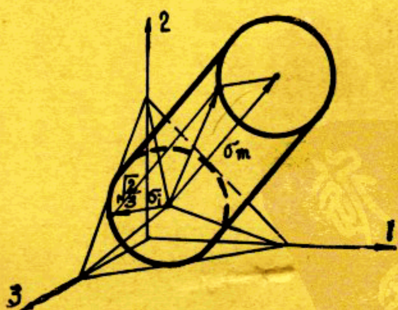
塑性理论基础

习题解答

徐秉业　陈森灿　编



清华大学工程力学系固体力学教研组
清华大学机械工程系锻压教研组

1980.9.

前　言

塑性理论和弹性理论一样都是固体力学的重要内容。它不仅在理论上对研究非线性的本构方程具有重要意义，而且在结构和机械设计以及金属成型等工程领域都有着广泛的应用前景。

由于在塑性理论中，变形体的数学模型较多，处理起来也比较复杂，需要建立许多新的概念。在这些概念未建立之前，初学这门课程的读者往往感到许多问题难于理解，遇到问题时经常无从入手。为了建立这些新的重要的概念，除了要加深对课程基本内容的理解外，非常需要多作一些习题练习。

但是在目前塑性力学的教材和讲义中，习题都比较少，有的根本没有习题。为了弥补这个缺陷，我们在编写“塑性理论基础”的教材时，尽量收集了各种典型的习题，以便读者练习。然而，由于这门课程内容多，有的题目难度较大，为了帮助读者尽快地掌握它的基本内容，我们编写了这本“塑性理论基础”习题解答，供读者参考。为了使读者易于理解本课程的基本内容，尽量地使用一般的数学工具。由于在原选的习题中，个别习题在内容上有些重复，故在题解中已予删去。

我们希望这本习题解答能对初学这门课程的读者有所帮助。

在编写这本习题解答的过程中，工程力学系固体力学教研组刘信声同志和基础部力学教研组陈季筠同志曾验算了部分习题，并提出了改进意见，作者对此表示感谢！

由于作者水平所限和编写时间仓促，许多问题分析还嫌不够，错误和不妥之处也一定不少，诚恳地欢迎读者批评指正。

徐秉业　陈森灿

1980．9

目　　录

第二章　应 力 状 态

1．　设在物体中某一点的应力张量分量为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} kg/mm^2$$

求作用在过此点的平面 $x+3y+z=1$ 的应力向量（设外法线为离开原点的方向），求应力向量的法向与切向分量。

解：根据空间平面和直线的关系式有

平面方程是　　$Ax+By+Cz+D=0$

直线方程是　　$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$

m、n、p 是此直线的一组方向数，而直线的方向数是与直线的方向余弦成比例的一组数。

直线与平面垂直的必要且充分的条件是$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$，$x+3y+z=1$ 平面上法线单位失量 $\vec{\nu}$

$$\frac{A}{\nu_1}=\frac{B}{\nu_2}=\frac{C}{\nu_3} \qquad \frac{1}{\nu_1}=\frac{3}{\nu_2}=\frac{1}{\nu_3} \qquad \nu_1=\nu_3 \qquad \nu_2=3\nu_1=3\nu_3$$

$$\nu_1{}^2+\nu_2{}^2+\nu_3{}^2=1 \qquad \nu_1=\nu_3=\frac{1}{\sqrt{11}} \qquad \nu_2=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\overset{\nu}{T}_i=\sigma_{ji}\nu_j=\sigma_{1i}\nu_1+\sigma_{2i}\nu_2+\sigma_{3i}\nu_3$$

$$\overset{\nu}{T}_1=\sigma_{11}\nu_1+\sigma_{21}\nu_2+\sigma_{31}\nu_3=1\times\frac{3}{\sqrt{11}}+2\times\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\overset{\nu}{T}_2=\sigma_{12}\nu_1+\sigma_{22}\nu_2+\sigma_{32}\nu_3=1\times\frac{1}{\sqrt{11}}+2\times\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{7}{\sqrt{11}}$$

