同济大学新编数学辅导丛书

同济大学高等数学教研室 编

高等数学

习题精编

（全解）

（配同济四、五版）

同济大学出版社

同济大学新编数学辅导丛书

高等数学习题精编(全解)

(配同济四、五版)

同济大学高等数学教研室　编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书根据国家教委审订的高等专业学校"高等教学课程教学基本要求",按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》(高教四、五版)教材的章节顺序编写而成,可以与该两版教材配合使用.这些习题是我们从一大批较好的高等数学习题中精心筛选出的一部分典型的习题提供给读者参考使用.全书共12章,每章分若干节,并对全部习题作了详细解答.

本书可供工科院校师生、科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题精编(全解):配同济四、五版/同济大学高等数学教研室编.—上海:同济大学出版社,2001.3

(同济大学新编数学辅导丛书)

ISBN 7-5608-2247-9

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学—高等学校—习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 88478 号

同济大学数学辅导系列丛书

高等数学习题精编(全解)

同济大学高等数学教研室 编

责任编辑 李炳钊 责任校对 徐 栩 封面设计 永正

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 34

字 数 680 000

印 数 42 001—47 100

版 次 2001 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 4 次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2247-9/O·186

定 价 29.80 元

前　言

同济大学应用数学系和同济大学出版社共同策划组织编写的“数学辅导系列丛书”，自公开出版发行以来，得到广大读者的认可，为我国高等工科院校的数学课程教学作出了贡献．近年来，随着教学改革的深入，科学技术的突飞猛进，许多读者普遍感到高等数学内容多、要求高与课时减少、时间紧的压力日益加剧．为了帮助读者提高学习效率，为此我们从一大批较好的高等数学习题中精心筛选出一部分典型的习题，编写了这本书，提供给读者参考使用.

本书是根据国家教委审订的高等工业学校“高等数学课程教学基本要求”，按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》(高教四、五版)教材的章节顺序编写的，可以与该教材配合使用. 全书共 12 章，每章分若干节，对全部习题都作了详细的解答.

本书由徐建平策划，参加编写的人员有徐建平、蒋福民、邵婉敏、李少华、刘庆生、李想等。全书由徐建平总纂定稿. 在编写过程中，得到同济大学应用数学系广大教师的大力协助，许多资深教师对原稿提出了宝贵的意见，同济大学出版社的李炳钊副编审在本书出版的过程中给予了极大的支持，在此一并表示诚挚的感谢.

由于编者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，殷切期望同行与广大读者给予批评指正.

编　者

2002 年 12 月

同济大学
新编数学辅导丛书
编委会

目　录

第1章　函数与极限

1.1 函　数

1.1.1　下列各题中，函数$f(x)$与$g(x)$是否相同？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$, $g(x)=1$；　(2) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=(\sqrt{x})^2$, $g(x)=\sqrt{x^2}$；　(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$, $g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$；

(5) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；　(6) $f(x)=1$, $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

1.1.2　确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$；　(2) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$；

(3) $y=\log_3\log_4\log_5 x$；　(4) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$；

(5) $y=\lg(1-2\cos x)$；　(6) $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

1.1.3　设$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$. 问$f(x^2)$, $f(\sin x)$, $f(x+a)(a>0)$, $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域各是什么？

1.1.4　证明：定义在$[-l,l]$上任何函数$f(x)$都可表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

1.1.5　设定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的函数$f(x)$单调增加，且$f\{f[f(x)]\}=f(x)$，求$f(x)$.

1.1.6　若函数$f(x)$满足$f(x)=f(2a-x)$，则称函数的图形对称于直线$x=a$. 证明：若$f(x)$的图形对称于直线$x=a$和$x=b(a\neq b)$，则$f(x)$为周期函数.

1.1.7　证明：对任意实数a,b，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

1.1.8　设函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且满足$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中$a,b,c$均为常数，$|a|\neq|b|$．证明$f(x)$为奇函数．

1.1.9　设$\varphi(x),\psi(x)$及$f(x)$为单调增函数，证明：若$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

1.1.10　判定函数$f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$的奇偶性．

1.1.11　当a,b,c,d满足什么条件时，函数$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0)$与其反函数相同?

