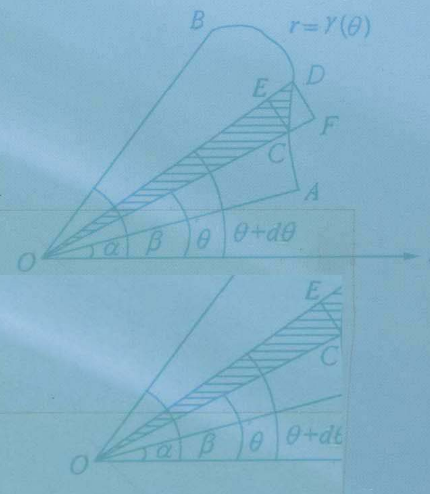
大学数学系列丛书

# 高等数学解题与分析

GAODENG SHUXUE JIETI YU FENXI

主编　孙淑珍　潘志

副主编　严稳利　周继泉　魏军强




清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

# 高等数学解题与分析

大学数学系列丛书

# 高等数学解题与分析


主　编　　孙淑珍　潘　志

副主编　　严稳利　周继泉　魏军强



清华大学出版社

北京交通大学出版社

·北京·

## 内容简介

本书是根据高等数学教学大纲要求，编者总结多年一线授课经验编写而成的。书中通过对知识点的概括和习题的讲解与分析，帮助读者了解和掌握该课程的难点、要点，提高读者分析问题和解决问题的能力。

全书参照同济大学《高等数学》（第6版）的章节安排，对高等数学的内容和知识点进行有机的串联，形成知识网络。对典型问题进行分析讲解，给出了解题思路和解题步骤，明示了解题过程需要注意的问题。全书最后收录了2010年各层次的数学考研试题，供读者学习参考。

本书不但可作为本、专科学生学习高等数学课程的辅导教材，而且对准备考研的学生也是一本很好的复习参考资料。另外本书也为讲授高等数学课程的一线教师提供教学参考。



**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学解题与分析/孙淑珍主编．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2010.9

（大学数学系列丛书）

ISBN 978－7－5121－0363－4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①孙…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第178425号

责任编辑：黎　丹
出 版 者：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010—62776969
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010—51686414
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　印张：26.75　字数：668千字
版　　次：2010年9月第1版　2010年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 978－7－5121－0363－4/O・83
印　　数：1～4 000册　定价：39.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

# 前言

本书是大学理工类非数学专业高等数学课程的教学辅导书。编写本书的目的是指导大学一年级学生理解掌握高等数学原理，学会基本的解题方法，提高分析问题、解决问题的能力。本书参照了原国家教委审定的《高等数学课程教学基本要求》和教育部2010年《全国硕士生入学统一考试数学教学大纲》，对于高等数学这门理工科大学最重要的基础课程，既注重基础训练，又注意与硕士生入学统一考试的要求相衔接。因此，本书是一本融学习指导与考研辅导为一体的参考书。

为了适应更多的读者，作为教学同步辅导用书，本书的教学章节编排、内容深度和广度主要参考同济大学《高等数学》（第6版）。因此本书特别适合采用同济大学《高等数学》（第6版）为教材的学生作同步教学指导使用，也适合准备报考硕士研究生的读者系统复习高等数学，提高解题能力，进行应考准备。同时，对于讲授高等数学课程的教师，本书也是一本有用的参考书。

本书的内容包括各章节知识点的总结、学习指导、典型题讲解和自我检测题及答案等。此外，本书还尽量通过讲解解题思路分析，对重点和难点加入注释和点评，使读者能加深对基本概念和基本方法的理解，学会解题方法，并通过自我检测加以提高。附录中有2010年各层次非数学专业硕士研究生入学考试题，供不同专业的学生学习参考。

本书1章、第7章、第8章由孙淑珍编写，第9章、第12章由潘志编写，第4章、第5章、第6章由严稳利编写，第2章、第3章由周继泉编写，第10章、第11章由魏军强编写。

本书的编写得到了华北电力大学数理系领导的大力支持，在此表示诚挚的谢意。

尽管本书的编者想尽力编写一本有价值、有特色的辅导书，但由于编者水平有限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2010年8月