$$\overset{\nu}{T}_3=\sigma_{13}\nu_1+\sigma_{23}\nu_2+\sigma_{33}\nu_3=2\times\frac{1}{\sqrt{11}}+1\times\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\sigma_n=\overset{\nu}{T}_i\nu_i=\overset{\nu}{T}_1\nu_1+\overset{\nu}{T}_2\nu_2+\overset{\nu}{T}_3\nu_3=\frac{5}{\sqrt{11}}\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{7}{\sqrt{11}}\frac{3}{\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{11}}\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{29}{11}$$

$$\tau^2 = \overset{\nu}{T}_i \overset{\nu}{T}_i - \sigma_n^2 = \frac{25}{11} + \frac{49}{11} + \frac{9}{11} - \left(\frac{29}{11}\right)^2 = \frac{72}{121} = 0.595$$

$$\tau = 0.771$$

$$\left(\overset{\nu}{T}_i\right) = \frac{1}{\sqrt{11}}(5、7、3) kg/mm^2, \quad \sigma_n = \frac{29}{11} kg/mm^2,$$

$$\tau = 0.771 kg/mm^2$$

$$\overset{\nu}{\vec{T}} = \frac{1}{\sqrt{11}}(5i + 7j + 3k), \quad \overset{\nu}{\vec{T}} \text{ 为应力向量}$$

$$\left|\overset{\nu}{T}\right|^2 = \left|\overset{\nu}{T}_i\right|^2 = \frac{25 + 49 + 9}{11} = \frac{83}{11}$$

2. 对于 x，y，z 轴，物体内一点的应力状态为

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{pmatrix} kg/cm^2$$

求作用在过此点且平行于 $x + 2y + 2z - 6 = 0$ 的面上的应力向量。

解：$\frac{1}{\nu_1} = \frac{2}{\nu_2} = \frac{2}{\nu_3} \quad \nu_2 = \nu_3 = 2\nu_1 \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$

$$\nu_1 = \frac{1}{3} \qquad \nu_2 = \nu_3 = \frac{2}{3}$$

$$\overset{\nu}{T}_1 = \sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{21}\nu_2 + \sigma_{31}\nu_3 = 200 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{2}{3} + 300 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1600}{3} = 533 kg/cm^2$$

$$\overset{\nu}{T}_2 = \sigma_{12}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{32}\nu_3 = 400 \times \frac{1}{3} = 133 kg/cm^2$$

$$\overset{\nu}{T}_3 = \sigma_{13}\nu_1 + \sigma_{23}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 = 300 \times \frac{1}{3} - 100 \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3} = 33 kg/cm^2$$

$$\overset{\nu}{\vec{T}} = 533i + 133j + 33k \quad \text{或} \left(\overset{\nu}{T}_i\right) = (533、133、33) kg/cm^2$$

3. 一点的应力为 $\sigma_x = 500 kg/cm^2$，$\sigma_y = 500 kg/cm^2$

$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$，求作用于过此点的一切平面上剪应力的最大值

解：$\sigma_x = \sigma_1 = 500 kg/cm^2 \quad \sigma_y = \sigma_2 = 500 kg/cm^2 \quad \sigma_z = \sigma_3 = 0$

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{500-0}{2}=250kg/cm^2$$

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}500 & 0 & 0\\ 0 & 500 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}kg/cm^2$$

4. 若在（x_0，y_0，z_0）点的应力状态为

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}100 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & -100\end{pmatrix}kg/cm^2,$$

求作用于 $x-x_0+y-y_0+z-z_0=0$ 面上的应力向量及正应力与剪应力

解：平面方程为 $$x+y+z-x_0-y_0-z_0=0$$

$$\frac{1}{\nu_1}=\frac{1}{\nu_2}=\frac{1}{\nu_3}\qquad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1\qquad \nu_1=\nu_2=\nu_3=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\overset{\nu}{T}_1=\sigma_{11}\nu_1+\sigma_{21}\nu_2+\sigma_{31}\nu_3=100\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$\overset{\nu}{T}_2=\sigma_{12}\nu_1+\sigma_{22}\nu_2+\sigma_{32}\nu_3=50\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$\overset{\nu}{T}_3=\sigma_{13}\nu_1+\sigma_{23}\nu_2+\sigma_{33}\nu_3=(-100)\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_n=\overset{\nu}{T}_i\nu_i=\overset{\nu}{T}_1\nu_1+\overset{\nu}{T}_2\nu_2+\overset{\nu}{T}_3\nu_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(100+50-100)\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{50}{3}=16.7$$