1.1.12　求下列函数的反函数：

(1) $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$；　(2) $y=\frac{a^x}{a^x+1}$　$(a>0,a\neq1)$；

(3) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$；　(4) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$.

1.1.13　设$y=\frac{1}{2x}f(t-x)$，且当$x=1$时，$y=\frac{1}{2}t^2-t+5$，求$f(x)$.

1.1.14　若$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$.

1.1.15　设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$且$z|_{y=1}=x$，求$f(x)$.

1.1.16　设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1\\ x^2+1, & |x|\geqslant1\end{cases}$，求$f[f(x)]$.

1.1.17　若$f(x)=a+bx,(b\neq1)$，$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$.

试证：$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx$.

1.1.18　若$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$，试求$f_n(x)$的解析表达式．

1.1.19　若$f(x)=\frac{x}{x-1}$，试求$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$及$f\{f[f(f(x))]\}$；

若$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$，试求$f_{2n}(x)$及$f_{2n+1}(x)$.

1.1.20　设函数$f(x)$的定义域及值域均为$[0,+\infty)$．记$f_1(x)=f(x)$，

$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$, $n=1,2,\cdots$. 若 $f_{n+1}(x)=[f_n(x)]^2$ $(n=1,2,\cdots)$. 求 $f(x)$ 及 $f_n(x)$ 的解析表达式.

1.2 极　限

1.2.1　根据定义证明下列各题的数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0\quad(a>0)$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+9}{7n^3-8}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>1)$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

(5) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{a_n}{n^2}=0$.

1.2.2　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$.　$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\frac{a}{a}=1$

1.2.3　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=1$，并说明反之结论不真.

1.2.4　设有数列 $\{u_n\}$ 及 $\{U_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a\neq0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

1.2.5　根据定义，证明下列各题的函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$;　(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\quad(x_0>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$;　(4) $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}a^x=1\quad(a>1)$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\frac{1}{2}$;　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

1.2.6　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\ (x_n\neq x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

1.2.7　讨论 $x\to0$ 时，$y=e^{\frac{1}{x}}$ 的极限.

1.2.8 考虑极限 $\lim\limits_{x\to 1}\arctan\dfrac{1}{x-1}$ 是否存在.

1.2.9 利用极限的四则运算求下列各题的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2n})$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ $(a<b)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$ $(|x|<1)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$； (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{2x-\cos x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$； (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+10)^{10}(x+9)^{50}}{x^{60}+7x^{50}}$； (10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

1.2.10 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$，确定 α 与 β.

1.2.11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}$（$n$ 次复合）.

1.2.12 设 $x_0=1, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

1.2.13 设 $x_0<0, x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a^2}{x_{n-1}}\right)(a\neq 0)(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

1.2.14 设 $x_0=\sqrt{2}, x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

1.2.15 设 $x_0>1, x_n=\dfrac{3x_{n-1}+1}{x_{n-1}+3}(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

1.2.16 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin(\sin\cdots\sin x)}_{n次}$（$n$ 次复合）.（$x>0$）

1.2.17 设 $a>b>0, a_1=\dfrac{a+b}{2}, b_1=\sqrt{ab},\cdots, a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\cdots$,

$(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在且相等．

1.2.18 利用夹逼定理求下列各题的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

1.2.19 利用重要极限及等价无穷小，计算下列各题的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x\ln(1+x^2)}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{e^{x^2}-1}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1-\cos x)}{(1-e^x)\sin x^3}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]$； (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}$； (12) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$；

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}$； (14) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

(15) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$； (16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x}$；

(17) $\lim\limits_{x\to+0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$； (18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$； (20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$.

1.2.20 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x-\beta)=0$. 其中 a,b,c 为常数，且 $a>0$. 试求参数 α 和 β.

