奥林匹克数学教程

高中提高册

OLYMPIC MATHEMATICS TEACHING

中国数学会普及工作委员会编

裘宗沪 主编

开明出版社

奥林匹克数学教程

（高中提高册）

主编　裘宗沪
编著　夏兴国

开明出版社

(京)新登字 104 号

奥林匹克数学教程

(高中提高册)

裘宗沪　主编

*

开明出版社出版发行
(北京海淀区车道沟 8 号)
北京市昌平精工印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
开本 787×1092　1/32　印张 8.5　字数 150 千
1994 年 6 月北京第 1 版　1994 年12月北京第 3 次印刷
印数:20.001—30.000
ISBN7－80077－753－7/G·523　定价:5.50 元

内 容 提 要

本套教程是中国数学会普及工作委员会根据其制定的“高中数学竞赛大纲”，组织一批中国数学奥林匹克高级教练员编写的。

教材坚持在“普及的基础上提高的原则”，坚持不超纲，不超前，少而精，重在练习，重视课内课外的配合，注重思路方法技巧的分析。突出了奥林匹克数学的特点，反映了高中数学最新内容和题材。

本书是这套教程中的高中提高册。

前　言

早在五十年代，以华罗庚教授为代表的我国老一辈著名数学家就十分重视培养青少年优秀数学人才，倡导并组织了多次数学竞赛活动，吸引了大批数学爱好者，对我国数学人才的成长和数学研究的开展作出了卓越的贡献。

由于种种客观因素，我国数学竞赛活动几经波折，到1978年才又重新开展起来。现在数学竞赛活动已经发展成为规模最大、影响最广的全国中小学生学科竞赛。

近几年来，由于中国国家队在国际数学奥林匹克中取得了举世瞩目的成就，我国国内的数学竞赛热也跟着升温了。然而，我们应该清醒地看到，数学竞赛活动的最终目的绝不仅仅是夺几块金牌，拿几项冠军。

中国数学会普及工作委员会在多次重要会议上都强调指出，数学竞赛活动的目的有三个。一是提高学生学习数学的兴趣，二是促进中小学数学教学改革，三是及早地发现和培养人才。同时，也多次强调，数学竞赛活动必须坚持普及与提高相结合的方针，坚持在普及的基础上提高的原则。为此，中国数学会普及工作委员会根据当前中学数学教学的实际情况，及时制订了初中和高中数学竞赛大纲，有效地遏制了数学竞赛命题中知识范围不适当膨胀的趋势，引导学生重视课堂学习，以课堂学习为主，以课外活动为辅，引导学生在学有余力的情况下对课堂学过的内容适当地加深和补充，并特别注意学会对知识的灵活运用，培养自己的数学思维能力，养成勤思考肯

钻研的良好学风，为把自己锻炼成一个具有开拓探究精神的创造者打下坚实的基础。

《奥林匹克数学教程》是中国数学会普及工作委员会为小学、初中、高中的数学课外活动编写的一套教材。这套教材的高中部分分为高中基础册与高中提高册两本。这两本教材是根据“高中数学竞赛大纲”编写的，把培养学生学习数学的兴趣放在首要地位，重视课内课外的配合，注意思路方法与技巧的分析，坚持少而精，重在开拓探究性能力的培养。

《奥林匹克数学教程》高中部分，比课内使用的数学教材在深度和广度上都有所提高，其中高中基础册更注重教材的深度，目的是使学生能够更好地理解课内讲授的数学概念，掌握并灵活运用数学方法，打下坚实的数学基础。而提高册比较注重广度，目的是使学生能够适当地扩大知识面，开扩眼界，了解并掌握一些有用的数学思想和研究问题的方法，为进一步学习作好准备。两本书各有侧重，相辅相成。使用者可以根据自己的情况，选择阅读。

这套教程还有待充分完善。在试用一段时间后将进行修订，恳请各地富有教学经验的老师不吝赐教。

袁宗沪

1994.5.2

中国数学会普及工作委员会

简　　介

中国数学会是受中国科学技术协会领导的全国性学术团体，中国数学会普及工作委员会是其下属机构，成立于1980年，该委员会把开展群众性数学竞赛作为它的一项主要工作，目前由它主办的全国性中小学数学竞赛包括：

“全国小学数学奥林匹克”（创办于1991年），它是一个“普及型，大众化”的活动，分为初赛（每年3月）、决赛（每年4月）和总决赛（即夏令营、每年暑期）。

“全国初中数学联赛”（创办于1984年），采用“轮流做东”的形式由各省、市、自治区数学竞赛组织机构具体承办，每年4月举行，分为一试和二试。

“全国高中数学联赛”（创办于1981年），承办方式与初中联赛相同，每年10月举行，分为一试和二试，在这项竞赛中取得优异成绩的全国约90名学生有资格参加由中国数学会主办的“中国数学奥林匹克（CMO）即全国中学生数学冬令营”（每年元月）。

