高等学校教材

TEXTBOOK FOR HIGHER DUCATION

LISAN SHUXUE JIAOCHENG

离散数学教程

主编　张卫国

西北工业大学出版社

【内容简介】 离散数学是现代数学的重要组成部分，以离散量的结构和相互关系为研究对象，主要包括数理逻辑、集合论、图论和近世代数等内容。本书介绍了离散数学的基础理论与基本方法，全书由命题逻辑、谓词逻辑、集合、二元关系、函数、代数系统、图论等7章组成，每章均配有一定数量的习题，便于检验和加深学生对所学内容的理解和掌握。

本书可作为计算机科学与技术、软件工程、信息与计算科学等信息类专业的教材，也可供相关人员阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学教程/张卫国主编．—西安：西北工业大学出版社，2011.3
ISBN 978-7-5612-3016-9

Ⅰ.①离… Ⅱ.①张… Ⅲ.①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 021899 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 **邮编：**710072
电　　话：(029)88493844　　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西天元印务有限责任公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：11.125
字　　数：267 千字
版　　次：2011 年 3 月第 1 版　　2011 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：20.00 元

前　　言

离散数学形成于20世纪70年代初期，是随着计算机科学的发展而逐步建立与完善的，是一门新兴的工具性学科.离散数学作为计算机科学中基础理论的核心课程，与数据结构、操作系统、编译原理、算法设计、系统结构、逻辑设计、容错诊断、密码学、机器证明等核心与专业课程联系紧密.离散数学不仅是研究计算机科学的有力工具和方法，同时也是研究一般信息科学的基本数学工具.

离散数学课程的根本目标是培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力；培养学生的数学思维能力以及离散数学方法的应用能力.为后面课程的学习做好必要的数学知识准备，为从事信息技术研发及应用打下扎实的理论基础.

离散数学有很多运算规则.有些运算规则看似简单，但对初学者来说，要严格地证明往往无从下手.本书对相近的运算规则，择其一予以证明，但不一一赘述，以便使学生触类旁通、举一反三.在逻辑推理演算上，采用了面向结论的证明树方法，即证明树的树根是欲证明的结论，树叶是题目的前提，树枝是按一定的推理规则得到的中间结论，便于学生分析与推理.书中例题丰富，编者尽量把一些基本理论在后续课程中的应用以实例的方式体现，同时，把生活中基于离散数学知识的例子用数学语言描述，增强学生的学习兴趣.

本书包括数理逻辑、集合论、图论和近世代数四部分内容，共分7章.第一部分包括第1章命题逻辑、第2章谓词逻辑；第二部分包括第3章集合、第4章二元关系、第5章函数；第三部分包括第6章代数系统；第四部分包括第7章图论.各部分之间联系紧密，但又相对独立，这也是离散数学与其他数学分支的不同之处.本书建议学时为64学时，不足64学时可根据学生基础和专业情况，适当删除部分章节进行教学.

本书由张卫国任主编，李占利任副主编.具体编写分工如下：张卫国编写第1,4章；李占利编写第5,6章，宇亚卫编写第2,7章，韩瑞丽编写第3章.

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，真诚希望使用本教材的教师、同学和广大读者对存在的问题及时指正并提出修改意见和建议.

编　者

2011年1月

目　　录

第1章 命题逻辑

逻辑学是研究思维形式及思维规律的科学，分为辩证逻辑和形式逻辑两种. 辩证逻辑是以辩证法认识论为基础的逻辑学；形式逻辑主要是对思维的形式结构和规律进行研究的，类似于语法的一门工具性学科. 思维的形式和结构包括了概念、判断和推理之间的结构和联系. 概念是思维的基本单位，通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答，这就是判断. 由一个或几个判断推出另一个判断的思维形式，就是推理. 数理逻辑是用数学方法研究推理的科学. 所谓数学方法，主要指引进一套符号体系的方法，因此数理逻辑又叫符号逻辑.

