工科基础物理学

（上）

周雨青 主编

张玉萍 张道宇 黄宏彬 副主编

清华大学出版社

工科 基础物理学

（上）

周雨青 主编
张玉萍 张道宇 黄宏彬 副主编

清华大学出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

工科基础物理学. 上/周雨青主编. --北京：清华大学出版社，2011.3
ISBN 978-7-302-24905-4

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①物理学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 017362 号

责任编辑：朱红莲
责任校对：王淑云
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社 总 机：010-62770175
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座
邮 编：100084
邮 购：010-62786544
印 装 者：北京密云胶印厂
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 **印 张**：14 **字 数**：336 千字
版 次：2011 年 3 月第 1 版 **印 次**：2011 年 3 月第 1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：23.00 元

产品编号：037471-01

前　言

物理学对人类的科学发展和进步，以及对其他学科的基础作用和意义，再怎么强调也不为过。科学史告诉我们，物理学是科学发展的火车头，当今乃至未来仍将是科学发展的助力器。

本书根据教学基本要求，选择了除“几何光学”之外的所有A类知识点。考虑到物理学的成熟(完善)、系统和发展，本教材仍以物理学系统分类，以经典物理内容(力、热、电磁、光)为主线，阐述物理概念、方法、工具和发展。但是，如果我们只讲传统不讲现代，只讲线性不讲非线性，只讲内容不分层次，那么就体现不出物理的发展和时代的需要。因此，强化近、现代物理内容，特别是强化非线性物理的内容变得非常重要，这部分内容在本书中既独立成章(第16章)，又穿插于经典之中(第5、14章)。这样做可以保证学时的“弹性”，如学时较多，可以全面介绍非线性(第16章)；学时不足，只要在相应章节中选讲非线性即可。

在强化近、现代物理内容的同时，本书在传统内容部分做了如下的加强：

(1) 非惯性力的内容(2-6节)；

(2) 固体的弹性(3-2节)和流体力学(3-3节)内容；

(3) 相对论中的“视觉形象”(4-2节)和“四维动量-能量、力”(4-3节)；

(4) 振动和波中的“复杂振动的处理理论”(5-1节)、“耦合振子”(5-3节)和“非线性波简介”(5-7节)；

(5) 光学中的“光的色散”(14-8节)和“非线性光学”(14-9节)；

(6) 在量子物理中，用适当的篇幅介绍了“量子力学基本问题的争论”(15-3节)。

本书在内容编排次序上做了如下安排：

(1) 将相对论和振动与波分别放在牛顿力学之后的第4章和第5章，而大多数同类教材的相应内容是分别放在光学之后和电磁学之后的。我们的这种做法是考虑：一方面，从系统上来说，相对论和振动与波仍属于力学范畴；另一方面，从本质上说，相对论是时空变换问题，仍属相对运动范畴，而振动与波就是机械运动的一种形式。

(2) 将光学放在量子物理之前的第14章，而同类教材大多把光学内容放在机械振动机械波之后。我们的考虑是，光本质上属于量子和近代物理范畴。

本书在每一章的开头，以“引子”的形式引入各章主题。“引子”不是一个问题，而是一个现象、一段历史、一种发展趋势抑或一段猜想，比如，“从Tocama大桥的坍塌看防震减灾技术”、“地球磁场是否即将再次发生惊天大倒转?”就分别是第5章“振动和波”及第9章“稳恒磁场”开头的“引子”，既切题、有趣，又能帮助读者理解相关内容，具有画龙

点睛之效果。

本教材的梯度较大、内容相对较深。例如，在力学部分，减少了运动学、动力学的描述，增加了坐标系的表述（直角坐标、极坐标、自然坐标和柱坐标）和例题分析（质点运、动力学部分共15道例题）；在相对论部分，不仅介绍若干实验基础（布拉德雷实验、斐索流水实验、迈克耳孙-莫雷实验），而且给出了洛仑兹变换的推导，还引进了相对论视觉形象；在近代物理部分，加强了物质结构的固体理论；此外，全书多处提到了非线性物理内容。纵观全书，明显加大、加深了近现代物理内容，其内容皆在可教、可学的范围内。