# 目录

第 1 章　函数与极限 …… (1)
1.1　内容提要 …… (1)
1.2　知识网络 …… (1)
1.3　学习指导 …… (5)
1.4　解题与分析 …… (5)
1.5　自我检测题 …… (28)

第 2 章　导数与微分 …… (30)
2.1　内容提要 …… (30)
2.2　知识网络 …… (30)
2.3　学习指导 …… (32)
2.4　解题与分析 …… (32)
2.5　自我检测题 …… (46)

第 3 章　微分中值定理与导数的应用 …… (49)
3.1　内容提要 …… (49)
3.2　知识网络 …… (49)
3.3　学习指导 …… (52)
3.4　解题与分析 …… (53)
3.5　自我检测题 …… (73)

第 4 章　不定积分 …… (76)
4.1　内容提要 …… (76)
4.2　知识网络 …… (76)
4.3　学习指导 …… (79)
4.4　解题与分析 …… (80)
4.5　自我检测题 …… (106)

第 5 章　定积分 …… (108)
5.1　内容提要 …… (108)

5.2 知识网络 …………………………………………………………………… (108)
5.3 学习指导 …………………………………………………………………… (110)
5.4 解题与分析 ………………………………………………………………… (111)
5.5 自我检测题 ………………………………………………………………… (144)

**第6章 定积分的应用**………………………………………………………… (147)
6.1 内容提要 …………………………………………………………………… (147)
6.2 知识网络 …………………………………………………………………… (147)
6.3 学习指导 …………………………………………………………………… (150)
6.4 解题与分析 ………………………………………………………………… (150)
6.5 自我检测题 ………………………………………………………………… (180)

**第7章 微分方程**……………………………………………………………… (183)
7.1 内容提要 …………………………………………………………………… (183)
7.2 知识网络 …………………………………………………………………… (183)
7.3 学习指导 …………………………………………………………………… (186)
7.4 解题与分析 ………………………………………………………………… (186)
7.5 自我检测题 ………………………………………………………………… (199)

**第8章 空间解析几何与向量代数**…………………………………………… (202)
8.1 内容提要 …………………………………………………………………… (202)
8.2 知识网络 …………………………………………………………………… (202)
8.3 学习指导 …………………………………………………………………… (205)
8.4 解题与分析 ………………………………………………………………… (205)
8.5 自我检测题 ………………………………………………………………… (226)

**第9章 多元函数微分法及其应用**…………………………………………… (228)
9.1 内容提要 …………………………………………………………………… (228)
9.2 知识网络 …………………………………………………………………… (228)
9.3 学习指导 …………………………………………………………………… (233)
9.4 解题与分析 ………………………………………………………………… (235)
9.5 自我检测题 ………………………………………………………………… (268)

**第10章 重积分** ……………………………………………………………… (271)
10.1 内容提要…………………………………………………………………… (271)
10.2 知识网络…………………………………………………………………… (271)
10.3 学习指导…………………………………………………………………… (274)
10.4 解题分析…………………………………………………………………… (275)
10.5 自我检测题………………………………………………………………… (320)

**第 11 章　曲线积分与曲面积分** …………………………………………………… (323)
11.1　内容提要……………………………………………………………………… (323)
11.2　知识网络……………………………………………………………………… (323)
11.3　学习指导……………………………………………………………………… (328)
11.4　解题与分析…………………………………………………………………… (329)
11.5　自我检测题…………………………………………………………………… (374)

**第 12 章　无穷级数** ……………………………………………………………… (377)
12.1　内容提要……………………………………………………………………… (377)
12.2　知识网络……………………………………………………………………… (377)
12.3　学习指导……………………………………………………………………… (382)
12.4　解题与分析…………………………………………………………………… (383)
12.5　自我检测题…………………………………………………………………… (399)

**附录 A　2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题** ……………………………… (402)

**自我检测题答案与提示**……………………………………………………………… (411)

# 第 1 章

# 函数与极限

## 1.1 内容提要

本章的内容是关于函数与极限的概念及和函数与极限概念有关的一些基本知识，它们都是今后学习的基础．

1. 给出了函数的概念、反函数和复合函数的概念．

2. 介绍了函数的简单性态．

3. 给出了数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义；数列极限的一条存在准则——单调有界准则；数列极限的四则运算法则．

