

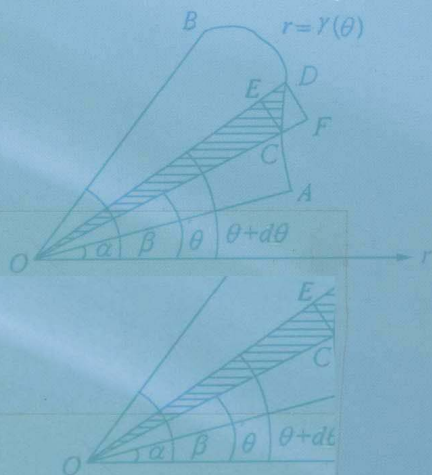
大学数学系列丛书

高等数学解题与分析

GAO DENG SHUXUE JIETI YU FENXI

主编 孙淑珍 潘志

副主编 严稳利 周继泉 魏军强



清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



北京交通大学出版社

<http://press.bjtu.edu.cn>

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

高等数学解题与分析

1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100 2101 2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200 2201 2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300 2301 2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348 2349 2350 2351 2352 2353 2354 2355 2356 2357 2358 2359 2360 2361 2362 2363 2364 2365 2366 2367 2368 2369 2370 2371 2372 2373 2374 2375 2376 2377 2378 2379 2380 2381 2382 2383 2384 2385 2386 2387 2388 2389 2390 2391 2392 2393 2394 2395 2396 2397 2398 2399 2400 2401 2402 2403 2404 2405 2406 2407 2408 2409 2410 2411 2412 2413 2414 2415 2416 2417 2418 2419 2420 2421 2422 2423 2424 2425 2426 2427 2428 2429 2430 2431 2432 2433 2434 2435 2436 2437 2438 2439 2440 2441 2442 2443 2444 2445 2446 2447 2448 2449 2450 2451 2452 2453 2454 2455 2456 2457 2458 2459 2460 2461 2462 2463 2464 2465 2466 2467 2468 2469 2470 2471 2472 2473 2474 2475 2476 2477 2478 2479 2480 2481 2482 2483 2484 2485 2486 2487 2488 2489 2490 2491 2492 2493 2494 2495 2496 2497 2498 2499 2500 2501 2502 2503 2504 2505 2506 2507 2508 2509 2510 2511 2512 2513 2514 2515 2516 2517 2518 2519 2520 2521 2522 2523 2524 2525 2526 2527 2528 2529 2530 2531 2532 2533 2534 2535 2536 2537 2538 2539 2540 2541 2542 2543 2544 2545 2546 2547 2548 2549 2550 2551 2552 2553 2554 2555 2556 2557 2558 2559 2560 2561 2562 2563 2564 2565 2566 2567 2568 2569 2570 2571 2572 2573 2574 2575 2576 2577 2578 2579 2580 2581 2582 2583 2584 2585 2586 2587 2588 2589 2590 2591 2592 2593 2594 2595 2596 2597 2598 2599 2600 2601 2602 2603 2604 2605 2606 2607 2608 2609 2610 2611 2612 2613 2614 2615 2616 2617 2618 2619 2620 2621 2622 2623 2624 2625 2626 2627 2628 2629 2630 2631 2632 2633 2634 2635 2636 2637 2638 2639 2640 2641 2642 2643 2644 2645 2646 2647 2648 2649 2650 2651 2652 2653 2654 2655 2656 2657 2658 2659 2660 2661 2662 2663 2664 2665 2666 2667 2668 2669 2670 2671 2672 2673 2674 2675 2676 2677 2678 2679 2680 2681 2682 2683 2684 2685 2686 2687 2688 2689 2690 2691 2692 2693 2694 2695 2696 2697 2698 2699 2700 2701 2702 2703 2704 2705 2706 2707 2708 2709 2710 2711 2712 2713 2714 2715 2716 2717 2718 2719 2720 2721 2722 2723 2724 2725 2726 2727 2728 2729 2730 2731 2732 2733 2734 2735 2736 2737 2738 2739 2740 2741 2742 2743 2744 2745 2746 2747 2748 2749 2750 2751 2752 2753 2754 2755 2756 2757 2758 2759 2760 2761 2762 2763 2764 2765 2766 2767 2768 2769 2770 2771 2772 2773 2774 2775 2776 2777 2778 2779 2780 2781 2782 2783 2784 2785 2786 2787 2788 2789 2790 2791 2792 2793 2794 2795 2796 2797 2798 2799 2800 2801 2802 2803 2804 2805 2806 2807 2808 2809 2810 2811 2812 2813 2814 2815 2816 2817