本章主要内容有：命题及命题联结词、逻辑恒等式与永真蕴涵式、命题范式、命题推理等.

1.1 命题及命题联结词

1.1.1 命题

定义1-1 具有真假意义的陈述语句叫做命题. 若命题与客观事实相符，则命题的真值为真，记作1，并称该命题为真命题；若命题与客观事实不符，则命题的真值为假，记作0，并称该命题为假命题. 通常用大写字母 P,Q,R 等表示命题.

[**例1-1**] 下述语句都是命题.

(1) 月亮围绕地球转.

(2) 雪是黑色的.

(3) 明天下雨.

(4) 除地球外，有些星球上有人类.

(5) 离散数学很枯燥.

所谓"真假意义"是指陈述的内容符合或不符合客观事实，不以人的意志为转移；真或假有且只有一个成立.

如例1-1中的(3)"明天下雨"，虽然还不能准确判断其真假，但客观上有且只有一个成立；(4) 虽然有待于科学家进一步探索，但它是有真假意义的；(5) 要根据考虑的人来判断，若未说明针对哪些人，可理解为说话者本人，其真假性也是客观的.

[**例1-2**] 下述语句都不是命题.

(1) 快点走！

(2) 你喜欢红色吗？

(3) 多美啊！

(4) $x+y>3$.

其中 $x+y>3$，其真假性具有不确定性，若 $x=1,y=8$，则 $x+y>3$ 为真；若 $x=1,y=1$，则 $x+y>3$ 为假.

[例 1-3]　一个人说:“我正在说谎”.

他是在说谎还是在说真话呢？如果他是说谎，那么他的话是假；因为他承认他是说谎，所以实际上他是说真话. 另一方面，如果他讲真话，那么他说的是真，也就是他在说谎. 该句话无论如何理解都会得到矛盾的结论，我们常称其为悖论. 悖论当然不是命题.

命题可分为原子命题和复合命题，一个命题如果不能分解为更简单的命题，则这个命题叫做原子命题，否则叫做复合命题. 如“林平和林红爱看书”是复合命题，可分解为“林平爱看书”和“林红爱看书”. 但“林平和林红是姐妹”却不能分解，是原子命题.

1.1.2　命题联结词

在日常用语中，常使用“并且”“或”“如果 …，那么 …”“当且仅当”等联结词，在数理逻辑中有相应的命题联结词与之对应. 下面介绍 6 种常见的命题联结词.

1. 否定联结词 $\neg$

定义 1-2　命题 P 的否定是一个复合命题，记作 $\neg P$，读作“非 P”或“P 的否定”. $\neg P$ 的真值规定如下：若 P 为真，则 $\neg P$ 为假；若 P 为假，则 $\neg P$ 为真.

[例 1-4]　P:上海处处都干净.

$\neg P$:并非上海处处都干净，或 $\neg P$:上海有些地方不干净.

2. 合取联结词 $\wedge$

定义 1-3　命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P \wedge Q$，读作“P 并且 Q”或“P 与 Q”. $P \wedge Q$ 的真值规定如下：$P \wedge Q$ 为真，当且仅当 P 与 Q 都为真.

[例 1-5]　P:今天下雨，Q:明天下雨.

$P \wedge Q$:今天下雨且明天下雨.

[例 1-6]　P:今天天气晴朗，Q:今天天气不太热.

$P \wedge Q$:今天天气晴朗但不太热.

[例 1-7]　P:孔子是教育家，Q:树上有两只鸟.

$P \wedge Q$:孔子是教育家且树上有两只鸟.

例 1-6 中有转折的意思，仍然可用合取来联结. 例 1-7 中的复合命题在日常生活中没有意义，因为前后没有内在联系，但仍是复合命题.

3. 析取联结词 $\vee$

定义 1-4　命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P \vee Q$，读作“P 或 Q”，$P \vee Q$ 的真值规定如下：$P \vee Q$ 为真，当且仅当 P 或 Q 至少有一个为真.