4. 给出了函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，函数极限的一条存在准则——夹逼准则；函数极限的四则运算法则．

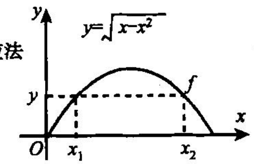
5. 介绍了无穷小与无穷大的概念；给出了无穷小与函数极限之间的关系和无穷小与无穷大的关系．

6. 阐述了连续函数的性质和闭区间上连续函数的性质．

## 1.2 知识网络

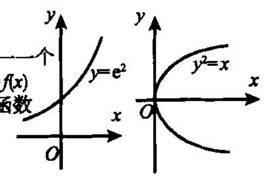
## 函数概念

对每一个$x\in D$（定义域），按对应法则有确定的$y\in W$（值域）与其对应，称$y$是$x$的函数，记为$y=f(x)$




**函数的单值性与多值性**

对每一个$x\in D$，仅有唯一一个值$y=f(x)$与之对应，则称$y=f(x)$为单值函数，否则为多值函数




### 反函数

由$y=f(x)$确定的$y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$，

如$y=a^x\to y=f^{-1}(x)=\log_a x$

### 隐函数

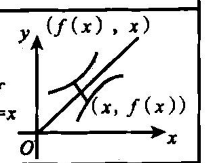
由方程$F(x,y)=0$所确定的函数$y=f(x)$，如由$e^y+xy-e=0$，确定的$y=f(x)$

### 反函数与直接函数的关系

① 设$f$是一一对应函数，则

$f[f^{-1}(x)]=f^{-1}[f(x)]=x$，$x\in D_f$

② $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图像对称于直线$y=x$




### 基本初等函数

幂函数$y=x^\mu$

指数函数$y=a^x$

对数函数$y=\log_a x$

三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，…

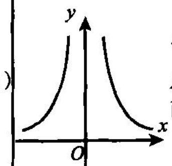
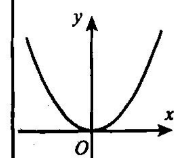
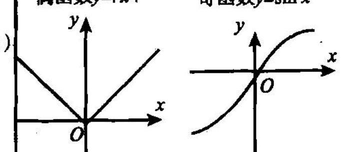
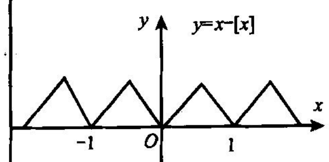
反三角函数 $y=\arcsin x$，…

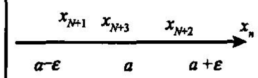
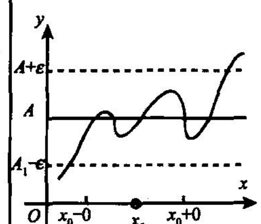
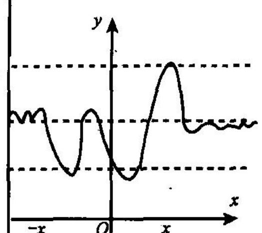
### 复合函数

$y=f(u)$，$u\in D_f$；

$u=\varphi(x)$，$x\in D_f$；

当值域$W_u\in D_f$时，有$y=f[\varphi(x)]$

| 函数特性 | 定　义 | 举　例 |
|---|---|---|
| 有界性 | 若存在一个正数$M$,对于任一$x\in X\subseteq D$,都有$\vert f(x)\vert\leq M$,则称$f(x)$在$X$内为有界函数，若这样的$M$不存在，就称$f(x)$在$X$内无界 |  $g=\frac{1}{\vert x\vert}$在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$上无界，而在$[1,+\infty)$，$(-\infty,-1]$上有界 |
| 单调性 | 若对任意的$x_1$，$x_2\in I$（区间）$\subset D$,当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$则称$f(x)$在$L$上是单调增加的；若恒有$f(x_1)>f(x_2)$，称$f(x)$在$L$上是单调减少的 |  $y=x^2$,当$x\leq 0$时为单调减少，$x\geq 0$时为单调增加 |
| 奇偶性 | 若对任意的$x\in D$（$-x\in D$）,恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数，其图像对称$y$轴；若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数，图像对称于原点 | 偶函数$y=\vert x\vert$　奇函数$y=\sin x$  |
| 周期性 | 若存在常数$l\neq 0$，对于任一$x\in D$（$x+l\in D$）恒有$f(x+l)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，最小的$l$（$>0$）称为函数的周期 | $y=x-[x]$  |
| 初等函数的构成 | 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个分析式子表示的函数称为初等函数，如 $y=\ln(x^2+\sqrt{1+e^x})$ | 分段函数$y=\begin{cases}x+1, & x\geq 0\\ e^{k}x, & x<0\end{cases}$，在$x\geq 0$和$x<0$各段上是初等函数，但就整体来看，$y$为非初等函数 |