100

100



大学数学系列丛书

高等数学解题与分析

主 编 孙淑珍 潘 志
副主编 严稳利 周继泉 魏军强

清华大学出版社
北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书是根据高等数学教学大纲要求,编者总结多年一线授课经验编写而成的。书中通过对知识点的概括和习题的讲解与分析,帮助读者了解和掌握该课程的难点、要点,提高读者分析问题和解决问题的能力。

全书参照同济大学《高等数学》(第6版)的章节安排,对高等数学的内容和知识点进行有机的串联,形成知识网络。对典型问题进行分析讲解,给出了解题思路和解题步骤,明示了解题过程需要注意的问题。全书最后收录了2010年各层次的数学考研试题,供读者学习参考。

本书不但可作为本、专科学生学习高等数学课程的辅导教材,而且对准备考研的学生也是一本很好的复习参考资料。另外本书也为讲授高等数学课程的一线教师提供教学参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题与分析/孙淑珍主编. —北京:清华大学出版社;北京交通大学出版社, 2010.9

(大学数学系列丛书)

ISBN 978-7-5121-0363-4

I. ① 高… II. ① 孙… III. ① 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ① O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第178425号

责任编辑:黎 丹

出版者:清华大学出版社 邮编:100084 电话:010-62776969

北京交通大学出版社 邮编:100044 电话:010-51686414

印刷者:北京瑞达方舟印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印张:26.75 字数:668千字

版 次:2010年9月第1版 2010年9月第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-5121-0363-4/O·83

印 数:1~4 000册 定价:39.00元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043, 51686008; 传真:010-62225406; E-mail: press@bjtu.edu.cn.

前言

本书是大学理工类非数学专业高等数学课程的教学辅导书。编写本书的目的是指导大学一年级学生理解掌握高等数学原理，学会基本的解题方法，提高分析问题、解决问题的能力。本书参照了原国家教委审定的《高等数学课程教学基本要求》和教育部 2010 年《全国硕士生入学统一考试数学教学大纲》，对于高等数学这门理工科大学最重要的基础课程，既注重基础训练，又注意与硕士生入学统一考试的要求相衔接。因此，本书是一本融学习指导与考研辅导为一体的参考书。

为了适应更多的读者，作为教学同步辅导用书，本书的教学章节编排、内容深度和广度主要参考同济大学《高等数学》（第 6 版）。因此本书特别适合采用同济大学《高等数学》（第 6 版）为教材的学生作同步教学指导使用，也适合准备报考硕士研究生的读者系统复习高等数学，提高解题能力，进行应考准备。同时，对于讲授高等数学课程的教师，本书也是一本有用的参考书。

本书的内容包括各章节知识点的总结、学习指导、典型题讲解和自我检测题及答案等。此外，本书还尽量通过讲解解题思路分析，对重点和难点加入注释和点评，使读者能加深对基本概念和基本方法的理解，学会解题方法，并通过自我检测加以提高。附录中有 2010 年各层次非数学专业硕士研究生入学考试题，供不同专业的学生学习参考。

本书 1 章、第 7 章、第 8 章由孙淑珍编写，第 9 章、第 12 章由潘志编写，第 4 章、第 5 章、第 6 章由严稳利编写，第 2 章、第 3 章由周继泉编写，第 10 章、第 11 章由魏军强编写。

本书的编写得到了华北电力大学数理系领导的大力支持，在此表示诚挚的谢意。

尽管本书的编者想尽力编写一本有价值、有特色的辅导书，但由于编者水平有限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