总之，我们觉得，教材是为学生和老师服务的。培养目标和学生的基础决定了教材的起点及其内容的深浅，科学的发展决定了教材的扩展。因此，教材一定要分层次。为此我们在这方面做了一些努力，尽管还存在着许多不足，但明确地传导了我们编写教材的思路。

教材编写分工如下：张玉萍负责第1、2、3章和第14章一部分的编写；黄宏彬负责第4、15、16章的编写；周雨青负责第5、6章和第12、13、14章的引言部分的编写；张道宇负责第7、8、10章的编写；朱明负责第9章；董科负责第11章；王勇刚负责第12、13章；范吉阳负责第14章一部分的编写。周雨青负责全书的策划与统稿工作。

书稿自2006年开始启动编写，历时4年，经多次修改并试用，终在2010年收笔。在这期间，叶善专老师一如既往地关心和支持着我们，可以这样说，是叶老师的倡导，才有了我们完成这本书稿的动力。在此向叶老师表示深深的谢意！同时感谢清华大学出版社的朱红莲编辑，她耐心细致的工作为本书增色不少。夏桂红老师为本书出版前做最后一次校稿，感谢他为此付出的辛劳。

因编著者经验有限，书稿中错误难免，还请读者多提宝贵意见，在此预先向你们表示感谢！

编　者

2010年9月于东南大学

目录

第 1 章

质点运动学

引子：说说故事“刻舟求剑”

图 1　邮票

中国是文化丰富多彩且历史悠久的国度，有很多精彩又耐人寻味的寓言、笑话、传说、成语故事。这里我们来说一个街知巷闻的寓言故事“刻舟求剑”。图 1 是北京邮票厂于 1981 年发行的一套邮票，全套画面为五连张，波纹相连，有整体感，形象地刻画了故事“刻舟求剑”情节的发展。故事“刻舟求剑”出自《吕氏春秋·察今》，其原文为：“楚人有涉江者，其剑自舟中坠于水，遽契其舟，曰：‘是吾剑之所从坠。’舟止，从其所契者入水求之。舟已行矣，而剑不行。求剑若此，不亦惑乎！”故事的结果当然是这个楚国人没有找到他的剑，但他觉得很纳闷：“我的剑明明是从这个记号处掉进水里的，为什么从这里跳进水里去却找不到剑呢？”

故事中楚国人滑稽可笑的做法违背了什么原理呢？物理学中物质与运动关系的基本原理，即运动是物质的运动，运动离不开物质；物质是运动的物质，物质离不开运动。故事中的楚国人，虽然看到了船、水、剑的客观存在，却忽视、否认了它们的运动，是一种离开运动谈物质的形而上学的错误表现。物质与运动不可分，实质上也就是承认了运动的绝对性，即任何事物在任何条件下都是永恒运动的，是无条件的，但这并不意味着完全否认静止的存在。恰恰相反，在绝对运动中存在着某种相对静止的状态，但相对静止不是物质的本质属性，而是绝对运动的一种特殊状态。这就是说运动是绝对的，静止是相对的。所谓静止是相对的，是说静止是运动在特定条件下的特殊状态，是有条件的。运动和静止是相互依存、相互贯通的，即所谓动中有静、静中有动。故事中的楚国人找不到剑，就是因为他既否认运动，又否认静中有动。

要捞出水中的剑，凭一般的经验，应以河岸作参照物来确定剑在水中的位置，把剑丢在水中的位置确定下来，而故事中的楚国人则以行走的船为参照物(可惜故事中没有说明)，把记号刻在船上，所以作者笑话他“不亦惑乎”。大家笑过之后再想想他在船上刻下记号是不是完全没有道理。