$$\tau^2=\overset{\nu}{T}_i\overset{\nu}{T}_i-\sigma_n^2=\frac{10^4}{3}+\frac{2500}{3}+\frac{10^4}{3}-\frac{2500}{9}=\frac{6.5\times10^4}{9}$$

$$\tau=\frac{\sqrt{6.5}}{3}\times10^2=\frac{2.55}{3}\times10^2=85$$

$$\left(\overset{\nu}{T}_i\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}(100,\ 50,\ -100)kg/cm^2\quad \sigma_n=16.7kg/cm^2$$

$$\tau=85kg/cm^2$$

5. 已知 $\sigma_{xx}=1000kg/cm^2$，$\sigma_{yy}=-1000kg/cm^2$，$\sigma_{zz}=0$，$\tau_{xy}=500kg/cm^2$，$\tau_{yz}=-200kg/cm^2$，$\tau_{zx}=0$

试求法线向量为 $\vec{\nu}=0.10i+0.30j+\sqrt{0.90}\,K$ 的截面上的应力状态；

① 截面上应力向量沿 x，y，z 轴方向的三个分量；

② 截面上总的应力向量；

③ 截面上 σ_n，τ_n。

解：$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$ 而 $(0.10)^2+(0.30)^2+(\sqrt{0.90})^2=1$

即 $\vec{\nu}=0.10i+0.30j+\sqrt{0.90}\ K$ 为法线单位向量

$$\overset{\nu}{T}_i=\tau_{ij}\nu_j$$

$$\overset{\nu}{T}_1=\sigma_{1j}\nu_j=\sigma_{11}\nu_1+\sigma_{12}\nu_2+\sigma_{13}\nu_3=1000(0.1)+500(0.3)=250$$

$$\overset{\nu}{T}_2=\sigma_{2j}\nu_j=\sigma_{21}\nu_1+\sigma_{22}\nu_2+\sigma_{23}\nu_3=500(0.1)-1000(0.3)\ -200\ (\sqrt{0.90})=-440$$

$$\overset{\nu}{T}_3=\sigma_{3j}\nu_j=\sigma_{31}\nu_1+\sigma_{32}\nu_2+\sigma_{33}\nu_3=-200(0.3)=-60$$

$$\left|\overset{\nu}{\vec{T}}\right|^2=\left|\overset{\nu}{T}_i\right|^2=(250)^2+(-440)^2+(-60)^2$$

$$=6.25\times10^4+19.36\times10^4+0.36\times10^4=25.97\times10^4$$

$$\left|\overset{\nu}{\vec{T}}\right|=509.6\approx510$$

$$\sigma_n=\overset{\nu}{T}_i\ \nu_i=\overset{\nu}{T}_1\ \nu_1+\overset{\nu}{T}_2\ \nu_2+\overset{\nu}{T}_3\ \nu_3$$

$$=250(0.1)-440(0.3)-60\sqrt{0.9}=-164$$

$$\tau_n^2=\left|\overset{\nu}{T}_i\right|^2-\sigma_n^2=25.97\times10^4-2.69\times10^4=23.28\times10^4$$

$$\tau_n=482.5$$

$$(T_i)=250,\ -440,\ -60)kg/cm^2$$

$$\left(\overset{\nu}{\vec{T}}\right)=510kg/cm^2\quad\sigma_n=-164kg/cm^2\quad\tau_n=482kg/cm^2$$