不搞成.

1.3　函数的连续性

1.3.1　证明若$f(x)$在x_0处连续且$f(x_0)\neq 0$，则必存在x_0的某个邻域，在该邻域内$f(x)\neq 0$.

1.3.2　设函数$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0; \\ \dfrac{a+x^2}{6}, & x\geqslant 0. \end{cases}$试确定$a$，使$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

1.3.3　设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x$，指出其间断点及其类型.

1.3.4　设$f(x)=\dfrac{(x-3)e^{\frac{1}{x-3}}}{\sin(x-3)}$，指出其间断点及其类型.

1.3.5　若$f(x)$对任意$x,y\in(-\infty,+\infty)$，使$f(xy)=f(x)+f(y)$，且$f(x)$在$x=1$处连续，证明$f(x)$在$x\neq 0$时均连续.

1.3.6　若$f(x)$对任意$x,y\in(-\infty,+\infty)$，恒有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，且$f(x)$在$x=0$处连续，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内均连续.

1.3.7　$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，在$x=0$处连续，且满足$f(x)=f(\lambda x)$ $|\lambda|<1$. 证明在$(-\infty,+\infty)$内$f(x)\equiv$常数.

1.3.8　设$F(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$，$(x-1)(t-1)>0$. $x\neq t$. $f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,t)$，试求$f(x)$的连续区间，并讨论$f(x)$的间断点的类型.

1.3.9　试证方程$x^5-3x=1$至少有一实根介于1和2之间.

1.3.10　设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\leqslant g(a)$，$f(b)\geqslant g(b)$. 证明至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=g(\xi)$.

1.3.11　设$f(x)$是周期为2的周期函数，且在$(-\infty,+\infty)$内连续，证明方程$f(x)-f(x-1)=0$在任何长度为1的闭区间上至少有一实根.

1.3.12　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a<c<d<b$，证明在(a,b)内必存在一点ξ，使下式成立：$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$，其中m,n为自然数.

1.4 题 解

1.1.1 (1) 不相同,因定义域不同. $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $D_g=(-\infty,+\infty)$.

(2) 不相同,因定义域不同. $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $D_g=(0,+\infty)$;

(3) 不相同,因定义域不同. $D_f=[0,+\infty)$, $D_g=(-\infty,+\infty)$;

(4) 不相同,因定义域不同. $D_f=(2,+\infty)$, $D_g=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$;

(5) 相同,因定义域及对应规律均相同;

(6) 相同,因定义域及对应规律均相同.

1.1.2 (1) 当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时,函数有意义,由$\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$,即$(x-1)(x-4)\leqslant 0$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 4$,故定义域为$[1,4]$;

(2) 由$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0,\end{cases}$即$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots;\end{cases}$

故定义域为$[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$;

(3) 要使 $\log_4\log_5 x>0$,即有 $\log_5 x>1$,从而得 $x>5$. 故定义域为$(5,+\infty)$;

(4) 由 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$ 知 $2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi(k=0,1,2,\cdots)$,即
$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2$,故定义域为

$$\{x\mid 4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2\};$$

(5) 由 $1-2\cos x>0$ 知 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$故定义域为
$\left\{x\mid x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$;

(6) 由 $-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}<1$ 知 $1\leqslant x\leqslant 100$,故所求的定义域为$[1,100]$.

1.1.3 使 $f(x^2)$有意义的 x 应满足 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,即得$-1\leqslant x\leqslant 1$,故 $f(x^2)$的定义域为$[-1,1]$.

使 $f(\sin x)$有意义的 x 应满足 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,即得 $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$,故 $f(\sin x)$的定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi]$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

使 $f(x+a)$有意义的 x 应满足 $0\leqslant x+a\leqslant 1$,即得$-a\leqslant x\leqslant 1-a$,故 $f(x+a)$的定义域为$[-a,1-a]$.