1-1 运动的种类

自然界中物质的运动形式包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核运动以及其他微观粒子运动等。其中机械运动是最常见和最基本的物质运动形式。所谓机械运动是指物体间或物体内各部分之间相对位置的变动。在力学中常将机械运动简称为运动。力学就是研究物体的机械运动规律的。因为实际物体有大小和形状，所以它的运动比较复杂，一般可分为平动、转动和振动。本章从最简单的平动开始。所谓平动是指物体的运动只有整体位置的移动，即物体上各点的运动轨迹的形状完全相同，这时可用物体上任一点的运动代表整个物体的运动，即可把整个物体当作一个有质量的点，这样的物体称为质点。质点是宏观物体的一种最简单的理想模型，研究质点的运动是研究物体复杂运动的基础。一般情况下，物体各部分的运动并不相同，研究这些物体的运动时不能把它们视为质点，但我们可把整个物体看成是由许多质点组成，通过分析这许多质点的运动就可以弄清楚整个物体的运动。

本章介绍质点运动学，即研究对质点机械运动的描述，主要内容是用矢量代数和微积分知识讨论质点运动的状态和状态的变化，暂不追究质点运动的原因。

1-2 质点运动的描述

1-2-1 参照物和坐标系

经验告诉我们，运动具有绝对性和相对性。绝对性是指自然界中所有物体均处于永恒不息的运动之中，绝对静止的物体是没有的；相对性是指在观察一个物体的运动时必须参考其他物体，参考不同的物体，同一物体的运动会表现为不同的形式，这也叫运动描述的相对性。“坐地日行八万里”就是这个意思。

为描述一个物体的运动而选作参考的另一物体或一组相对静止的物体称为参考系。所有物体都有被选作参考系的同等地位，即参考系的选择具有任意性，只是同一物体的运动相对不同的参考系而言其运动情况的描述不一样。比如在匀速行驶的轮船中竖直上抛一个小球，在轮船中看小球的运动轨迹是一条直线，而在地面上看则是一条抛物线。因此，当我们描述一个物体的运动时，必须指明是对什么参考系而言的。例如在讨论地面上物体的运动时，我们常用固定在地面上的一些物体，如树木或房屋等作参考系，这样的参考系叫地面参考系。在讨论船、车中的物体的运动时，常以船、车作为参考系。在讨论人造卫星的运动时，为了方便我们常以地心作为参考系。在讨论行星的运动时，又常采用日心作为参考系。

对于故事中的楚国人，他所选取的参照物是行走的船（假设船匀速行驶），若我们把宝剑落水时的位置作为坐标系原点，同时不考虑空气以及水对宝剑的阻力，那么在宝剑离开船到落在水底这段时间内就是一个自由落体运动，在他所选取的坐标系中，宝剑就不会发生水平方向的位移，因此，他在船上刻下记号并不是完全没有道理。

为了定量地描述物体的运动，我们必须进一步在参考系中建立一个坐标系。坐标系有直角坐标系（即笛卡儿坐标系）、极坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系等。下面将重

点讨论如何在直角坐标系、极坐标系和自然坐标系中描述质点的运动。

1-2-2　运动的描述

1. 描写质点运动的物理量

(1) 位矢

要确定质点的运动，首先要确定质点的空间位置，为此我们引入矢量 $\boldsymbol{r}$。如图 1-1 所示，在某一时刻 t 质点位于 P 点，从坐标原点 O 到点 P 引一矢量 $\boldsymbol{r}$，该矢量称为质点在时刻 t 的位置矢量，简称位矢，又称径矢。$\boldsymbol{r}$ 的大小表明了质点到原点的距离，$\boldsymbol{r}$ 的方向指明了质点相对原点的方位，即 $\boldsymbol{r}$ 可确定质点的空间位置。很显然，质点运动时，它的位矢是随时间变化的，也就是说 $\boldsymbol{r}$ 是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