6. 物体中某一点的应力分量（相对于直角座标系 $0x_1\ x_2\ x_3$）为

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}kg/mm^2$$

试求不变量 I_1，I_2，I_3，主应力的数值，以及应力偏量不变量 I_1'，I_2'，I_3'。

解：
$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=1-1+1=1$$

$$I_2=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\tau_{31}^2-\tau_{12}^2-\tau_{23}^2=-1-1+1-(-1)^2=-2$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

$$\triangle=-\sigma^3+I_1\sigma^2-I_2\sigma+I_3=0$$

$$-\sigma^3+\sigma^2-(-2)\sigma=0,\qquad \sigma^3-\sigma^2-2\sigma=0,$$

$$\sigma(\sigma^2-\sigma-2)=0,\qquad \sigma(\sigma+1)(\sigma-2)=0,$$

$$\sigma_1=2,\ \sigma_2=0,\ \sigma_3=-1,\quad \sigma_m=\frac{1}{3}$$

$$I_1'=\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3'=(\sigma_1-\sigma_m)+(\sigma_2-\sigma_m)+(\sigma_3-\sigma_m)=0$$

$$I_2'=\sigma_1'\sigma_2'+\sigma_2'\sigma_3'+\sigma_3'\sigma_1'=I_2-\frac{I_1^2}{3}=-2-\frac{1^2}{3}=-2\frac{1}{3}$$

$$I_3'=\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'=(\sigma_1-\sigma_m)(\sigma_2-\sigma_m)(\sigma_3-\sigma_m)$$

$$=\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(0-\frac{1}{3}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{20}{27}$$

$$I_3'=I_3-\frac{I_1I_2}{3}+\frac{2}{27}I_1^3=0-\frac{1(-2)}{3}+\frac{2}{27}(1)^3=\frac{2}{3}+\frac{2}{27}=\frac{20}{27}$$

$$I_1=1kg/mm^2\qquad I_2=-2\qquad I_3=0$$

$$(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)=(2,\ 0,\ -1)kg/mm^2$$

$$I_1'=0\qquad I_2'=-2\frac{1}{3}\qquad I_3'=\frac{20}{27}$$

7. 已知物体中一点的应力分量为

$$\begin{pmatrix}500 & 500 & 800\\ 500 & 0 & -750\\ 800 & -750 & -300\end{pmatrix}kg/cm^2,$$

试求法线用方向余弦 $l=\frac{1}{2}$， $m=\frac{1}{2}$， $n=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 表示的载面上的应力：总应力 $\left|\overset{\nu}{T}\right|$、正应力 σ_n、剪应力 τ_n。

解：
$$\overset{\nu}{T}_1=\sigma_{11}\nu_1+\sigma_{12}\nu_2+\sigma_{13}\nu_3=500\times\frac{1}{2}+500\times\frac{1}{2}+800\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=500+400\sqrt{2}=1065$$

$$\overset{\nu}{T}_2 = \sigma_{21}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{23}\nu_3 = 500 \times \frac{1}{2} - 750 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 250 - 375\sqrt{2} = -280$$

$$\overset{\nu}{T}_3 = \sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 = 800 \times \frac{1}{2} - 750 \times \frac{1}{2} - 300 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 25 - 150\sqrt{2} = -187$$

$$\left|\overset{\nu}{\vec{T}}\right|^2 = (1065)^2 + (-280)^2 + (-187)^2$$

$$= 113.4 \times 10^4 + 7.84 \times 10^4 + 3.497 \times 10^4 = 124.74 \times 10^4$$

$$\left|\overset{\nu}{\vec{T}}\right| = 1117 kg/cm^2$$

$$\sigma_n = \overset{\nu}{T}_1\nu_1 + \overset{\nu}{T}_2\nu_2 + \overset{\nu}{T}_3\nu_3 = 1065 \times \frac{1}{2} + (-280)\frac{1}{2} - 187 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 260.5 kg/cm^2$$

$$\tau_n^2 = \left|\overset{\nu}{T}_i\right|^2 - \sigma_n^2 = (1117)^2 - (260.5)^2 = 124.7 \times 10^4 - 6.786 \times 10^4 = 122 \times 10^4$$

$$\tau_n = 1086 kg/cm^2$$

8. 试求如下二种复杂剪切情形下应力张量不变量 I_1，I_2，I_3，主应力和八面体剪应力，① $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau$

