到了介绍。对于带跳跃的随机微分方程，仅从金融的角度做介绍。有些材料可能超出一般的教科书的难度。

第 8 章从动态对冲的角度介绍了一些基本的金融衍生产品。本章对欧式认购期权、欧式认沽期权的 Black-Scholes 方程定价，以及各参数的敏感性分析进行了介绍。而本章中对于动态对冲的模拟，则可以让读者更深刻地理解衍生产品的定价与对冲的本质。

第 9 章介绍了其他的定价方法。本章首先介绍了“真实世界定价”的概念。我们可以发现其他的几种定价方法，包括精算法、风险中性定价以及变换计价物定价等，都可以作为“真实世界定价”的特例。在基准方法框架内，等价风险中性概率测度存在与否不再是一个必要条件。本章最后介绍了 Girsanov 定理、贝叶斯法则和 Feynmam-Kac 公式。

第 10 章在基准方法下构建了一个统一的连续金融市场建模框架。本章提出了一些与时下主流方法不同的新概念和新思想。对投资分散化定理的推导表明，在一些正则条件下，一个分散的投资组合将近似于增长最优组合。这使得我们可以将一个分散化的市场指数视为增长最优的组合。

第 11 章推导了通过最大化夏普比率得到的最优化投资组合。资本资产定价模型、马柯维茨有效边界、两基金分离定理以及期望效用最大化、效用无差异定价、衍生工具的定价与对冲等在此章均有笔墨。

第 12 章讨论了基准方法下股票市场指数的随机波动率建模问题。本章分析了指数衍生产品在一些不以等价风险中性概率测度的存在性为基础条件的模型下的定价问题。标准风险中性方法所允许之外的广义波动率模型在本章也有所涉及。

第 13 章探讨了时间转换的四维平方贝塞尔动态过程中的增长最优组合的贴现问题。在本章，我们通过假定贴现增长最优组合的漂移率是时间的函数，得到了最小市场模型(minimal market model)。利用这一模型所得到的衍生产品的价格更加符合现实情况，长期衍生产品的

定价更为现实可行。这些价格与风险中性定价所得到的结果有比较大的偏离，这是因为经过几年之后，假想的风险中性测度其总质量将远远小于 1。本章对随机量度下的最小市场模型进行了推广。

在第 14 章我们引入跳跃模型以考虑事件风险因素的影响。在本章中，我们对前面章节中所讨论的模型的结果进一步放松，将其推广到引入跳跃和扩散的市场。我们用两个市场模型说明了在标准的风险中性和基准方法两个框架之内衍生产品定价存在的差异。

最后，第 15 章是对数理金融中基本数值方法的一个简单介绍。这些介绍包括情景模拟，蒙特卡洛模拟，树型方法和有限差分方法。本章构建了一个基准方法下的二叉树模型，并对有限差分法在耦合常微分方程中的应用做了说明。

每章精选的练习有助于读者提高技能并检查对本章主题的理解程度。本书最后也附带了这些练习的答案。本书可以作为不同程度的课堂材料使用。在各章中，大部分第一节技术性色彩相对较弱，而有些小节包含了带有(*)的标志的内容，这些带(*)的内容技术色彩较重，所以读者在第一次阅读过程中可以略过。

本书中的所有公式都标有包含章节的编号。假设、定理、引理、定义和推论都有连续编号。最为常用的符号列在本书的开始部分。

学习本书将非常具有挑战性，读者千万不要低估所要付出的努力。我们强烈建议读者完成每章的练习。这是一项必然会带来回报的工作，读者将对这门特别强调基准方法的数理金融中的重要方法产生深刻的理解。

在这，我们要向对本书初稿提出宝贵意见和建议的同事及博士生表示衷心的感谢。他们是 Nicola Bruti-Liberati, Carl Chiarella, Boris Choy, Morten Christensen, Marc Craddock, Ernst Eberlein, Robert Elliott, Kevin Fergusson, Chris Heyde, John van der Hoek, Hardy Hulley, Monique Jeanblanc, Leah Kelly, Truc Le, Shane Miller, Alex Novikov, Alun Pope, Wolfgang Runggaldier 和 Marc Yor。我们同样需要对 Katrin Platen 表达我们的感激，正是她组织了本书的所有技术工作，特别是本书中的一些图例。她仔细而又耐心地帮我们完成无法计数的手稿分类工作。最后，我们想感谢 Springer Verlag 的 Catriona Byrne 女士所做的出色的工作及在本书写作过程中对我们的鼓励。

如果读者能将本书中的任何内容错误，印刷错误或改进建议致邮：eckhard. platen@uts. edu. au，我们将十分感激！

有兴趣的读者可以在本书第一作者的网页上找到基准方法的最新信息，以及与本书相关的一些教学材料。具体网址是：

http://www.business.uts.edu.au/finance/staff/Eckhard/Benchmark_approach.html

埃克哈德·普拉滕(Eckhard Platen)，大卫·西斯(David Heath)