由以上讨论可知，位矢 $\boldsymbol{r}$ 的函数形式能详细地描述质点在任一时刻的位置，并包含了质点如何运动的全部信息，此式称为质点的运动方程，运动学的任务之一就是找出质点的运动方程。

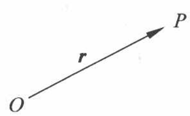

图　1-1

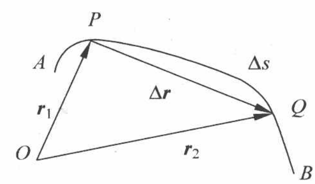

图　1-2

(2) 位移

设质点沿如图 1-2 所示的 AB 曲线轨道运动，质点在 t 时刻位于点 P 处，在 $t+\Delta t$ 时刻位于点 Q 处，其相应的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，从点 P 到点 Q 引一矢量，我们称矢量 $\overrightarrow{PQ}$ 为质点在 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔内位矢的增量，简称位移，它仅反映质点位置变化的实际效果。用 $\Delta \boldsymbol{r}$ 表示位移，则

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{1-2}$$

应该注意的是，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 是矢量，它的大小(即它的模)只能记为 $|\Delta \boldsymbol{r}|$，不能用 Δr 表示，因为 $\Delta r = r_2 - r_1$，它是标量，仅仅表示矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小的增量，所以在一般情况下，$|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta r$。

(3) 速度

若仅仅知道质点在某时刻的位矢，而不能同时知道质点运动的方向和快慢，这还不能确定质点的运动状态。描述质点的运动状态需要两个物理量，即位矢和速度。

如图 1-2 所示，$\Delta \boldsymbol{r}$ 是质点在 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔内的位移，那么质点在此时间间隔内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-3}$$

平均速度是矢量，它的方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向一致。平均速度只是粗略地描述了质点在 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔内运动的快慢和方向，而我们需要的是质点在某一时刻运动的快慢和方向，

即瞬时速度。将时间间隔 Δt 无限减小，并使之趋近于零，即 $\Delta t\to 0$，则位矢 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 将无限接近，这时 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 将无限接近于 PQ 之间的路程 Δs，即 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$，同时 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向将与 P 点处的切线一致。因此我们可用下式

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\boldsymbol{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-4}$$

表示在 P 点质点运动的快慢和方向，$\boldsymbol{v}$ 称为质点在 t 时刻的瞬时速度，简称速度。速度 $\boldsymbol{v}$ 是矢量，它的方向沿着运动轨道上质点所在处的切线方向，并指向质点前进的一侧，它的大小称为速率，用 v 表示。值得注意的是，$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，但在一般情况下，$v\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$。具体原因在本章中找。

（4）加速度

当质点作任意曲线运动时，质点的运动速度会随时间变化，即速度是时间的函数。如图 1-3 所示，质点沿 AB 曲线轨道运动，设质点在 t 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，在 $t+\Delta t$ 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}_2$，那么在 $t\to t+\Delta t$ 时间间隔内的速度增量为

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1 \tag{1-5}$$

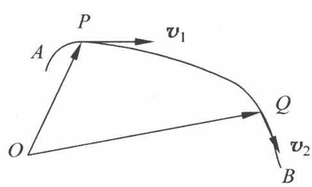

图 1-3

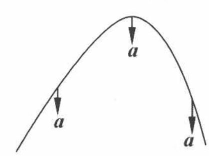

图 1-4

速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与时间间隔 Δt 之比，定义为质点在 Δt 时间内的平均加速度，即

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-6}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时取式(1-6)的极限，就可得到 t 时刻质点运动的瞬时加速度 $\boldsymbol{a}$（简称加速度），即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\boldsymbol{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-7}$$

应当注意，加速度是矢量，它既反映了速度大小的变化，又反映了速度方向的变化。其方向就是当 $\Delta t\to 0$ 时速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向，而不是速度方向。质点作曲线运动时，加速度的方向总是指向轨道曲线的凹侧。图 1-4 表示了抛体运动中加速度的方向。