联结词“$\vee$”与汉语中“或”的意义有所不同，汉语中“或”既可表示“可兼或”，也可表示“排斥或”.

[例 1-8]　今天下雨或刮风.

[例 1-9]　今晚 7 点我去看电影或是在家看书.

显然，例 1-8 是“可兼或”，例 1-9 中是“排斥或”. 对于例 1-8，若令 P:今天下雨，Q:今天刮风，则可表示为 $P \vee Q$.

对于例 1-9，若令 P:今晚 7 点我去看电影，Q:今晚 7 点我在家看书，用 $P \vee Q$ 表示例 1-9 是不合适的. 因为例 1-9 中含有“我不可能同时看电影且在家看书”的意思，而根据“$\vee$”的定义不含这层意思，所以例 1-9 的复合命题也可表示为

$$(P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q) \text{ 或 } (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

4. 蕴涵联结词 $\rightarrow$

定义 1-5　给定两个命题 P 和 Q，P 蕴涵 Q 是一个复合命题，记作 $P \rightarrow Q$，读作"P 蕴涵 Q""如果 P，那么 Q"或"若 P 则 Q"，$P \rightarrow Q$ 的真值规定如下：仅当 P 为真，Q 为假时，$P \rightarrow Q$ 为假，其余情况 $P \rightarrow Q$ 均为真.

[例 1-10]　P：你是大学生，Q：你至少学一门外语.

$P \rightarrow Q$：如果你是大学生，那么你最少学一门外语.

[例 1-11]　P：太阳从西边出来，Q：$1+2=3$.

$P \rightarrow Q$：如果太阳从西边出来，那么 $1+2=3$.

[例 1-12]　"因为实函数 $f(x)$ 是可导的，所以 $f(x)$ 是连续的"，将这句话用命题符号表示.

解　令 P：$f(x)$ 是可导的，Q：$f(x)$ 是连续的. 则原命题可符号化为 $P \rightarrow Q$.

"如果"与"那么"是有因果联系的，否则就没有意义. 但对条件命题来说，只要 P，Q 是命题，$P \rightarrow Q$ 即是复合命题. 此外"如果 …，则 …"这样的语句，当前提为假时，这语句常常无意义. 而在条件命题中，若前提为假，命题的真值恒为真，即蕴涵式既可包括日常用语中的语句，又可包括非日常用语中的语句.

5. 等值联结词 $\leftrightarrow$

定义 1-6　给定两个命题 P 和 Q，P 等值于 Q 是一个复合命题，记作 $P \leftrightarrow Q$，读作"P 等值于 Q"或"P 当且仅当 Q"，$P \leftrightarrow Q$ 的真值规定如下：$P \leftrightarrow Q$ 为真，当且仅当 P 和 Q 的真值相同.

[例 1-13]　"两三角形相似，当且仅当三组对应角相等".

令 P：两三角形相似，Q：两三角形三对应角相等. 原命题可符合化为 $P \leftrightarrow Q$.

[例 1-14]　牛不吃草，当且仅当 $2+2=4$.

令 P：牛不吃草，Q：$2+2=4$. 原命题可符合化为 $P \leftrightarrow Q$.

6. 异或联结词 $\oplus$

定义 1-7　给定两个命题 P 和 Q，P 和 Q 的异或是一个复合命题，记作 $P \oplus Q$，读作 P 与 Q 的"排斥或"或"异或"，$P \oplus Q$ 的真值规定如下：$P \oplus Q$ 为真，当且仅当 P，Q 中恰有一个为真.

[例 1-15]　今天是 3 月 8 日或 3 月 9 日.

令 P：今天是 3 月 8 日，Q：今天是 3 月 9 日. 原命题可符号化为 $P \oplus Q$.