2010 年 8 月

目 录

第 1 章 函数与极限	(1)
1.1 内容提要	(1)
1.2 知识网络	(1)
1.3 学习指导	(5)
1.4 解题与分析	(5)
1.5 自我检测题.....	(28)
第 2 章 导数与微分	(30)
2.1 内容提要.....	(30)
2.2 知识网络.....	(30)
2.3 学习指导.....	(32)
2.4 解题与分析.....	(32)
2.5 自我检测题.....	(46)
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	(49)
3.1 内容提要.....	(49)
3.2 知识网络.....	(49)
3.3 学习指导.....	(52)
3.4 解题与分析.....	(53)
3.5 自我检测题.....	(73)
第 4 章 不定积分	(76)
4.1 内容提要.....	(76)
4.2 知识网络.....	(76)
4.3 学习指导.....	(79)
4.4 解题与分析.....	(80)
4.5 自我检测题	(106)
第 5 章 定积分	(108)
5.1 内容提要	(108)

5.2	知识网络	(108)
5.3	学习指导	(110)
5.4	解题与分析	(111)
5.5	自我检测题	(144)
第 6 章	定积分的应用	(147)
6.1	内容提要	(147)
6.2	知识网络	(147)
6.3	学习指导	(150)
6.4	解题与分析	(150)
6.5	自我检测题	(180)
第 7 章	微分方程	(183)
7.1	内容提要	(183)
7.2	知识网络	(183)
7.3	学习指导	(186)
7.4	解题与分析	(186)
7.5	自我检测题	(199)
第 8 章	空间解析几何与向量代数	(202)
8.1	内容提要	(202)
8.2	知识网络	(202)
8.3	学习指导	(205)
8.4	解题与分析	(205)
8.5	自我检测题	(226)
第 9 章	多元函数微分法及其应用	(228)
9.1	内容提要	(228)
9.2	知识网络	(228)
9.3	学习指导	(233)
9.4	解题与分析	(235)
9.5	自我检测题	(268)
第 10 章	重积分	(271)
10.1	内容提要	(271)
10.2	知识网络	(271)
10.3	学习指导	(274)
10.4	解题分析	(275)
10.5	自我检测题	(320)

第 11 章 曲线积分与曲面积分	(323)
11.1 内容提要.....	(323)
11.2 知识网络.....	(323)
11.3 学习指导.....	(328)
11.4 解题与分析.....	(329)
11.5 自我检测题.....	(374)
第 12 章 无穷级数	(377)
12.1 内容提要.....	(377)
12.2 知识网络.....	(377)
12.3 学习指导.....	(382)
12.4 解题与分析.....	(383)
12.5 自我检测题.....	(399)
附录 A 2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(402)
自我检测题答案与提示.....	(411)

第 1 章

函数与极限

1.1 内 容 提 要

本章的内容是关于函数与极限的概念及和函数与极限概念有关的一些基本知识，它们都是今后学习的基础。

1. 给出了函数的概念、反函数和复合函数的概念。
2. 介绍了函数的简单性态。
3. 给出了数列极限的 $\epsilon-N$ 定义；数列极限的一条存在准则——单调有界准则；数列极限的四则运算法则。
4. 给出了函数极限的 $\epsilon-\delta$ 定义，函数极限的一条存在准则——夹逼准则；函数极限的四则运算法则。
5. 介绍了无穷小与无穷大的概念；给出了无穷小与函数极限之间的关系和无穷小与无穷大的关系。
6. 阐述了连续函数的性质和闭区间上连续函数的性质。

1.2 知 识 网 络

函数概念	
对每一个 $x \in D$ (定义域), 按对应法则 $y=f(x)$ 有唯一的 $y \in W$ (值域) 与之对应, 称 y 是 x 的函数, 记为 $y=f(x)$	
函数的单值性: 对每一个 $x \in D$, 仅有唯一值 $y=f(x)$ 与之对应, 则称 $y=f(x)$ 为单值函数, 否则为多值函数	
反函数 由 $y=f(x)$ 确定的 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$, 如 $y=a^x$ 则 $y=f^{-1}(x)=\log_a x$	随函数 由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$, 如由 $e^{x+y}-e=0$ 确定的 $y=f(x)$
反函数与直接函数的关系	
① 设 f 是一一对应函数, 则 $f[f^{-1}(x)]=f^{-1}[f(x)]=x, x \in D_f$ ② $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像对称于直线 $y=x$	
基本初等函数	复合函数
幂函数 $y=x^a$ 指数函数 $y=a^x$ 对数函数 $y=\log_a x$ 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, \dots$ 反三角函数 $y=\arcsin x, \dots$	$y=f(u), u \in D_f$ $u=\varphi(x), x \in D_f$ 当值域 $W_u \subset D_f$ 时, 有 $y=f[\varphi(x)]$