② $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau$

解： ① $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau$；　$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{zx} = 0$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \tau_{12}^2 - \tau_{23}^2 - \tau_{31}^2 = -\tau^2 - \tau^2 = -2\tau^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\triangle = -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

$$-\sigma^3 - (2\tau^2)\sigma = 0, \quad \sigma^3 - 2\tau^2\sigma = 0,$$

$$\sigma(\sigma^2 - 2\tau^2) = 0, \quad \sigma(\sigma + \sqrt{2}\tau)(\sigma - \sqrt{2}\tau) = 0$$

$$\sigma_1=\sqrt{2}\,\tau \qquad \sigma_2=0 \qquad \sigma_3=-\sqrt{2}\,\tau$$

$$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{2\tau^2+2\tau^2+8\tau^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\tau$$

② $$\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau, \qquad \sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=0$$

$$I_1=\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}=0$$

$$I_2=-3\tau^2$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{vmatrix}=\tau^3+\tau^3=2\tau^3$$

$$\triangle=-\sigma^3+I_1\sigma^2-I_2\sigma+I_3=0$$

$$-\sigma^3-(-3\tau^2)\sigma+2\tau^3=0, \qquad \sigma^3-3\tau^2\sigma-2\tau^3=0$$

$$(\sigma^2+2\tau\sigma+\tau^2)(\sigma-2\tau)=0, \qquad (\sigma+\tau)^2(\sigma-2\tau)=0$$

$$\sigma_1=2\tau \qquad \sigma_2=\sigma_3=-\tau$$

$$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{9\tau^2+9\tau^2}=\sqrt{2}\,\tau$$

9． 一点具有应力分量 $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$, $\sigma_z=2000kg/cm^2$, $\tau_{yz}=\tau_{zx}=1000\ kg/cm^2$ 试计算主应力

解：$I_1=2000$

$$I_2=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\tau_{12}^2-\tau_{23}^2-\tau_{31}^2=-10^6-10^6=-2\times10^6$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 1000 \\ 1000 & 1000 & 2000 \end{vmatrix}=0$$

$$\triangle=-\sigma^3+I_1\sigma^2-I_2\sigma+I_3=0,$$

$$-\sigma^3+2000\sigma^2-\sigma(-2\times10^6)=0, \qquad \sigma^3-2000\sigma^2-2\times10^6\sigma=0$$

$$\sigma(\sigma^2-2\times10^3\sigma-2\times10^6)=0$$

$$\sigma=0,\quad \sigma=\frac{-(-2\times10^3)\pm\sqrt{4\times10^6+8\times10^6}}{2}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}\times10^3=(1\pm\sqrt{3})\times10^3$$

$$\sigma_1=2.732\times10^3=2732kg/cm^2$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=-732kg/cm^2$$

10．在物体中一点的应力分量为

$$\begin{pmatrix} 500 & 300 & -800 \\ 300 & 0 & -300 \\ -800 & -300 & 1100 \end{pmatrix} kg/cm^2,$$

试确定在具有外法线 ν 的截面上的总应力、正应力和剪应力的数值，法线相对于各座标轴的方向余弦彼此相等。

解：$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1 \qquad \nu_1=\nu_2=\nu_3=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\overset{\nu}{T}_1=\sigma_{11}\nu_1+\sigma_{12}\nu_2+\sigma_{13}\nu_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(500+300-800)=0$$

$$\overset{\nu}{T}_2=\sigma_{21}\nu_1+\sigma_{22}\nu_2+\sigma_{23}\nu_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(300+0-300)=0$$

$$\overset{\nu}{T}_3=\sigma_{31}\nu_1+\sigma_{32}\nu_2+\sigma_{33}\nu_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-800-300+1100)=0$$

$$\left|\overset{\nu}{\vec{T}}\right|=0 \qquad \sigma_n=\tau_n=0$$

即所研究的截面上没有应力。

11．在上题中如应力 $\sigma_y=1000\sqrt{3}\,kg/cm^2$，其结果将怎样变化？

解：该点的应力张量为

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix} 500 & 300 & -800 \\ 300 & 1000\sqrt{3} & -300 \\ -800 & -300 & 1100 \end{pmatrix} kg/cm^2$$

$$\overset{\nu}{T}_1=0$$

$$\overset{\nu}{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(300 + 1000\sqrt{3} - 300) = 1000$$