| | 定义 | 剖析 | 几何解释 |
|---|---|---|---|
| 数列极限 | 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$（正整数），使得对于 $n>N$ 的一切 $x_n$，不等式 $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$ 都成立，则称常数 $a$ 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或说 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或<br>$x_n\to a\ (n\to\infty)$ | $\varepsilon$ 是任意给定的，$N$ 是要找出的，它由 $\varepsilon$ 的大小来决定，两个不等式的关系是<br>$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$<br>是上式成立的条件　是指 $N$ 的根据<br>$n>N$ | <br><br>$x_N$ 后面的所有点 $x_{N+1}$，$x_{N+2}$，$x_{N+3}$，…，都落在以 $a$ 为中心、以 $\varepsilon$ 为半径的开区间（$a-\varepsilon,a+\varepsilon$）之内，而不管 $x_n$ 前面的点的位置怎样 |
| 函数极限 | $x\to x_0$ 时，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得对于适合 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 的一切 $x$ 都满足不等式<br>$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$<br>则称常数 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为<br>$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或<br>$f(x)\to A$（当 $x\to x_0$） | $\varepsilon$ 是任意给定的，$\delta$ 是要找出的，它由 $\varepsilon$ 的大小来决定，两个不等式的关系是<br>$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$<br>是上式成立的条件　是指 $\delta$ 的根据<br>$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$<br>$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在与 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的情况无关 | <br><br>当 $x\ (\neq x_0)$ 落在 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域时，曲线 $f(x)$ 被夹在两直线 $y=A\pm\varepsilon$ 之间，而在该邻域之外，不管曲线 $f(x)$ 的位置怎样 |
| | $x\to\infty$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$ 使得对于适合 $\lvert x\rvert>X$ 时的一切 $x$，都满足不等式<br>$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$<br>则称常数 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为<br>$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或<br>$f(x)\to A$（当 $x\to\infty$） | $\varepsilon$ 是任意给定的，$X$ 是要找出的，它由 $\varepsilon$ 的大小来决定，两个不等式的关系是<br>$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$<br>是上式成立的条件　是找 $X$ 的根据<br>$\lvert x\rvert>X$<br>$x<-X$，$x>X$ | <br><br>当 $\lvert x\rvert>X$ 时，曲线 $f(x)$ 夹在两直线 $y=A\pm\varepsilon$ 之间，而不管 $x\in[-X,X]$ 时曲线 $f(x)$ 的位置怎样 |

| | |
|---|---|
| 左右极限 | 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$（或 $x_0<x<x_0+\delta$）时总有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 成立，则称 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0-0$（或 $x_0\to x_0+0$）时的左（右）极限，记为<br>$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$ |
| 极限存在的充要条件 | $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$ |
| 无穷大 | 若对 $\forall M>0$，$\exists\delta$（或 $X$）$>0$，使得当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$（或 $\lvert x\rvert>X$）时，总有 $\lvert f(x)\rvert>M$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大.也就是说，当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时，$\lvert f(x)\rvert$ 是无限增大的量 |
| 无穷小 | 若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$（或 $X$）$>0$，使得当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$（或 $\lvert x\rvert>X$）时，总有 $\lvert f(x)\rvert<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小，也就是说，当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 是趋近于0的量 |

| 无穷小的性质（自变量 $x$ 的变化过程相同） | 简例 |
|---|---|
| ①若 $f(x)\neq0$ 为无穷小（大），则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大（小）<br>② $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$（$\alpha$ 为无穷小）<br>③有限个无穷小的和仍是无穷小<br>④有界函数与无穷小的积是无穷小<br>推论：常数与无穷小的积是无穷小，有限个无穷小的积是无穷小<br>⑤以极限不为零的函数除无穷小得的商仍是无穷小 | $x\to0$ 时，$\tan x\to0$，而 $\cot x\to\infty$；<br>$\lim\limits_{x\to1}(3x-1)=2\Leftrightarrow3x-1=2+\alpha$（$\alpha$ 为无穷小量）；<br>当 $x\to0$ 时,有 $x+\sin x\to0$;$x\sin x\to0$;$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x}=0$ |