以上介绍了描写质点运动的四个矢量，即位矢 $\boldsymbol{r}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$。其中位矢和速度是描写质点运动状态的物理量，位移和加速度是描写质点运动状态变化的物理量。从以上的讨论可知，如果知道了质点的运动方程，就可按公式

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\quad 和\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

求出质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；反过来，如果知道了质点运动的速度或加速度以及初始运动状态，就可用积分法求运动方程。上述就是质点运动学的两类基本问题。为了求解这两类问题，我们必须将 $\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 写成有关的坐标分量式才便于进行微积分计算，下面讨论位矢 $\boldsymbol{r}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系、平面极坐标系、自然坐标系、柱坐标系和球坐标系中的表示。

2. 矢量在坐标系中的表示

(1) 直角坐标系

最常用的坐标系是直角坐标系。在如图 1-5 所示的直角坐标系中,质点沿 AB 曲线轨道运动,在时刻 t 质点 P 的位矢在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影分别为 x、y、z,如果取 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别为沿 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的单位矢量,那么可将位矢 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

其大小为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,方向可由下面三个方向余弦确定:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

式中 α、β、γ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴之间的夹角。

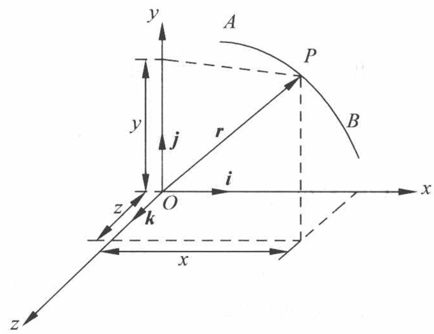

图　1-5

运动方程式(1-1)可表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-9}$$

分量式则为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1-10}$$

式(1-9)反映了实际运动是各分运动的矢量合成,即运动具有叠加性,例如平抛运动可以看作水平方向匀速直线运动和竖直方向匀加速直线运动的叠加。任何一个运动都可以看作是质点沿各坐标轴的分运动合成。另外,从式(1-10)中消去参数 t 还可得到质点运动的轨迹方程。

因为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,所以速度在直角坐标系中的表示式是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\ &=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-11}$$

式中

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

v_x、v_y、v_z 是速度在坐标轴上的分量,这些分量都是数值,可正可负。速度的大小为 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$,方向可由下面三个方向余弦确定:

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}$$

式中 α、β、γ 分别是 $\boldsymbol{v}$ 与 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴之间的夹角。

加速度 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\\ &=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-13a}$$

或

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1-13b}$$

或

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-13c}$$

加速度沿三个坐标轴的分量分别为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度的大小为 $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，方向可由下面三个方向余弦确定：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}$$

式中 α、β、γ 分别是 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴之间的夹角。

(2) 平面极坐标系

当质点在平面上运动时，也可采用平面极坐标系。如图 1-6 所示，假设某时刻质点位于点 P，这时从坐标原点 O 到点 P 的有向线段称为位矢 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴之间的夹角为 θ，于是质点的坐标为 r 和 θ。这种以 (r,θ) 为坐标的参考系称为平面极坐标系，r 称为极径，θ 称为极角。

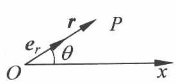

图 1-6

平面极坐标系中，在任意时刻 t，位矢 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \tag{1-14}$$

其中 $\boldsymbol{e}_r$ 是径向的单位矢量。一般情况下，r 和 $\boldsymbol{e}_r$ 都随时间变化，所以运动方程为

$$\boldsymbol{r}=r(t)\boldsymbol{e}_r(t) \tag{1-15}$$

其极坐标分量式为

$$\begin{cases} r=r(t) \\ \theta=\theta(t) \end{cases} \tag{1-16}$$

由式(1-4)，我们有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} \tag{1-17}$$

式中右端第一项的意义很清楚，是质点径向坐标对时间的变化率，它是速度 $\boldsymbol{v}$ 的径向分量。第二项中含有 $\boldsymbol{e}_r$ 对时间的导数，下面讨论这一项的意义。