命题联结词作为命题演算的运算符，也有优先顺序. 上述常见的六种命题联结词运算优先级由高到低规定为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$ / $\oplus$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$. 相同的两个运算符出现在公式中时，先左后右，若要改变先后顺序可使用圆括号. 例如若 P 为 1，Q 为 0，R 为 0，$\neg(\neg Q \vee P) \rightarrow R$ 的真值为 1，而 $\neg\neg Q \vee P \rightarrow R$ 为 0. 各命题联结词的真值规定如表 1-1 所示.

表　1-1

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \oplus Q$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

［例 1－16］　设 P：天下雨，Q：他乘公交车上班．将下列命题符号化．

(1) 天没有下雨，他也没有乘公交车上班．

(2) 如果天下雨，他就乘公交车上班．

(3) 只有天下雨，他才乘公交车上班．

(4) 除非天下雨，否则他不乘公交车上班．

解　(1)$\neg P \wedge \neg Q$．　(2)$P \rightarrow Q$．　(3)$Q \rightarrow P$．　(4)$\neg P \rightarrow \neg Q$．

1.2　命题公式与真值表

1.2.1　命题公式

前面用 P,Q 等表示命题，其真值已确定，我们称之为命题常元．若用 P,Q 等表示任意命题，则称它们为命题变元．因为命题变元不能确定真值，所以不是命题．当命题变元 P 用一确定命题取代时，P 才具有确定的真值．对命题变元指定真值时，称对命题变元进行指派．一个命题变元有两种不同的真值指派．

所谓命题公式是指命题变元、命题常元用命题联结词及括号连接起来有意义的式子．

定义 1－8　命题公式的递归定义如下：

(1) 单个命题常元、命题变元是命题公式．

(2) 如果 A 和 B 是命题公式，则$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$，$(A \oplus B)$均为命题公式．

(3) 只有有限次应用条款(1) 和(2) 生成的公式才是命题公式．

例如$(P \leftrightarrow P \vee Q)$，$(\neg (P \rightarrow Q))$，$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$，$(((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (S \leftrightarrow T))$都是关于命题变元 P,Q,R,S,T 的命题公式．通常省略最外层括号．

正如命题变元不是命题，命题公式一般也不是复合命题．若对命题公式中所有命题变元指派以特定的命题（即真或假），则命题公式就是复合命题．

1.2.2　真值表

定义 1－9　设 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是关于命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的命题公式，命题变元的真值有 2^n 种不同的组合，每一种组合称为一种指派．对每一种指派，可求出 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值，列成表格，称为公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值表．

［例 1－17］　给出 $\neg (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$，$\neg (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$，$(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$ 的真值表．

解　如表 1－2 ～ 表 1－4 所示．为易于理解，表中列出了一些中间结果．

表 1-2

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

表 1-3

P	Q	$\neg(P \to Q)$	$\neg(P \to Q) \to \neg P$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1

表 1-4

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

1.3 逻辑恒等式与永真蕴涵式

从命题公式的真值表可以看到，有些命题公式无论其命题变元如何指派，其真值总为真，这种特殊的命题公式在今后的命题演算中极为重要，下文做较详细的讲解.

1.3.1 永真式

定义 1-10 设 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是一命题公式，对命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的 2^n 种指派的任一指派，若 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值总是为真，则称该命题公式为永真式或重言式；若 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值总为假，则称 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是永假式或矛盾式；若 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 既不是重言式也不是矛盾式，则称 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是偶然式；若至少有一指派使 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值为真，则称 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是可满足式.

例如，$P \vee \neg P$ 是永真式，$P \wedge \neg P$ 是永假式. 显然若 A 是永真式，则 $\neg A$ 是永假式，若 B 是永假式，则 $\neg B$ 是永真式.

定理 1-1(代入规则) 将永真式中同一命题变元的每一处均用同一命题公式去代替，所得的结果仍然是永真式.

由于永真式的值不依赖于变元的值，所以该规则的正确性是显然的.