函数特性	定义	举例
有界性	若存在一个正数 M , 对于任 $x \in X \subset D$, 都有 $ f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 X 内为有界函数, 若这样的 M 不存在, 就称 $f(x)$ 在 X 内无界	 $g = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 上无界, 而在 $[1, +\infty)$ 上有界
单调性	若对任意的 $x_1, x_2 \in I$ (区间) $C D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的; 若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的	 $y=x^2$ 当 $x \leq 0$ 时为单调减少, $x \geq 0$ 时为单调增加
奇偶性	若对任意的 $x \in D$ ($-x \in D$), 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数, 其图像对称于 y 轴; 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数, 图像对称于原点	偶函数 $y= x$ 奇函数 $y=\sin x$
周期性	若存在常数 $T \neq 0$, 对于任 $x \in D$ ($x+T \in D$) 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 最小的 T 称为函数的周期	
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个分析式表示的函数称为初等函数, 复如	$y = \ln(x^2 + \sqrt{1+e^x})$ $y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x \geq 0$ 和 $x < 0$ 各段上是初等函数, 但就整体来看, y 为非初等函数

定 义	剖 析	几何解释
数列极限 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ (正整数), 使得对于 $n > N$ 的一切 x_n, 不等式 $x_n - a < \varepsilon$ 都成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或说 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$	ε 是任意给定的, N 是要找出的, 它由 ε 的大小来决定, 两个不等式的关系是 $x_n - a < \varepsilon$ 是上式成立的条件的根据 $n > N$	$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}$ 后面的所有点 $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}$, 都落在以 a 为中心, 以 ε 为半径的开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之内, 而不管 x_n 前面的点的位置怎样
函数极限 $x \rightarrow x_0$ 时, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得对于适合 $0 < x - x_0 < \delta$ 的一切 x 都满足不等式 $f(x) - A < \varepsilon$ 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A \ (x \rightarrow x_0)$	ε 是任意给定的, δ 是要找出的, 它由 ε 的大小来决定, 两个不等式的关系是 $f(x) - A < \varepsilon$ 是上式成立的条件的根据 $0 < x - x_0 < \delta$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在与 $f(x)$ 在 x_0 点的情况无关	当 $x (\neq x_0)$ 落在 x_0 的 δ 邻域时, 曲线 $y = f(x)$ 被夹在两直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间, 而在该邻域之外, 不管曲线 $f(x)$ 的位置怎样
若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ 使得对于适合 $x > X$ 的一切 x, 都满足不等式 $f(x) - A < \varepsilon$ 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A \ (x \rightarrow \infty)$	ε 是任意给定的, X 是要找出的, 它由 ε 的大小来决定, 两个不等式的关系是 $f(x) - A < \varepsilon$ 是上式成立的条件的根据 $x > X$ $x < -X, x > X$	当 $x > X$ 时, 曲线 $f(x)$ 夹在两直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间, 而不管 $x \in [-X, X]$ 时曲线 $f(x)$ 的位置怎样

左右极限	无穷大	无穷小	无穷小的性质 (自变量变化的过程相同)	简例
若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ (或 $x_0 < x < x_0 + \delta$) 时总有 $f(x) - A < \varepsilon$ 成立, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x_0 \rightarrow x$) 时的左 (右) 极限, 记为 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$	若对 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ (或 $X > 0$), 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ (或 $x > X$) 时, 总有 $f(x) > M$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大, 也就是说, 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x)$ 是无限增大的量	若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (或 $X > 0$), 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ (或 $x > X$) 时, 总有 $f(x) < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小, 也就是说, 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x)$ 是趋近于 0 的量	① 若 $f(x) \neq 0$ 为无穷小 (大), 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大 (小) ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ (α 为无穷小) ③ 有限个无穷小的和仍是无穷小 ④ 有界函数与无穷小的积是无穷小 推论: 常数与无穷小的积是无穷小, 有限个无穷小的和是无穷小 ⑤ 以极限不为零的函数除无穷小得的商仍是无穷小	$x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \rightarrow \infty$, 而 $\cot x \rightarrow 0$; $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2 + \alpha$ (α 为无穷小量); 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $x + \sin x \rightarrow 0$; $x \sin x \rightarrow 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