**连续定义**

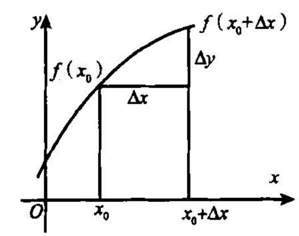
$f(x)$ 在点$x_0$连续有下列三个等价定义

①$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

③若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得当$|x-x_0|<\delta$时，总有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立

**几何解释**




**左右连续**

左连续 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$

右连续 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$

**连续的充要条件**

$f(x)$ 在$x_0$处连续$\Leftrightarrow f(x)$在$x_0$处左右都连续

**在区间$[a,b]$上连续**

$f(x)$ 在 $(a,b)$ 内各点都连续，且在左端点$a$右连续，在右端点$b$左连续，$[a,b]$称为连续区间

**连续函数的运算性质**

①连续函数的和差积商（分母不为零）是连续的

②连续函数的复合函数是连续的

③单值单调的连续函数，其反函数也是单值单调连续的

**初等函数的连续性**

①基本初等函数在定义域内连续

②一切初等函数在定义区间内都是连续的

**非初等函数的连续性**

在每一段上按初等函数考察，在各段连接点考虑其左右连续性，再得出整个函数连续性

**间断点定义**

有下列三种情况之一，称$f(x)$在点$x_0$处不连续（间断）

①$f(x)$在点$x_0$处无定义；

②在点$x_0$处虽有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在

③在点$x_0$处虽有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

| 间断点分类 | | 第一类间断点 | | 第二类间断点 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 可去间断点 | 跳跃间断点 | 无穷型 | 振荡型 |
| 分类原则 | 细分 | ①$f(x_0+0)=f(x_0-0)=A\neq f(x_0)$<br>②$f(x_0+0)=f(x_0-0)$，但$f(x)$在$x_0$点无定义 | $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$都存在，但不相等 | 左、右极限中至少有一个为$\infty$ | 在$x_0$处极限不存在，永远振荡 |
| | 概括 | 左右极限都存在的间断点 | | 非第一类间断点 | |
| 举例 | | (1)$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，$x=0$是可去间断点<br>(2)$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$x=1$是可去间断点 | $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x<0\end{cases}$，$x=0$是不可去间断点（跳跃间断点）. | $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，$x\to 0$时<br>$f(x)\to 0, x\to 0^-$时，<br>$f(x)\to\infty, x\to 0^+$，$x=0$是无穷间断点 | $y=\sin\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}y$不存在，在$\pm 1$之间无限振荡<br>$x=0$是振荡间断点 |

**闭区间上连续函数的性质**

设$f(x)$在$[a,b]$上连续

①$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值与最小值.（推论:$f(x)$在$[a,b]$上必有界）

②对于$f(a)=A$，$f(b)=B$之间的任意数$C$至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=c$.推论：当$f(a)f(b)<0$时，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$，即方程$f(x)=0$至少有一个实根

③$f(x)$在$[a,b]$上一致连续

# 1.3 学习指导

本章的中心内容是函数、极限与函数的连续性．函数关系是变量与变量之间的依赖关系，是高等数学研究的主要对象．极限方法是研究高等数学的一种基本方法，一些重要概念如导数、定积分、重积分等都是建立在极限概念的基础之上的．连续是函数的一个重要性质，连续函数是最基本的一类函数，正确理解函数的概念、极限的概念与函数连续性的概念对于学好高等数学是十分必要的．

函数是学习高等数学的基础知识，要求大家深刻理解函数的概念与函数符号，熟练地求出所给函数的定义域，能利用函数的基本特性，如单调性、奇偶性、周期性等解决一些具体问题．