例如，$\neg Q \vee (P \rightarrow Q) \vee (\neg P \rightarrow Q)$ 是永真式，用公式 $(P \wedge R \rightarrow S)$ 代替式中的 Q 得

$$\neg (P \wedge R \rightarrow S) \vee (P \rightarrow (P \wedge R \rightarrow S)) \vee (\neg P \rightarrow (P \wedge R \rightarrow S))$$

仍是永真式.

之所以重点研究永真式，是因为永真式具有以下特点：

(1) 永真式的否定式是永假式，永假式的否定式是永真式.

(2) 永真式的合取、析取、蕴涵、等值都是永真式.

(3) 永真式中有许多非常有用的逻辑恒等式和永真蕴涵式.

1.3.2 逻辑恒等式

定义 1-11 给定两个命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 和 $B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，若两个命题公式的真值表相同，即对 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的任一指派，A 和 B 的真值都相同，亦即 $A \leftrightarrow B$ 为永真式，则称公式 A 和 B 为逻辑恒等式，记作 $A \Leftrightarrow B$，读作"A 逻辑恒等于 B".

定理 1-2 设 A, B 为两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$ 的充分必要条件是 $A \leftrightarrow B$ 为永真式.

证 若 $A \Leftrightarrow B$，则对命题变元的任一指派，A 与 B 的真值相同，即对命题变元的任一指派，$A \leftrightarrow B$ 的真值为真，说明 $A \leftrightarrow B$ 为永真式. 反之，若 $A \leftrightarrow B$ 为永真式，则对所有命题变元的任一指派，A 与 B 的真值相同，这说明 $A \Leftrightarrow B$.

常用的逻辑恒等式如表 1-5 所示，其正确性可用真值表进行验证.

表 1-5 常用的逻辑恒等式

1	$\neg \neg P \Leftrightarrow P$	双否定律
2	$P \wedge P \Leftrightarrow P, P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
3	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P, P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
4	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	分配律
5	$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$	结合律
6	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P, P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
7	$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	摩根定律
8	$P \wedge 1 \Leftrightarrow P, P \vee 0 \Leftrightarrow P$	同一律
9	$P \wedge 0 \Leftrightarrow 0, P \vee 1 \Leftrightarrow 1$	零　律
10	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0, P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$	互补律
11	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	蕴涵表达式
12	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	等值表达式
13	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	逆反律
14	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	归缪律
15	$P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	输出律

注意："$\Leftrightarrow$"不是逻辑联结词，它表示两个命题公式真值的恒等性，类似于算术运算中的等于"="，$A \Leftrightarrow B$

不是命题公式.

下面用真值表来证明表1-5中分配律 $P \wedge (R \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$、摩根定律 $\neg (P \wedge R) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg R$、蕴涵表达式 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$、逆反律 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ 和归缪律 $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$，分别由表1-6～表1-10比较真值可知它们成立.

表 1-6

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

表 1-7

P	Q	$\neg (P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

表 1-8

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

表 1-9

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

表 1-10

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow \neg Q$	$\neg P$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

定义1-12 如果 C 是命题公式 A 的一部分，且 C 本身是命题公式，则称 C 是命题公式 A 的子公式.

定理1-3(替换规则) 若命题公式 A 有子公式 C，而 $C \Leftrightarrow D$，若用 D 替换 A 中的 C 得到 B，则 $A \Leftrightarrow B$.

因为$C \Leftrightarrow D$，所以对所有命题变元的任一指派，公式C与D的真值相同，从而公式A与B的真值也相同，即$A \Leftrightarrow B$.

利用真值表可以证明两个命题公式是否逻辑恒等(也可称为逻辑等价)，但当公式中命题变元较多时，由于不同的指派太多，用这种方法比较麻烦，则可以利用替换规则结合表1-5给出的常用的逻辑恒等式，来证明其他的逻辑恒等式.