如图 1-7 所示，当质点沿轨道在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内由点 P 运动到点 Q 时，径向单位矢量由 $\boldsymbol{e}_r(t)$ 变为 $\boldsymbol{e}_r(t+\Delta t)$，横向（同径向垂直并指向极角增加的方向）单位矢量由 $\boldsymbol{e}_\theta(t)$ 变为 $\boldsymbol{e}_\theta(t+\Delta t)$，由导数法则，可得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_r}{\Delta t}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_r}{\Delta\theta}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1-18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\theta}{\Delta\theta}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r \tag{1-19}$$

将式(1-18)代入式(1-17)即得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1-20}$$

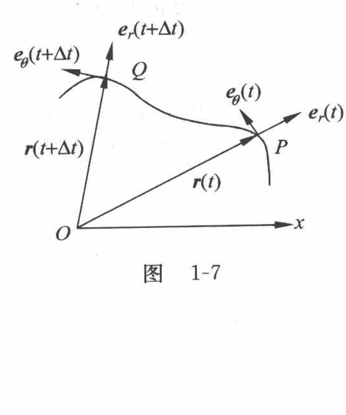

图 1-7

上式中第一项称为径向速度，第二项代表速度沿横向的分量，称为横向速度，分别用 v_r 和 v_θ 表示径向速度和横向速度，则

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\ v_\theta = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1-21}$$

下面讨论加速度在平面极坐标系中的表示。将式(1-20)对时间再求一次微商，并将式(1-19)代入，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r + \left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{1-22}$$

上式中第一项称为径向加速度，第二项称为横向加速度，分别用 a_r 和 a_θ 表示径向加速度和横向加速度，则

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2,\quad a_\theta = r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-23}$$

(3) 自然坐标系

在质点作平面曲线运动，并且已知其轨迹时，我们常采用自然坐标系来分析、研究质点的运动，这要比用直角坐标系、平面极坐标系更加方便，更加直观。顾名思义，所谓自然坐标系就是顺应轨道的形状自然建立起来的坐标系。设质点沿着如图 1-8 所示的曲线轨道运动，在轨道曲线上任取一定点作为坐标原点 O，把轨道当作轴，当质点在某时刻 t 位于点 P 时，它的位置可由点 P 与原点 O 之间的轨道长度 s 来确定，s 称为动点 P 的自然坐标。

另外，为研究问题的方便，可在任意时刻于质点所在处取两个单位矢量，即切向单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$（见图 1-8），前者沿着轨道切向，其正方向指向质点前进的一侧，后者沿着轨道法向，其正方向指向轨道的凹侧。$\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 的大小恒为 1，但一般情况下，$\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 的方向随质点的位置变化而改变，即 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 不是恒矢量，这与直角坐标系中的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是不同的。

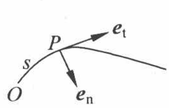

图 1-8

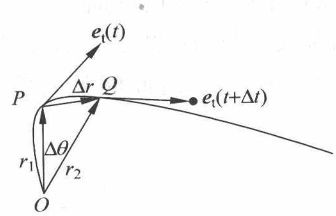

图 1-9

当质点运动时，s 随时间变化，即 $s=s(t)$。如图 1-9 所示，设质点在时刻 t 时位于点 P，自然坐标为 $s(t)$，质点在时刻 $t+\Delta t$ 时位于点 Q，自然坐标为 $s(t+\Delta t)$，在 $t\to t+\Delta t$ 的时间内，质点走过的路程

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

对应地，对原点 O，P 点位矢为 $\boldsymbol{r}_1$，Q 点位矢为 $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r}$，当 $\Delta t\to 0$ 时，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小与路程 Δs 相等，而且位移的方向即为 P 点轨道的切线方向 $\boldsymbol{e}_t$，由此可得到速度在自然坐