连续定义	几何解释
$f(x)$ 在点 x_0 连续有下列三个等价定义 ① $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ③ 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $ x - x_0 < \delta$ 时, 总有 $ f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ 成立	

左右连续	连续的充要条件
左连续 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = f(x_0^-)$ 右连续 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) = f(x_0^+)$	$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处左右都连续

在区间 $[a, b]$ 上连续	连续函数的运算性质
$f(x)$ 在 (a, b) 内各点都连续, 且在左端点 a 右连续, 在右端点 b 左连续, $[a, b]$ 称为连续区间	① 连续函数的和差积商 (分母不为零) 是连续的 ② 连续函数的复合函数是连续的 ③ 单值单调的连续函数, 其反函数也是单值单调连续的

初等函数的连续性	非初等函数的连续性
① 基本初等函数在定义域内连续 ② 一切初等函数在定义区间内都是连续的	在每一段上按初等函数考察, 在各段连接点考虑其左右连续性, 再得出整个函数连续性

闭区间上连续函数的性质	设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值与最小值 (推论: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界) ② 对于 $f(a) = A, f(b) = B$ 之间的任意数 C 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = C$ 推论: 当 $f(a) \neq f(b)$ 时, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根 ③ $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续
-------------	--

间断点定义
有下列三种情况之一, 称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续 (间断) ① $f(x)$ 在点 x_0 处无定义; ② 在点 x_0 处虽有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在 ③ 在点 x_0 处虽有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

间断点分类	第一类间断点		第二类间断点	
	可去间断点	跳跃间断点	无穷型	振荡型
细 分	① $f(x_0+0) = f(x_0-0) = A \neq f(x_0)$ ② $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, 但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义	$f(x_0+0), f(x_0-0)$ 都存在, 但不相等	左、右极限中至少有一个为 ∞	在 x_0 处极限不存在, 永远振荡
概 括	左右极限都存在的间断点		非第一类间断点	
举 例	(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ $x=0$ 是可去间断点 (2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $x=1$ 是可去间断点	$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ $x=0$ 是不可去间断点 (跳跃间断点)	$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0^+$ 时 $f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0^-$ 时 $x=0$ 是无穷间断点	$y = \sin \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} y$ 不存在, 在 ± 1 之间无限振荡 $x=0$ 是振荡间断点

1.3 学习指导

本章的中心内容是函数、极限与函数的连续性. 函数关系是变量与变量之间的依赖关系, 是高等数学研究的主要对象. 极限方法是研究高等数学的一种基本方法, 一些重要概念如导数、定积分、重积分等都是建立在极限概念的基础之上的. 连续是函数的一个重要性质, 连续函数是最基本的一类函数, 正确理解函数的概念、极限的概念与函数连续性的概念对于学好高等数学是十分必要的.

函数是学习高等数学的基础知识, 要求大家深刻理解函数的概念与函数符号, 熟练地求出所给函数的定义域, 能利用函数的基本特性, 如单调性、奇偶性、周期性等解决一些具体问题.

极限概念的理论性强, 也比较抽象, 不仅要计算熟练, 还要正确理解、掌握极限的概念、相关定理及其应用, 要对极限定义有具体的认识与深刻的理解. 此外, 正确理解极限定义中每个数学符号、数学字母的含义.