[例1-18] 证明$P \wedge (\neg Q) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$

证 $P \wedge (\neg Q) \vee Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)$ 分配律

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge 1$ 排中律

$\Leftrightarrow (P \vee Q)$ 同一律

[例1-19] 证明$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P$

证 左边$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q)$ 分配律

$\Leftrightarrow P \wedge 1$ 排中律

$\Leftrightarrow P$ 同一律

[例1-20] 证明$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

证 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 等值表达式

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ 蕴涵表达式

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P)$ 分配律

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \vee ((Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)))$

分配律

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee 0) \vee (0 \vee (Q \wedge P))$ 否定律

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$ 同一律

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 交换律

[例1-21] 证明以下命题公式都是等价的.

(1)$(P \wedge Q) \rightarrow R$.

(2)$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$.

(3)$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$.

(4)$Q \rightarrow (P \rightarrow R)$.

(5)$\neg P \vee \neg Q \vee R$.

证 容易证明前4个命题公式均与命题公式(5)等价，从而它们彼此等价.

(1)$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$

(2)$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (1 \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow 1 \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$

(3)$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$

(4)$Q \rightarrow (P \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$

从例1-21可以看出，同样是由3个命题变元组成的5个命题公式，且形式各异，但它们彼此等价.那么由n个命题变元能组成多少个彼此等价的命题公式？留给读者思考.

[例 1－22] 某件事是由甲、乙、丙、丁 4 人中的某一人做的. 经询问,4 人的回答分别如下：

甲说：是丙做的；

乙说：我没做；

丙说：甲说的不符合事实；

丁说：是甲做的.

若其中 3 人说的是对的(真话),1 人说的不对(假话),问是谁做的？

解 设用 A,B,C,D 分别表示命题此事是甲做的、乙做的、丙做的、丁做的. 题设中 4 人所说的命题分别用 P,Q,R,S 表示，则有

$$P=\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D, \quad Q=\neg B$$
$$R=\neg C, \quad S=A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$$

由题意知，命题 P,Q,R,S 有 3 个是真的，1 个是假的，故命题公式

$$\begin{aligned}T=&(\neg P \wedge Q \wedge R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S) \vee \\ &(P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)\end{aligned}$$

为永真式. 而

$$\begin{aligned}\neg P \wedge Q \wedge R \wedge S \Leftrightarrow &\neg(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \\ &(A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \\ \Leftrightarrow &(A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \\ \Leftrightarrow &(A \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (B \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ &(\neg C \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (D \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \\ \Leftrightarrow &(A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee 0 \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee 0 \\ \Leftrightarrow &A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D\end{aligned}$$

同理可得：

$$P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S \Leftrightarrow 0$$
$$P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \Leftrightarrow 0$$
$$P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \Leftrightarrow 0$$

即

$$\begin{aligned}T &\Leftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee 0 \vee 0 \vee 0 \\ &\Leftrightarrow A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D\end{aligned}$$

从而推出此事是甲做的.

1.3.3 永真蕴涵式

定义 1－13 如果 $A \rightarrow B$ 是一个永真式，称命题公式 A 永真蕴涵公式 B，记作 $A \Rightarrow B$.

与符号“$\Leftrightarrow$”一样，符号“$\Rightarrow$”也不是命题联结词，$A \Rightarrow B$ 也不是命题公式. 若公式 A 永真蕴涵公式 B，也称由 A 能推出 B，或说 B 是 A 的有效结论，通常称公式 A 为永真蕴涵式的前件，公式 B 为永真蕴涵式的后件.

证明公式 A 永真蕴涵公式 B，这在推理理论中是至关重要的. 类似于证明逻辑恒等式，可以用真值表加以证明，但考虑到 A 为假时 $A \rightarrow B$ 必然为真，可用下述的分析法来证明永真蕴涵式.

(1) 假定前件 A 为真，若能推出后件 B 也为真，则 $A \Rightarrow B$.

(2) 假定后件 B 为假，若能推出前件 A 也为假，则 $A \Rightarrow B$.