极限概念的理论性强，也比较抽象，不仅要计算熟练，还要正确理解、掌握极限的概念、相关定理及其应用，要对极限定义有具体的认识与深刻的理解．此外，正确理解极限定义中每个数学符号、数学字母的含义．

极限运算要求熟练地运用四则运算法则，掌握四个关系：有极限与有界、有极限与无穷小量、无穷小量与无界、无界与无穷大量．同时，还要求会用两个重要极限求某些未定式的极限，在极限运算中要注意等价无穷小代换的应用；要深刻理解函数连续的定义及间断点的类型．对于具体给定的函数能找到它的连续区间及间断点，并能判断间断点的类型，掌握函数在某点连续的充要条件；能利用函数的连续性求函数的极限，掌握闭区间连续函数的性质，如最大最小值定理、介值定理、零点定理等．

# 1.4 解题与分析

**【例 1－1】** 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域是（　　）．

A. $[0,1]$　　B. $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$　　C. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

**答案：** D.

**分析：分别考察 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)$ 和 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)$，求两个函数的定义域的交集．**

**【例 1－2】** $y=\pi+\arctan\frac{x}{2}$ 的反函数是（　　）．

A. $y=2\tan(x-\pi)\quad\left(x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)\right)$　B. $y=\tan\frac{x}{2}\quad\left(x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$

C. $y=2\tan\frac{x}{2}\quad\left(x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)\right)$　D. $y=\frac{1}{2}\tan x\quad\left(x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$

**答案：** A.

**解** 由 $y=\pi+\arctan\frac{x}{2}$ 解出 $x=2\tan(y-\pi)$，调换 $x$ 和 $y$ 的位置，变成 $y=$

$2\tan(x-\pi)$．这就是反函数的表达式．另外，反函数的定义域是原函数的值域$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$，所以反函数为 A.

**注释：** 若将答案写成 $x=2\tan(y-\pi)\left(y\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)\right)$ 也是正确的．在初等数学中，习惯于用 $x$ 表示自变量，$y$ 表示函数，所以常常要求写成前者；但是在高等数学中，写成后者更为妥当．

**【例 1-3】** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加，则下列函数中必定单调增加的是（　　）．

A. $f(x^2)$　　B. $f^2(x)$　　C. $\tan f(x)$　　D. $\arctan f(x)$

**答案：** D.

**【例 1-4】** 设 $f(x)=\ln(x+1)$，则函数 $f(f(x))$ 的定义域是（　　）．

A. $(0,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{e}-1,+\infty\right)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,e)$

**答案：** B.

**分析：** 比较简单的方法是求出复合函数的表达式 $f(f(x))=\ln[\ln(x+1)+1]$.

**【例 1-5】** 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$，则（　　）．

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$

B. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

**答案：** D.

**分析：** 这是一个求复合函数的问题，分段初等函数求复合函数的问题要细心．令 $u=-x$，当 $x<0$ 时，由于 $u>0$，所以

$$f(-x)=f(u)=u^2+u=x^2-x$$

当 $x\geqslant 0$ 时，由于 $u\leqslant 0$，所以

$$f(-x)=f(u)=u^2=x^2$$

因此答案为 D.

**【例 1-6】** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，下列哪一个条件能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在（　　）．

A. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n$ 存在　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 存在

C. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n+b_n|$ 存在　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-7b_n)$ 存在

**答案**：D.

【例1-7】$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$，则当 $x\to 1$ 时（ ）.

A. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ B. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

C. $f(x)\to\infty$ D. $f(x)$ 不存在极限也不趋向于 $\infty$

**答案**：D.

**解** 约去非零因子 $x-1$，则 $f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$. 因为 $\lim f(x)=0$，当 $x\to 1^+$ 时 $f(x)\to\infty$，所以D正确.

【例1-8】若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，则（ ）.

A. $a=1,b=1$ B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=-1$ D. $a=-1,b=-1$

**答案**：C.

**解** 通分

$$\frac{x^2}{x+1}-ax-b=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}$$
$$=(1-a)\frac{x^2}{x+1}-(a+b)\frac{x}{x+1}-\frac{b}{x+1}$$

欲使此式在 $x\to\infty$ 时趋向于零，必须且只须 $a=1,b=-1$，因此答案为C.