于悉尼

Acknowledgements

致谢

悉尼科技大学的数量金融研究中心、数学科学系、金融与经济学院和澳大利亚国立大学数学分析中心和金融数学研究中心在此为所得到的各界人士的长期支持表示感谢。本书的研究得到了 ARC 的资助，资助号为 DP0559879 和 DP0343913。基准化方法的研究从第一作者对瑞士联邦工学(ETH Zurich)、洪堡大学(Humboldt University)、牛顿研究所(Isaac Newton Institute)、京都大学(Kyoto University)、一桥大学(Hitotsubashi University)和哥伦比亚大学等的访问中受益良多。我们对这些机构的慷慨支持表示衷心感谢。

本书图表所使用的数据大部分都由汤姆逊金融 Datastream 所提供。图 13.1.1～图 13.3.2由全球金融数据(Global Financial Data)所提供的长期数据重新构造。作者感谢法国巴黎银行(BNP Paribas)的 Marek Musiela 提供了图 12.1.3 和图 12.1.4 中的隐含波动率曲面。图 12.3.5 的隐含波动率曲面数据来自于芝加哥期货交易所(CBOT)的公开数据。图 10.4.1 中的远期利率由美联储发布。经由 Taylor 和 Francis 的分支 Routledge 的许可，我们复制了 Fergusson 和 Platen(2006)发表在应用数学金融(*Applied Mathematical Finance*)的论文中的表 2.6.1和表 2.6.2 以及图 2.6.1～图 2.6.3。Taylor & Francis Press 同时许可本书使用 Heath 和 Platen(2002a)及 Heath 和 Platen(2006)发表在数理金融(*Quantitative Finance*)上的论文中的图 12.2.1～图 12.2.4 及图 12.3.1～图 12.3.7。图 10.6.5 由 Frank Howard 提供。经由 Springer Verlag 的许可，本书图 13.4.1～图 13.4.5 取自于 Heath & Platen(2005b)所发表在亚太金融市场(*Asia-Pacific Financial Markets*)的论文。此外，MATHEMATICA 是 Wolfram Research 所持有之商标，MSCI 是摩根斯坦利资本国际所持有之商标。

Contents

目 录

1 概率论预备知识

本章回顾了概率论的一些重要结论和确定所涉及的符号体系。首先，我们介绍了离散随机变量和连续随机变量以及它们的分布，接下来介绍了随机变量的矩的泛函，最后介绍一些多元分布以及技术性较强、难度较高的 *Copula* 分布。

1.1 离散随机变量及其分布

在金融市场中，人们可以观察到各种资产的价格，如股票、商品、外汇、期货、债券等。但是，要用模型来描述这些随机数字并得到满意的结果，显然是一件非常具有挑战性的工作。

对数收益率

假设我们观察资产在时间 $t_i = i\Delta,\ i \in \{0,\ 1,\ \cdots\}$ 时的价格，其中 $\Delta > 0$ 为时间步长，我们假定介于两个观察点之间的时间步长 Δ 为一天。如果 X_{t_i} 表示资产在 t_i 时刻的价格，那么对数收益率 $R_{t_i},\ i \in \{0,\ 1,\ \cdots\}$ 可以定义为

$$R_{t_i} = \ln(X_{t_{i+1}}) - \ln(X_{t_i}) = \ln\left(\frac{X_{t_{i+1}}}{X_{t_i}}\right)。 \tag{1.1.1}$$

我们将资产价格的每日对数收益率定义为每日资产价格的自然对数的增量。正如

我们后面将看到的，这样定义比较切合社会经济和金融市场中关于增长的本质特征。特别的，对数收益率可以在不同的模型中得到很好的应用。

本书介绍概率、统计、随机过程、随机微积分和随机微分方程时，着重强调对于对数收益率的建模。事实将表明，随机微分方程是金融建模的理想数学工具。在这一背景下，对数收益率则使得我们能够运用这一强大随机微积分工具，它所提供的便利，远非收益率的另一种定义

$$\widetilde{R}_{t_i} = \frac{X_{t_{i+1}} - X_{t_i}}{X_{t_i}}$$

所能相比。当收益率比较小的时候，这两个收益率的数值非常接近。我们也将看到，对数收益率在连续时间金融中更容易处理。

相对频率与概率

我们现在用一组实验的观察数据来解释对数收益率 R_{t_i}。为了简单起见，我们将对数收益率严格的分成负收益、零收益和正收益三大类，并将这三种结果或状态表示为 ω_1，ω_2，ω_3，分别代表我们观察到了负对数收益、零对数收益和正对数收益。我们将这些结果所构成的集合 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 叫做实验的样本空间。