［例 1－23］ 证明 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$.

证 方法 1：假设 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真，则 $P, P \rightarrow Q$ 均为真，从而 P 为真，Q 为真，即

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

方法 2：设 Q 为假，对于 P 分情况讨论：

若 P 为真，则 $P \rightarrow Q$ 为假，所以 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为假；

若 P 为假，则 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为假.

总之

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

［例 1－24］ 证明 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$.

证 假设 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为真，则 $\neg Q, P \rightarrow Q$ 均为真，所以 Q 为假，结合 $P \rightarrow Q$ 为真，得 P 为假. 从而得 $\neg P$ 为真，故

$$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$$

［例 1－25］ 证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证 假设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真，则 $\neg P$、$P \vee Q$ 均为真，从而 P 为假，Q 为真，即

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$$

［例 1－26］ 证明 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$.

证 假设 $P \rightarrow R$ 为假，则 P 为真，R 为假，对于 Q 分情况讨论：

若 Q 为真，则 $(Q \rightarrow R)$ 为假，从而 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ 为假；

若 Q 为假，则 $(P \rightarrow Q)$ 为假，也有 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ 为假.

总之

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

［例 1－27］ 证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow R \vee S$.

证 假设 $R \vee S$ 为假，则 R, S 均为假，对于 P, Q 分情况讨论：

若 P 为假，Q 为假，则 $P \vee Q$ 为假，从而 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)$ 为假；

若 P 为假，Q 为真，则 $Q \rightarrow S$ 为假，从而 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)$ 为假；

若 P 为真，Q 为假，则 $P \rightarrow R$ 为假，从而 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)$ 为假；

若 P 为真，Q 为真，则 $P \rightarrow R, Q \rightarrow S$ 为假，从而 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)$ 为假.

总之

$$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow R \vee S$$

由例 1－23 ～ 例 1－27 得到常用的永真蕴涵式由表 1－11 给出.

表 1－11 常用的永真蕴涵式

1	$P \wedge Q \Rightarrow P \quad P \wedge Q \Rightarrow Q$	简化式
2	$P \Rightarrow P \vee Q \quad Q \Rightarrow P \vee Q$	加法式
3	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	假言推理
4	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	拒取式
5	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	析取三段论
6	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	前提三段论
7	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$	二难推理
8	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow R \vee S$	构造性二难推理

上述永真蕴涵式不难用真值表证明其有效性. 除表中列出的外，还有以下永真蕴涵式会经

常用到.

$$\neg P \Rightarrow P \to Q,\quad Q \Rightarrow P \to Q,\quad \neg (P \to Q) \Rightarrow P,\quad \neg (P \to Q) \Rightarrow \neg Q$$

由表1-11列出的常用的永真蕴涵式及表1-5列出的常用的逻辑恒等式,结合置换规则就可以证明其他的永真蕴涵式.

[例1-28] 证明 $(P \vee Q) \wedge ((P \vee Q \to ((P \to R) \wedge (R \to S))) \Rightarrow P \to S$.

证 $(P \vee Q) \wedge ((P \vee Q \to ((P \to R) \wedge (R \to S)))$

$\Rightarrow (P \to R) \wedge (R \to S)$ 假言推理

$\Rightarrow P \to S$ 前提三段论

[例1-29] 证明 $(R \to (P \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg R$.

证 $(R \to (P \wedge Q)) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (R \to (P \wedge Q)) \wedge \neg (P \wedge Q)$ 摩根定律

$\Rightarrow \neg R$ 拒取式

[例1-30] 证明 $P \to Q \Rightarrow (P \vee R) \to (Q \vee R)$.