$$\overset{\nu}{T}_3 = 0$$

$$\left|\overset{\nu}{\vec{T}}\right| = \overset{\nu}{T}_2 = 1000kg/cm^2$$

$$\sigma_n = \overset{\nu}{T}_1 \nu_1 + \overset{\nu}{T}_2 \nu_2 + \overset{\nu}{T}_3 \nu_3 = \overset{\nu}{T}_2 \nu_2 = 1000 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tau_n^2 = (1000)^2 - \left(\frac{1000}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2\times 10^6}{3}, \quad \tau_n = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 10^3 = \sqrt{2}\,\sigma_n$$

$$\left|\overset{\nu}{T}\right| = 10^3 kg/cm^2, \quad \sigma_n = \frac{1000}{\sqrt{3}} kg/cm^2, \quad \tau_n = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 1000 kg/cm^2$$

12．已知在物体中的一点应力状态为

$$\sigma_x = \sigma_y = 500kg/cm^2, \qquad \sigma_z = -1000kg/cm^2$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

试求在通过此已知点的八面体面上的正应力、剪应力和总应力的值。

解：

$$\sigma_8 = \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(500 + 500 - 1000) = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y = 500kg/cm^2 \quad \sigma_3 = \sigma_z = -1000kg/cm^2$$

$$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(1500)^2 + (1500)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times 1500 = 500\sqrt{2}\,kg/cm^2$$

$$\left|\overset{8}{\vec{T}}\right|^2 = \sigma_8^2 + \tau_8^2 = (500\sqrt{2})^2 = 2 \times (500)^2$$

$$\left|\overset{8}{\vec{T}}\right| = 500\sqrt{2}\,kg/cm^2$$

13．已知物体中某一点的应力张量为

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 0 & 20 & -15 \\ 15 & -15 & 0 \end{pmatrix} kg/mm^2,$$

试将它分解为球形张量和应力偏量，并计算应力偏量的第二不变量。

解：
$$\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{3}(10+20+0)=10kg/mm^2$$

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma_{11}-\sigma_m & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_{22}-\sigma_m & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}-\sigma_m\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 15\\ 0 & 10 & -15\\ 15 & -15 & -10\end{pmatrix}$$

球形张量　　　　　应力偏量

$$I_2'=I_2-\frac{I_1^2}{3}=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\tau_{12}^2-\tau_{23}^2-\tau_{31}^2-\frac{(3\sigma_m)^2}{3}=$$

$$=10\times20-(-15)^2-(15)^2-\frac{(30)^2}{3}=$$

$$=200-450-300=-550(kg/cm^2)^2$$

14．某点应力分量为

$$\begin{pmatrix}1000 & 400 & -200\\ 400 & 500 & 300\\ -200 & 300 & -100\end{pmatrix}kg/cm^2$$

试求读点中主应力的大小和方向，同时计算主剪应力的大小。

解：
$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=1000+500-100=1400$$

$$I_2=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\tau_{12}^2-\tau_{23}^2-\tau_{31}^2$$

$$=1000\times500+500(-100)+(-100)1000-(400)^2-$$

$$-(300)^2-(-200)^2=10^4(50-5-10-16-9-4)=6\times10^4$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1000 & 400 & -200\\ 400 & 500 & 300\\ -200 & 300 & -100\end{vmatrix}=$$

$$=10^6(-50-24-24-20-90+16)=-192\times10^6$$

$$\triangle=-\sigma^3+I_1\sigma^2-I_2\sigma+I_3=0$$

$$-\sigma^3+1400\sigma^2-6\times10^4\sigma-192\times10^6=0$$

$\sigma^3-14\times10^2\sigma^2+6\times10^4\sigma+192\times10^6=0$，这是一元三次代数方程式，根据一元三次代数方程式解法可得：

$$\sigma_1=1222kg/cm^2$$

$$\sigma_2=494kg/cm^2$$

$$\sigma_3=-317kg/cm^2$$

$$\tau_{12}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{1222-494}{2}=364kg/cm^2$$

$$\tau_{23}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}=\frac{494+317}{2}=405.5kg/cm^2$$

$$\tau_{13}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{1222+317}{2}=769.5kg/cm^2$$