极限运算要求熟练地运用四则运算法则, 掌握四个关系: 有极限与有界、有极限与无穷小量、无穷小量与无界、无界与无穷大量. 同时, 还要求会用两个重要极限求某些未定式的极限, 在极限运算中要注意等价无穷小代换的应用; 要深刻理解函数连续的定义及间断点的类型. 对于具体给定的函数能找到它的连续区间及间断点, 并能判断间断点的类型, 掌握函数在某点连续的充要条件; 能利用函数的连续性求函数的极限, 掌握闭区间连续函数的性质, 如最大最小值定理、介值定理、零点定理等.

1.4 解题与分析

【例 1-1】设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则函数 $f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域是 ().

- A. $[0, 1]$ B. $[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$ C. $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ D. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

答案: D.

分析: 分别考察 $f(x + \frac{1}{4})$ 和 $f(x - \frac{1}{4})$, 求两个函数的定义域的交集.

【例 1-2】 $y = \pi + \arctan \frac{x}{2}$ 的反函数是 ().

- A. $y = 2\tan(x - \pi) \quad (x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi))$ B. $y = \tan \frac{x}{2} \quad (x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$
 C. $y = 2\tan \frac{x}{2} \quad (x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi))$ D. $y = \frac{1}{2}\tan x \quad (x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$

答案: A.

解 由 $y = \pi + \arctan \frac{x}{2}$ 解出 $x = 2\tan(y - \pi)$, 调换 x 和 y 的位置, 变成 $y =$

$2\tan(x-\pi)$. 这就是反函数的表达式. 另外, 反函数的定义域是原函数的值域 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$, 所以反函数为 A.

注释: 若将答案写成 $x = 2\tan(y-\pi) (y \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi))$ 也是正确的. 在初等数学中, 习惯于用 x 表示自变量, y 表示函数, 所以常常要求写成前者; 但是在高等数学中, 写成后者更为妥当.

【例 1-3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加, 则下列函数中必定单调增加的是 ().

- A. $f(x^2)$ B. $f^2(x)$ C. $\tan f(x)$ D. $\arctan f(x)$

答案: D.

【例 1-4】 设 $f(x) = \ln(x+1)$, 则函数 $f(f(x))$ 的定义域是 ().

- A. $(0, +\infty)$ B. $(\frac{1}{e}-1, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, e)$

答案: B.

分析: 比较简单的方法是求出复合函数的表达式 $f(f(x)) = \ln[\ln(x+1)+1]$.

【例 1-5】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2+x, & x > 0 \end{cases}$, 则 ().

A. $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -(x^2+x), & x > 0 \end{cases}$

B. $f(-x) = \begin{cases} -(x^2+x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

C. $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2-x, & x > 0 \end{cases}$

D. $f(-x) = \begin{cases} x^2-x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

答案: D.

分析: 这是一个求复合函数的问题, 分段初等函数求复合函数的问题要细心. 令 $u = -x$, 当 $x < 0$ 时, 由于 $u > 0$, 所以

$$f(-x) = f(u) = u^2 + u = x^2 - x$$

当 $x \geq 0$ 时, 由于 $u \leq 0$, 所以

$$f(-x) = f(u) = u^2 = x^2$$

因此答案为 D.

【例 1-6】 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 下列哪一个条件能推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在 ().

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$ 存在

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 存在

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n + b_n|$ 存在

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n - 7b_n)$ 存在

答案: D.

【例 1-7】 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时 ().

A. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

C. $f(x) \rightarrow \infty$

D. $f(x)$ 不存在极限也不趋向于 ∞

答案: D.

解 约去非零因子 $x-1$, 则 $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$. 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, 当 $x \rightarrow 1^+$ 时 $f(x) \rightarrow \infty$, 所以 D 正确.

【例 1-8】若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 则 ().

A. $a = 1, b = 1$

B. $a = -1, b = 1$

C. $a = 1, b = -1$

D. $a = -1, b = -1$

答案: C.

解 通分

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+1} - ax - b &= \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x - b}{x+1} \\ &= (1-a) \frac{x^2}{x+1} - (a+b) \frac{x}{x+1} - \frac{b}{x+1} \end{aligned}$$

欲使此式在 $x \rightarrow \infty$ 时趋向于零, 必须且只须 $a = 1, b = -1$, 因此答案为 C.

【例 1-9】当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 ().