证 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 蕴涵表达式

$\Rightarrow \neg P \vee Q \vee R$ 加法式

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge 1$ 同一律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R \vee Q \vee R)$ 排中律

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \vee R)$ 分配律

$\Leftrightarrow \neg (P \vee R) \vee (Q \vee R)$ 摩根定律

$\Leftrightarrow (P \vee R) \to (Q \vee R)$ 蕴涵表达式

[例1-31] 证明 $P \to Q \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge R)$

证 证法1: $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 蕴涵表达式

$\Rightarrow \neg P \vee Q \vee \neg R$ 加法式

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee R \vee \neg R)$ 同一律、排中律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \vee (Q \wedge R)$ 分配律

$\Leftrightarrow \neg (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ 摩根定律

$\Leftrightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge R)$ 蕴涵表达式

证法2:因为

$(P \to Q) \to ((P \wedge R) \to (Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q) \vee (\neg (P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$ 蕴涵表达式

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee \neg R) \vee (Q \wedge R))$ 摩根定律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R))$ 交换律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \vee ((P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R))$ 分配律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \vee ((P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge 1 \wedge (\neg Q \vee R))$ 排中律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \vee ((P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R))$ 同一律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R \vee P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee \neg Q \vee R)$ 分配律

$\Leftrightarrow (1 \vee \neg R \vee Q) \wedge (1 \vee 1) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee 1)$ 交换律、排中律

$\Leftrightarrow 1$ 零律

所以，由定义可得

$$P \to Q \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge R)$$

至此我们可看到，证明永真蕴涵式有 4 种方法，即真值表法、分析法、公式推导法和定义法，根据题目及要求可选择不同的方法.

恒等式和永真蕴涵式具有以下几个性质：

(1) 若 $A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$.

(2) 若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$.

(3) 若 $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(4) $A \Rightarrow B \to C$ 的充要条件是 $A \wedge B \Rightarrow C$.

需要注意：在证明永真蕴涵式时，对表 1-11 及已有的永真蕴涵式要整体套用，一般不能对子公式套用已有的永真蕴涵式，否则会得到错误的结论. 例如，对公式 $P \to R$ 的子公式 P，若套用永真蕴涵式 $P \Rightarrow P \vee Q$，则得到

$$P \to R \Rightarrow P \vee Q \to R$$

显然是错误的，因为若令 $P=0, R=0, Q=1$ 时，则上式左边为 1，而右边为 0，与永真蕴涵式的定义矛盾.

1.4 命题范式

命题公式千变万化，这对研究和应用命题公式带来一定的困难，有必要研究命题公式的标准形式，这种标准形式就称为命题范式.

1.4.1 析取范式和合取范式

定义 1-14 命题变元 P, Q, R 等以及它们的否定 $\neg P, \neg Q, \neg R$ 等称为文字. 有限个文字的合取式称为短语，有限个文字的析取式称为子句. 特别地，文字既可以看做是短语，也可以看做是子句.

例如，$P \wedge \neg Q \wedge R$，$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$，$P$，$\neg Q$ 都是短语，而 $P \vee \neg P \vee Q$，$P \vee \neg Q \vee R$，P，$\neg Q$ 都是子句.

显然在一个短语中有任一个文字为假，则该短语就是一个矛盾式；在一个子句中有任一个文字为真，则该子句就是一个重言式.

定义 1-15 有限个短语的析取式称为析取范式，有限个子句的合取式称为合取范式.

例如，$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R)$ 是析取范式，$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ 是合取范式.

由定义 1-15 知，单独的短语或子句既可看做合取范式，也可看做析取范式. 例如 P，$\neg Q$，$\neg P \vee Q$，$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ 既可认为是合取范式，也可认为是析取范式.

定理 1-4 对于任意命题公式 A，必存在等价于它的合取范式和析取范式.

证 对任意公式 A，通过如下规则可得出等价于 A 的合取或析取范式.

(1) 使用表 1-5 中的基本等价式，可将公式中命题联结词“$\to$”和“$\leftrightarrow$”去掉.

(2) 使用双重复定律和德摩根定律，将 A 中否定词都直接放在命题变元之前.

(3) 反复使用分配律，即可得到等价于 A 的合取或析取范式.