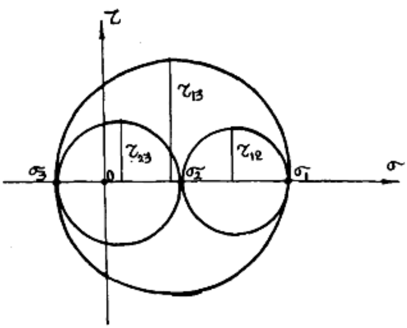


图 2—1

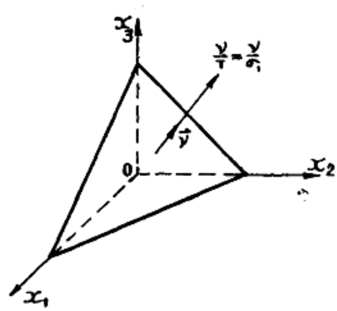


图 2—2

计算主应力 σ_1 相对于直角坐标系 $oxyz$ 的方向余弦：

$$\begin{cases}(\sigma_{11}-\sigma_1)\nu_1+\tau_{12}\nu_2+\tau_{13}\nu_3=0\\ \tau_{21}\nu_1+(\sigma_{22}-\sigma_1)\nu_2+\tau_{23}\nu_3=0\\ \tau_{31}\nu_1+\tau_{32}\nu_2+(\sigma_{33}-\sigma_1)\nu_3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1000-1222)\nu_1+400\nu_2-200\nu_3=0=-222\nu_1+400\nu_2-200\nu_3\\ 400\nu_1+(500-1222)\nu_2+300\nu_3=0=400\nu_1-722\nu_2+300\nu_3\\ -200\nu_1+300\nu_2+(-100-1222)\nu_3=0=-200\nu_1+300\nu_2-1322\nu_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} -1.11\nu_1 + 2\nu_2 - \nu_3 = 0 \\ 4\nu_1 - 7.22\nu_2 + 3\nu_3 = 0 \\ -2\nu_1 + 3\nu_2 - 13.22\nu_3 = 0 \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \end{cases} \qquad \nu_3 = -1.11\nu_1 + 2\nu_2 = \frac{7.22\nu_2 - 4\nu_1}{3} = \sqrt{1 - \nu_1^2 - \nu_2^2}$$

$$\nu_1 = 0.88, \qquad \nu_2 = 0.48, \qquad \nu_3 = 0.0025$$

15．已知单元体的应力状态如图 2—3，σ_x，τ_{xy} 为已知，求主应力大小及主平面的位置，$\sigma_x = 1000kg/cm^2$，$|\tau_{xy}| = 500kg/cm^2$

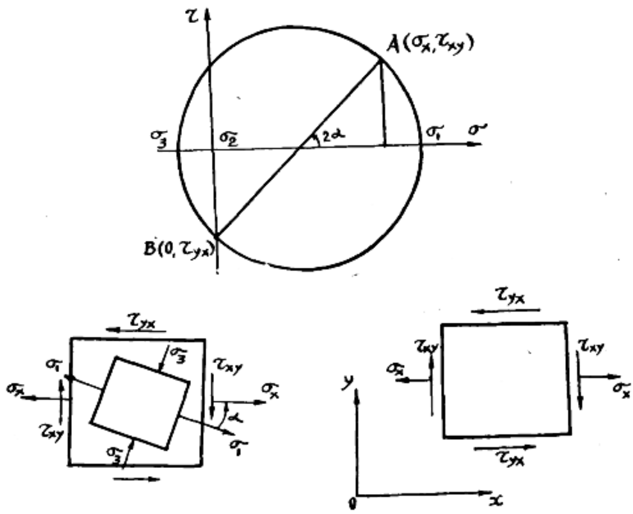


图 2—3

解：

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1000}{2} + \sqrt{500^2 + 500^2} =$$

$$= 500\ (1 + \sqrt{2}) = 1207kg/cm^2$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 500\ (1 - \sqrt{2}) = -207kg/cm^2$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x}{2}} = \frac{500}{\frac{1000}{2}} = 1, \qquad 2\alpha = 45°, \qquad \alpha = 22.5°$$