A. 无穷小量

B. 无穷大量

C. 有界量非无穷小量

D. 无界但非无穷大量

答案: D.

分析: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 显然 $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$, 但是 $\sin \frac{1}{x}$ 在 -1 和 1 之间不断地摆动, 并且不断地重复函数值零, 因此不难排除 A、B、C 三个选项.

解 令 $x_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则

$$x_n \rightarrow 0, f(x_n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \rightarrow \infty$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 不是无穷小, 也不是有界量.

又令 $z_n = \frac{1}{n\pi}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $z_n \rightarrow 0, f(z_n) = 0$, 因此当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 不是无穷大.

于是当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 无界但非无穷大量.

【例 1-10】设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_2(x) = f(f(x)), \dots, f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, 求证:

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

分析: $f_n(x)$ 是归纳定义的, 因此可以用归纳法尝试证明结论.

解 用归纳法. 设 $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f(f_k(x)) = \frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k(x)^2}} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}} \end{aligned}$$

【例 1-11】设 $f(x) = e^{x^2}$, $f(\varphi(x)) = 1-x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

分析: 这是一个复合函数问题, 可以设 $u = \varphi(x)$, 从题目条件分析 u 和 x 的关系, 找出答案.

解 令 $u = \varphi(x)$, 则 $f(\varphi(x)) = f(u) = e^{u^2}$, 于是由题设得到 $e^{u^2} = 1-x$. 解这个方程得到 $u = \pm \sqrt{\ln(1-x)}$. 又因 $u = \varphi(x) \geq 0$, 所以舍去负号, 得到 $u = \sqrt{\ln(1-x)}$. 为了使得开方运算有意义, 必须且只须使 $x \leq 0$. 于是 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)} (x \leq 0)$.

【例 1-12】已知 $2f(x) + f(1-x) = x^2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

分析: 题目所给条件是关于 $f(x)$ 和 $f(1-x)$ 的一个线性组合等式, 若令 $u = 1-x$; 则得到关于 $f(x)$ 和 $f(1-x)$ 的另一个线性组合等式, 由两个等式就可以求出 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $u = 1-x$, 得到

$$2f(1-u) + f(u) = (1-u)^2$$

即

$$2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$$

此式与题目所给条件联立, 解出

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

【例 1-13】(1) 设 $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a$ 对称, 求证 $f(2a-x) = f(x)$.

(2) 如果 $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a$ 和 $x = b (a < b)$ 都对称, 求证 $f(x)$ 是周期等于 $2(b-a)$ 的周期函数.

证 (1) 如果 $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a$ 对称, 则对于任意实数 x 有

$$f(a-x) = f(a+x)$$

于是

$$f(x) = f[a - (a-x)] = f[a + (a-x)] = f(2a-x)$$

(2) 因为 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形关于直线 $x = b$ 对称, 所以又有

$$f(2a-x) = f[b - (b+x-2a)] = f[b + (b+x-2a)] = f[x + 2(b-a)]$$

由于上面已经得到 $f(x) = f(2a-x)$, 所以有

$$f(x) = f[x + 2(b-a)]$$

因此 $f(x)$ 是周期等于 $2(b-a)$ 的周期函数.

【例 1-14】 设 $a > 1$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

证 在初等数学中曾经学习过公式

$$(b^n - 1) = (b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + 1)$$

令 $b = \sqrt[n]{a}$, 得到

$$(\sqrt[n]{a} - 1) = \frac{a-1}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + 1} < \frac{a-1}{n}$$

任意给定正数 ε , 取自然数 N , 使其满足不等式 $N > \frac{a-1}{\varepsilon}$, 只要 $n > N$, 就有

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \frac{a-1}{n} < \frac{a-1}{N} < \varepsilon$$

于是根据极限定义知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 证毕.

【例 1-15】 讨论下列极限是否存在.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}}$$

解 (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$.

(2) 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $\frac{1}{1-x} \rightarrow +\infty$, $2^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow +\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}} = 0$;

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $\frac{1}{1-x} \rightarrow -\infty$, $2^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}} = 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{1-x}}}$ 不存在.

【例 1-16】 说明下列极限不存在.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^x$$