此外该委员会还配合中国数学奥林匹克委员会组织冬令营活动、选拔与培训国家集训队和代表队，为近年来我国在国际数学奥林匹克（IMO）中取得优异成绩作出了贡献。

为了使各种类型、各个层次的数学普及读物以及中小学

课内外教材的策划、编写形成规模与系列，中国数学会普及工作委员会与开明出版社共同创办了“数学编辑室”。

本书主编裘宗沪教授是中国数学会普及工作委员会主任、中国数学奥林匹克委员会副主席。1993年被国家数学竞赛世界联盟（WFNMC）授予“爱尔特希（Erdös）国家奖”，这是第一位获此殊荣的亚洲数学家。

目　　录

一　平面几何的几个重要定理

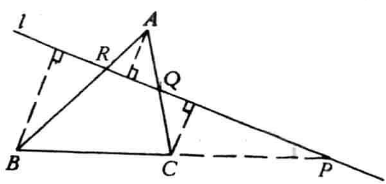
梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理和西姆松定理是平面几何中的四个重要定理，前两个定理主要解决三点共线和三线共点的问题，后两个定理主要解决四点共圆的问题.

在本讲中，我们将依次介绍这四个定理以及它们的应用. 下面先介绍梅涅劳斯定理，它包括定理 1 和定理 2 两部分，定理 2 是定理 1 的逆定理.

定理 1　若直线 l 不经过$\triangle ABC$ 的顶点，并且与$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或它们的延长线分别交于 P、Q、R，则

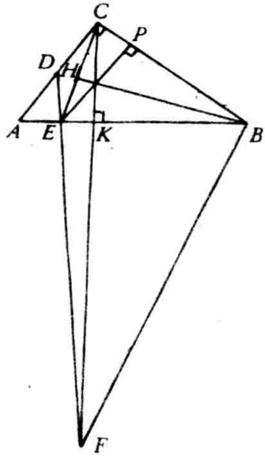
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$

证　设 h_A、h_B、h_C 分别是从 A,B,C 到直线 l 的垂线的长度. 于是



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{h_B}{h_C}\cdot\frac{h_C}{h_A}\cdot\frac{h_A}{h_B}=1.$$

例 1 若在直角$\triangle ABC$中，CK是斜边上的高，CE是$\angle ACK$的平分线，E点在AK上，D是AC的中点，F是DE与CK的交点，则BF $/\!/CE$.



证 在$\triangle EBC$中，作$\angle B$的平分线BH.

$\because \angle EBC=\angle ACK$,

$\therefore \angle HBC=\angle ACE$,

$\angle HBC+\angle HCB$

$=\angle ACE+\angle HCB$

$=90°$,

即 $BH\perp CE$.

从而可知$\triangle EBC$为等腰三角形.

作腰BC上的高EP，则

$$CK=EP.$$

把梅涅劳斯定理用于$\triangle ACK$和三点D、E、F，则得

$$\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AE}{EK}\cdot\frac{KF}{FC}=1.$$

于是

$$\frac{KF}{FC}=\frac{EK}{AE}=\frac{CK}{AC}=\frac{EP}{AC}=\frac{BP}{BC}=\frac{BK}{BE},$$

即 $$\frac{KF}{FC}=\frac{BK}{BE}.$$

利用分比定理得

$$\frac{KF}{KC}=\frac{BK}{KE},$$

即 $$\triangle FKB\backsim\triangle CKE.$$

故得 $$FB /\!/ CE.$$

定理 2 设 P、Q、R 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上或它们的延长线上的三点，并且 P、Q、R 三点中，位于$\triangle ABC$ 边上的点的个数为 0 或 2. 这时，若

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1,$$

则 P、Q、R 三点共线.

证 设直线 PQ 与直线 AB 交于 R'，于是由定理 1 得

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR'}{R'B}=1.$$

根据已知等式，易知

$$\frac{AR'}{R'B}=\frac{AR}{RB}.$$

由于在同一直线上的 P,Q,R' 三点中，位于$\triangle ABC$ 边上的点的个数也为 0 或 2，因此 R 与 R' 或者同在 AB 线段上，或者同在 AB 的延长线上.