16．某一点应力分量如图 2—4，试计算其主应力并画出应力圆。

解：根据已知条件，σ_x 是被研究点的主应力之一，另二个主应力必然与 σ_x 互相垂直，即另二个主应力作用面必然与 σ_x 平行，

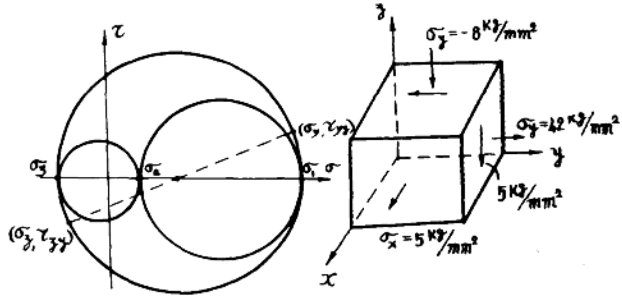


图 2—4

因此有
$$\sigma=\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{yz}{}^2}=$$

$$=\frac{42-8}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{42+8}{2}\right)^2+5^2}=17\pm25.5$$

$\sigma_1=42.5kg/mm^2$　　$\sigma_2=5kg/mm^2$　　$\sigma_3=-8.5kg/mm^2$

17．试求图示各应力状态的主应力及最大剪应力(应力单位 kg/cm^2)并画出应力圆。

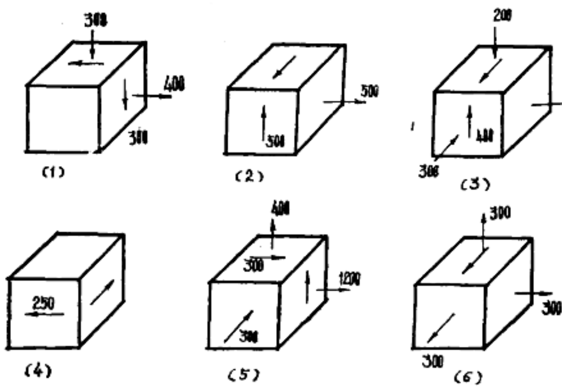


图 2—5

解：

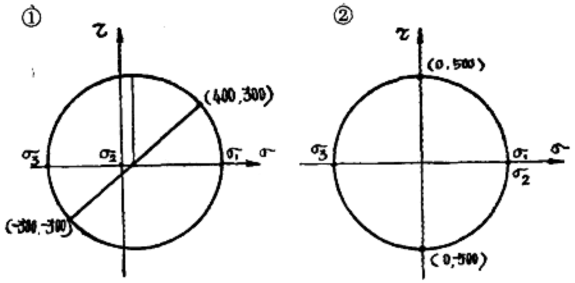


图 2—6

①

$$\sigma_1=\frac{400-300}{2}+\sqrt{\left(\frac{400-300}{2}\right)^2+300^2}$$

$$=50+100\sqrt{3.5^2+9}=511kg/cm^2$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=50-461=-411kg/cm^2$$

$$\tau_{\max}=\frac{511+411}{2}=461kg/cm^2$$

②

$$\sigma_1=500kg/cm^2$$

$$\sigma_2=500kg/cm^2$$

$$\sigma_3=-500kg/cm^2$$

$$\tau_{\max}=500kg/cm^2$$

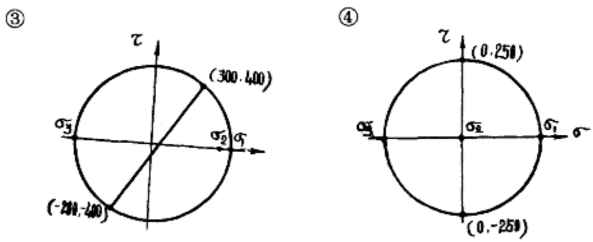


图 2—7

③

$$\sigma_2=500kg/cm^2$$

$$\sigma_1=\frac{300-200}{2}+\sqrt{\frac{(300-200)^2}{2}+400^2}$$

$$=50+100\sqrt{6.25+16}=50+472$$

$$=522kg/cm^2$$

$$\sigma_3=50-472=-422kg/cm^2$$

$$\tau_{\max}=472kg/cm^2$$

④

$$\sigma_1=250kg/cm^2$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=-250kg/cm^2$$

$$\tau_{\max}=250kg/cm^2$$