如果我们重复这一实验 N 次，也就是说，我们观察到了这一个股票的 N 个交易日的对数收益率，我们用 $N(\omega_i)$表示观察到 ω_i 的次数，那么我们就可以计算出相对频率

$$f_i(N) = \frac{N(\omega_i)}{N}。$$

如果 N 不是很大的话，相对频率的数据变化很大。但是当 N 变得足够大的时候，这一数据将趋近于一个极限值 p_i，即

$$\lim_{N\to\infty} f_i(N) = p_i,$$

这就是我们所说的结果 ω_i 的概率。

为了说明上述例子，我们观察 1977 年到 1997 年期间，以美元计价的 IBM 的每日股价，如图 1.1.1。IBM 在此期间相应的对数收益率图为图 1.1.2。在图 1.1.3 中，我们展示了这一期间负对数收益、零对数收益和正对数收益相对频率 $f_1(t_i)$，$f_2(t_i)$和 $f_3(t_i)$。我们注意到经过期初一段很短时期的剧烈波动之后，负对数收益率的相对频率稳定在 $p_1 = 0.465$。相似的，我们得到了期末阶段的严格正对数收益的相对频率 $p_3 = 0.463$。同样，零对数收益的概率是接近于零的 $p_2 = 0.072$。很显然，我们得到 $0 \leqslant p_i \leqslant 1$，$i \in \{1,$

2, 3},并且 $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$,也就是说,p_1, p_2 和 p_3 相加等于 1。

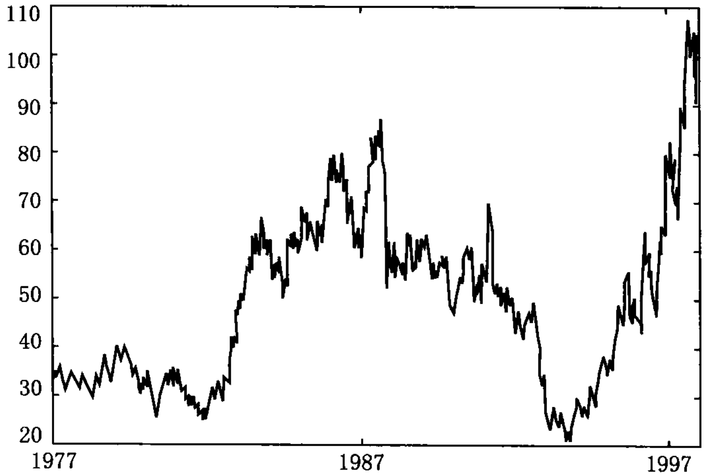

图 1.1.1 1977 年至 1997 年 IBM 股价

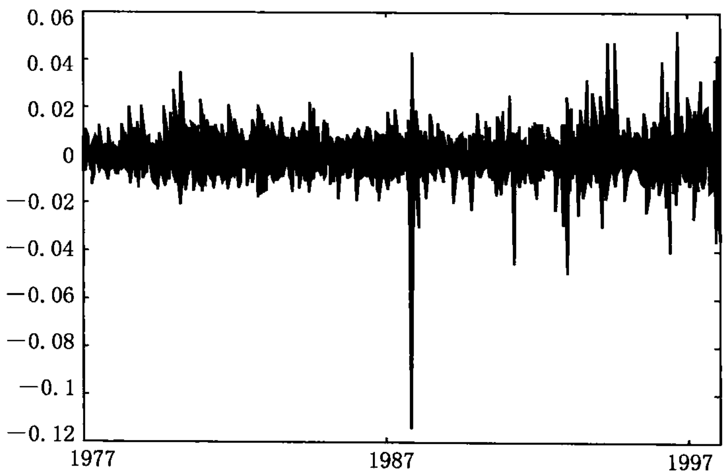

图 1.1.2 IBM 的对数收益率

概率空间

在对一个模型进行分析的时候,人们通常将其所有的结果组合起来考虑。我们将这种组合称为事件,如果我们能够分辨它的发生和不发生。很明显,如果结果集合 Ω 的一个子集 A 是一个事件,那么其补集 $A^c = \{\omega_i \in \Omega: \omega_i \notin A\}$ 也是一个事件。所谓补集 A^c,