【例1-9】当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（ ）.

A. 无穷小量 B. 无穷大量

C. 有界量非无穷小量 D. 无界但非无穷大量

**答案**：D.

> **分析**：当 $x\to 0$ 时，显然 $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$，但是 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $-1$ 和 $1$ 之间不断地摆动，并且不断地重复函数值零，因此不难排除A、B、C三个选项.

**解** 令 $x_n=\dfrac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}(n=1,2,\cdots)$，则

$$x_n\to 0,\ f(x_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\to\infty$$

所以当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小，也不是有界量.

又令 $z_n=\dfrac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$，则 $z_n\to 0$，$f(z_n)=0$，因此当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷大.

于是当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 无界但非无穷大量.

【例1-10】设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_2(x)=f(f(x)),\cdots,f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，求证：

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

**分析：** $f_n(x)$ 是归纳定义的，因此可以用归纳法尝试证明结论．

**解** 用归纳法．设 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则

$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k(x)^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

**【例 1-11】** 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域．

**分析：** 这是一个复合函数问题，可以设 $u=\varphi(x)$，从题目条件分析 $u$ 和 $x$ 的关系，找出答案．

**解** 令 $u=\varphi(x)$，则 $f(\varphi(x))=f(u)=\mathrm{e}^{u^2}$，于是由题设得到 $\mathrm{e}^{u^2}=1-x$．解这个方程得到 $u=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$．又因 $u=\varphi(x)\geqslant 0$，所以舍去负号，得到 $u=\sqrt{\ln(1-x)}$．为了使得开方运算有意义，必须且只须使 $x\leqslant 0$．于是 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}(x\leqslant 0)$．

**【例 1-12】** 已知 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$ 的表达式．

**分析：** 题目所给条件是关于 $f(x)$ 和 $f(1-x)$ 的一个线性组合等式，若令 $u=1-x$，则得到关于 $f(x)$ 和 $f(1-x)$ 的另一个线性组合等式，由两个等式就可以求出 $f(x)$ 的表达式．

**解** 令 $u=1-x$，得到

$$2f(1-u)+f(u)=(1-u)^2$$

即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$$

此式与题目所给条件联立，解出

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

**【例 1-13】** (1) 设 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$ 对称，求证 $f(2a-x)=f(x)$．

(2) 如果 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 都对称，求证 $f(x)$ 是周期等于 $2(b-a)$ 的周期函数．

**证** (1) 如果 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$ 对称，则对于任意实数 $x$ 有

$$f(a-x)=f(a+x)$$

于是

$$f(x)=f[a-(a-x)]=f[a+(a-x)]=f(2a-x)$$

(2) 因为 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $x=b$ 对称，所以又有

$$f(2a-x)=f[b-(b+x-2a)]=f[b+(b+x-2a)]=f[x+2(b-a)]$$

由于上面已经得到 $f(x)=f(2a-x)$，所以有

$$f(x)=f[x+2(b-a)]$$

因此 $f(x)$ 是周期等于 $2(b-a)$ 的周期函数．

**【例 1-14】** 设 $a>1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$．

**证** 在初等数学中曾经学习过公式

$$(b^n-1)=(b-1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+1)$$

令 $b=\sqrt[n]{a}$，得到

$$(\sqrt[n]{a}-1)=\frac{a-1}{a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}<\frac{a-1}{n}$$

任意给定正数 $\varepsilon$，取自然数 $N$，使其满足不等式 $N>\dfrac{a-1}{\varepsilon}$，只要 $n>N$，就有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\frac{a-1}{n}<\frac{a-1}{N}<\varepsilon$$

于是根据极限定义知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，证毕．

**【例 1-15】** 讨论下列极限是否存在．

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$

**解** (1) 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x^2}\to+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$．

(2) 当 $x\to 1^-$ 时，$\dfrac{1}{1-x}\to+\infty$，$2^{\frac{1}{1-x}}\to+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=0$；

当 $x\to 1^+$ 时，$\dfrac{1}{1-x}\to-\infty$，$2^{\frac{1}{1-x}}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=1$．由于

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}\neq\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ 不存在．

**【例 1-16】** 说明下列极限不存在．

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$