若 R 与 R' 同在 AB 线段上，则 R 与 R' 必定重合，不然的话，不妨设 $AR>AR'$，这时 $AB-AR<AB-AR'$，即 $BR<BR'$，于是得

$$\frac{AR}{BR}>\frac{AR'}{BR'},$$

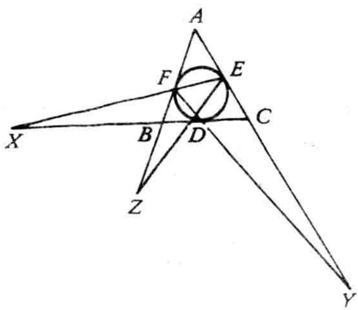
这与 $\dfrac{AR}{BR}=\dfrac{AR'}{BR'}$ 矛盾.

若 R 与 R' 同在 AB 的延长线上，也容易证得 R 与 R' 重合(证明过程留给读者自己去完成).

综上所述，P、Q、R 三点共线.

例 2 设$\triangle ABC$ 的内切圆在三边 BC、CA、AB 上的切点分别为 D、E、F，则 EF 与 BC、FD 与 CA、DE 与 AB 的交点 X、Y、Z 在一条直线上.

证 $\triangle ABC$ 被直线 XFE 所截，由定理 1 得



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$$

而 $AE=AF$，

代入上式，得

$$\frac{BX}{XC}=\frac{FB}{CE}. \tag{1}$$

同理可得

$$\frac{CY}{YA}=\frac{DC}{AF}, \tag{2}$$

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{EA}{BD}, \tag{3}$$

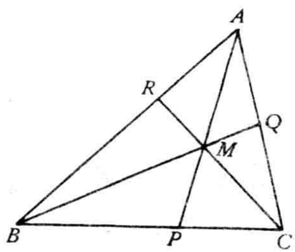
(1)×(2)×(3)得

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

又由于 X、Y、Z 都不在 $\triangle ABC$ 的边上，因此，由定理 2 得，X、Y、Z 三点共线.

定理 3 （塞瓦定理）若 P,Q,R 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 边上的点，则 AP、BQ、CR 三线共点的充分必要条件是 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$.

证 先证必要性.



设 AP、BQ、CR 相交于点 M，则

$$\frac{BP}{PC}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle CMP}}=\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}}.$$

同理

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle ABM}},$$

$$\frac{AR}{RB}=\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle BCM}}.$$

以上三式相乘，得

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$

再证充分性. 若$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$. 设 AP 与 BQ 相交于 M，且直线 CM 交 AB 于 R'，由定理的必要性可知

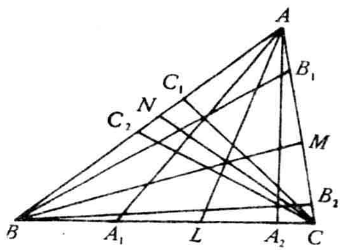
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR'}{R'B}=1.$$

于是得

$$\frac{AR'}{R'B}=\frac{AR}{RB}.$$

因为 R 和 R' 都在线段 AB 上，所以 R' 必与 R 重合. 故 AP，BQ，CR 三线相交于一点 M.

例 3 在$\triangle ABC$的边 BC，CA，AB 上分别取点 A_1，B_1，C_1，使 AA_1，BB_1，CC_1 相交于一点. 证明：AA_1，BB_1，CC_1 关于相应的角平分线对称的直线 AA_2，BB_2，CC_2 也相交于一点.



证 把正弦定理用于$\triangle ACC_1$得

$$\frac{AC_1}{C_1C}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle CAB};$$

用于$\triangle BCC_1$得

$$\frac{CC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle C_1CB}.$$

把两式相乘得 $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle CAB}$.

同理，$\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\dfrac{\sin\angle BCA}{\sin\angle ABC}$;

$\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}\cdot\dfrac{\sin\angle CAB}{\sin\angle BCA}$.

于是，把以上三式相乘得

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}$$
$$=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}.$$

类似地，可得

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}$$
$$=\frac{\sin\angle ACC_2}{\sin\angle C_2CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_2}{\sin\angle A_2AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_2}{\sin\angle B_2BA}.$$

由对称性知

$$\angle ACC_1=\angle BCC_2,\angle C_1CB=\angle ACC_2,$$
$$\angle BAA_1=\angle A_2AC,\angle A_1AC=\angle BAA_2,$$
$$\angle CBB_1=\angle B_2BA,\angle B_1BA=\angle CBB_2,$$

从而有$\left(\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}\right)\cdot\left(\dfrac{AC_2}{C_2B}\cdot\dfrac{BA_2}{A_2C}\cdot\dfrac{CB_2}{B_2A}\right)=1$.

又由 AA_1,BB_1,CC_1 三线共点和塞瓦定理得

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

所以有

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1.$$