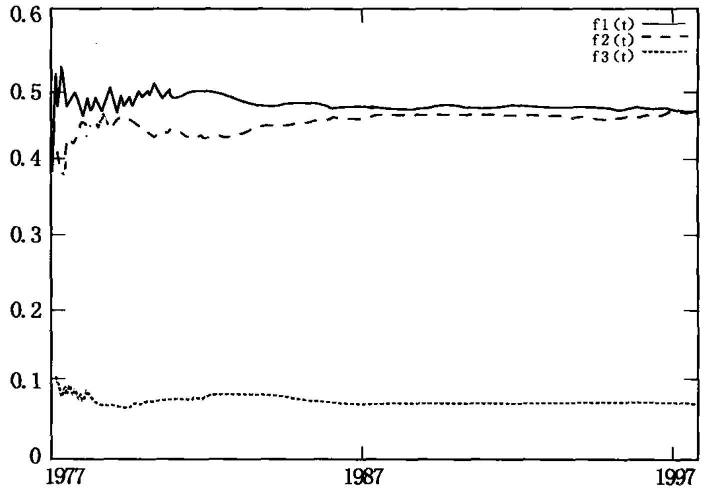

图 1.1.3 各时期的相对频率

就是由样本空间中所有不属于 A 的元素所构成的集合。在上面的例子中，如果 $A=\{\omega_1, \omega_2\}$ 对应的是发生负对数收益或零对数收益的事件的话，那么其补集 $A^c=\{\omega_i\in\Omega: \omega_i\notin\{\omega_1, \omega_2\}\}=\{\omega_3\}$，就是发生$\{\omega_3\}$，亦即发生正的对数收益。

特别的，如果整个样本空间 Ω 是一个事件，那么这个事件就是一个确定事件，因为样本空间中的元素所代表的事件总会发生。样本空间 Ω 的补集是空集$\varnothing$。空集所代表的是一个永远也不会发生的事件。如果 A 和 B 各自代表一个事件，那么当 A 或 B 当中一个发生的时候，$A\cup B$ 也发生，而 $A\cap B$ 发生则要求 A 和 B 都发生。在这，$A=\{\omega_1, \omega_2\}$ 是上面例子中的事件，事件 $B=\{\omega_2\}$ 代表零对数收益，那么 $A\cup B=\{\omega_1, \omega_2\}\cup\{\omega_2\}=\{\omega_1, \omega_2\}$ 代表一个包含负对数收益或零对数收益的事件，而 $A\cap B=\{\omega_1, \omega_2\}\cap\{\omega_2\}=\{\omega_2\}$ 则代表这只是一个零对数收益事件。

在上面的讨论中，我们只涉及了那些只有有限个结果的实验。但是，如果从有限集的基础上利用相对频率来介绍概率论会导致读者在概念理解上产生细微的偏差，同时也会产生其他的数学问题。为了解决这些难题，Kolmogrov 在 20 世纪 20 年代末期发展了基于公理方法的概率理论。在这一方法下，概率代表的是赋予某一事件发生的一个数值。接下来，我们将应用这一公理框架。

令 $P(A)$表示从一个与样本空间 Ω 对应的事件集合$\mathcal{A}$中事件 A 的发生的概率。那么根据在相对频率的相关特征，我们可以期望这些概率同样满足下列关系：

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1, \tag{1.1.2}$$

$$P(A^c)=1-P(A), \tag{1.1.3}$$

$$P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1, \text{以及} \tag{1.1.4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{1.1.5}$$

如果 A 和 B 是互斥的，也就是从$\mathcal{A}$中抽取的 A 和 B 满足 $A \cap B = \varnothing$。

上述关系的存在，使得我们可以在有限的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ 里，对每一事件始终如一的赋予其概率。如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是事件，读者可以推导出

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ 和 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

都是事件，并且

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 彼此互斥，也就是对于任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$i \neq j$，有 $A_i \cap A_j = \varnothing$。

对于上面的例子，我们对每一事件 ω_i，$i \in \{1, 2, 3\}$ 赋予一个概率 $P_i = P(\{\omega_i\})$。那么对于事件 $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ 所表示的非负对数收益事件，根据(1.1.5)式，可以得到概率

$$P(A) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) = p_1 + p_2。$$

在本质上，实验的概率信息可以用$(\Omega, \mathcal{A}, P)$来概括，其中 Ω 是样本空间，$\mathcal{A}$为事件集合，P 为概率测度，这三者之间必须满足一定的关系。在前面的分析中，我们讨论了有限事件集合的问题。为了便于讨论无限事件集合的概率问题，我们必须做出一些约定，以避免出现矛盾。我们假设$\mathcal{A}$是一个 σ—代数，这意味着：

$$\Omega \in \mathcal{A} \tag{1.1.6}$$

$$\text{如果 } A \in \mathcal{A}, \text{那么 } A^c \in \mathcal{A} \tag{1.1.7}$$

$$\text{如果 } A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}, \text{那么 } A \cup B \in \mathcal{A} \tag{1.1.8}$$

$$\text{如果对任意 } i \in \mathcal{N} = \{1, 2, \cdots\},\ A_i \in \mathcal{A}, \text{那么} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{A} \tag{1.1.9}$$

在有限事件集合的情况下，等式(1.1.5)被可数可加概率替换。这就是对任意的互斥序列$(A_i)_{i \in \mathcal{N}}$，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.1.10}$$

成立。