使 $f(x+a)+f(x-a)$ 有意义的 x 应满足 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ 由 $a>0$，当 $a\leqslant 1-a\left(\text{即 } 0<a\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 时，函数的定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ 无定义域．

1.1.4　证明：若 $f(x)=g(x)+h(x)$，其中 $g(x)$ 为偶函数，$h(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x)$，两式相加、减得 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$．

显然 $g(x)+h(x)=f(x)$，且 $g(x)$ 为偶函数，$h(x)$ 为奇函数．

1.1.5　设 x_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内任一点．

如果 $f(x_0)>x_0$，则 $f[f(x_0)]>f(x_0)$，$f\{f[f(x)]\}>f[f(x_0)]>f(x_0)$ 这与 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$ 矛盾．

如果 $f(x_0)<x_0$，则 $f[f(x_0)]<f(x_0)$，$f\{f[f(x)]\}<f[f(x_0)]<f(x_0)$．这也与 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$ 矛盾．故 $f(x_0)=x_0$，即 $f(x)=x$．

1.1.6　证明：若 $f(x)=f(2a-x)$ 及 $f(x)=f(2b-x)\ (a\neq b)$，则

$$f(x)=f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f(x+2b-2a)$$

记 $T=2b-2a\neq 0$，则有 $f(x)=f(x+T)$，故 $f(x)$ 为周期函数．

1.1.7　考虑 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，当 $x_1,x_2\in(-\infty,-1)$ 或 $(-1,+\infty)$ 时，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=1-\frac{1}{1+x_2}-\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)=\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0$，故 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 或 $(-1,+\infty)$ 内单调增加．

由　$|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 知

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

1.1.8　由 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，用 $\frac{1}{x}$ 代替式中的 x，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$$

联立两式，得 $f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)\quad(|a|\neq|b|)$．

故 $f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-f(x)$，即 $f(x)$ 为奇函数.

1.1.9 由于 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增加函数，故当 $f(x)\geqslant\varphi(x)$ 时，有 $f[f(x)]\geqslant f[\varphi(x)]$ 及 $f[\varphi(x)]\geqslant\varphi[\varphi(x)]$，故

$$f[f(x)]\geqslant\varphi[\varphi(x)];$$

当 $\psi(x)\geqslant f(x)$ 时，同样有 $\psi[\psi(x)]\geqslant\psi[f(x)]$，$\psi[f(x)]\geqslant f[f(x)]$，故

$$\psi[\psi(x)]\geqslant f[f(x)].$$

从而 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

1.1.10 由 $f(-x)=(2+\sqrt{3})^{-x}+(2-\sqrt{3})^{-x}=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$

$$=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=f(x).$$

知 $f(x)$ 为偶函数.

1.1.11 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$.

由 $\frac{b-dx}{cx-a}=\frac{ax+b}{cx+d}$ 整理得 $(a+d)[cx^2+(d-a)x-b]\equiv0$，即 $a+d=0$ 或 $b=c=0$，而 $a=d\neq0$.

1.1.12 (1) 令 $t=\sqrt{1+4x}$，则 $y=\frac{1-t}{1+t}$，故 $t=\frac{1-y}{1+y}$，即 $\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y}$，$x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2}$，从而反函数为 $y=-\frac{x}{(1+x)^2}$；

(2) 由 $a^x=\frac{y}{1-y}$ 知 $x=\log_a\frac{y}{1-y}$，从而反函数 $y=\log_a\frac{x}{1-x}$；

(3) 由
$$\begin{aligned}y^3&=x+\sqrt{1+x^2}+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\\&\quad+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}+x-\sqrt{1+x^2}\\&=2x+3(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\cdot\left[(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}+(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\right]\\&=2x-3y.\end{aligned}$$

即 $x=\frac{y^3+3y}{2}$，从而反函数为 $y=\frac{1}{2}(x^3+3x)$；

(4) 由 $y-1=\frac{10^{2x}+1}{10^{2x}-1}$ 知 $10^{2x}=\frac{y}{y-2}$，即 $x=\frac{1}{2}\lg\frac{y}{y-2}$，从而反函数为