普通高等教育“十一五”国家级规划教材

常微分方程与偏微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG YU PIANWEIFEN FANGCHENG

管志成 李俊杰 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

常微分方程与偏微分方程

管志成　李俊杰　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程与偏微分方程 / 管志成，李俊杰编．—杭州：浙江大学出版社，2010.12
ISBN 978-7-308-08151-1

Ⅰ.①常… Ⅱ.①管…②李… Ⅲ.①常微分方程—高等学校—教材②偏微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 233312 号

常微分方程与偏微分方程
管志成　李俊杰　编

责任编辑　沈国明
封面设计　刘依群
出　　版　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　710mm×1000mm　1/16
印　　张　14
字　　数　260 千
版 印 次　2010 年 12 月第 1 版　2010 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08151-1
定　　价　20.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

前　言

常微分方程与偏微分方程和其他的数学学科有所不同，它们是更密切结合实际的学科，它们所反映的问题也是千差万别、五花八门的. 所用的研究方法更没有统一的工具和格式，而要具体问题具体分析，有时需要综合运用各种数学知识（如微积分、线性代数、复变函数、泛函分析和拓扑学等）才能获得满意的结果. 随着时代的进步、计算机技术的发展，微分方程的内容也日益丰富，它们涉及的领域更广泛、更深刻. 可以这样说，近代先进科学技术的发展都已离不开微分方程了. 作为大学的基础课程之一，常微分方程与偏微分方程是继微积分之后的重要基础课，虽然已有较好的教材，但是还有未涉及到的内容，为了使学生能更多地接触不同内容、不同风格和不同处理方法的常微分方程与偏微分方程教材，也为了使常微分方程和偏微分方程更好地结合，我们编了这本“常微分方程与偏微分方程”课程教材，它可以作为理工科各专业 2 学时的“常微分方程”或“偏微分方程”课程的教材，也可以作为 3 或 4 学时的“常微分方程与偏微分方程”课程的教材.

对于常微分方程的内容，本教材在基本内容与别的教材相一致的基础上，有的地方有不同的处理方法，最主要的不同是我们增加了第三章“微分方程的模型及应用”与第六章“边值问题初步”和第七章“特征值问题”. 对于常微分方程的定性理论、奇解和包络的概念几乎没有提到，有兴趣和需要的读者可以参考文献[A-2]和文献[A-9]的有关章节.

我们希望，通过本教材的学习，读者除了掌握常微分方程的基本概念与解法外，能够对它有更多方面的了解. 其中第三、六和七章可根据学时的多少和学生的水平取舍，一般说来，第七章是属于偏微分方程的内容.

对于偏微分方程的内容，本教材与别的教材相比有更多的不同之处，力求用更统一的观点和方法处理它，根据解法来分章节，增加了重要的一章“偏微分方程定性理论初步”. 它既补充了常微分方程这方面内容的不足，又能够让学生学到新的数学处理方法；对于方程的导出，更多地基于变分原理，以适应教材现代化的需要. 我们作这些变化仅仅是初步尝试，只是希望对数学系或者其他理工科

的教师和学生有参考价值,能在繁多的偏微分方程的内容里,获得一个较系统和完整的概念体系,希望它是教材建设方面的一朵小花.显然,只有大量的各具特色的人才的出现,才能适应大千世界的人才需求,而多样化的教材是培养多样化人才的基础之一,所以,我们更愿看到教材百花齐放的春天.

本书共有十一章,前六章或加上第七章是常微分方程的内容,第七章或第八章到第十一章是偏微分方程的内容,附录包括"常微分方程的初值问题解的存在、唯一性定理"、"一阶偏微分方程初步"和"关于特征值问题的讨论".

最后,作者要感谢教育部的资助(国家理科基地创建名牌课程项目:"微分方程").还要感谢杨已青和赵申琪教授.他们提出了许多宝贵意见.由于编者水平的限制,错误与不当之处,敬请读者批评、指正.

编　者

2010 年 10 月

目　　录

第一章　概　论

§1.1　基本概念

在微积分中用函数方程来描述变量在变化过程中的相互关系.当自变量为x,因变量为y时,x与y的依赖关系用方程

$$F(x,y)=0, \tag{1.1}$$

或者

$$y=f(x) \tag{1.2}$$

来确定.我们分别称y是x的隐函数或者函数.但是在实际问题中,变量之间的关系一般不仅仅是它们本身值之间的关系,还涉及到未知函数的导数或微分之间的依赖关系.这时,函数方程(1.1)和(1.2)变为微分方程

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{1.3}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\equiv y'=f(x,y). \tag{1.4}$$

更一般地,

$$F(x,y,\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1.5}$$

或

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{1.6}$$

其中$y^{(i)}=\dfrac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}x^i}$是$y$关于$x$的$i$阶导数.

式(1.5)的最简单的例子是:质量为m的质点在力$F(t,x,x')$的作用下,沿着x轴方向运动,质点的运动函数是$x(t)$.根据牛顿第二运动定律,得到

$$mx''=F(t,x,x'), \tag{1.7}$$

这样,确定质点如何运动的力学问题便化为求满足式(1.7)的解$x(t)$的数学问题.又如电子学中的RL振荡电路与热力学中的热传导问题可分别归结为

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI=E_0\sin\omega t \tag{1.8}$$

与

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.9}$$

式中 t 为代表时间的自变量，$I(t)$ 是代表电流强度的未知变量，R 是电阻，L 是电感，$E_0\sin\omega t$ 是交流电动势，$u(x,t)$ 是温度.

式(1.7) ～ (1.9) 都是微分方程. 下面我们介绍几个术语.

当微分方程中的未知函数仅是一元函数时，称为常微分方程或简称为微分方程；当微分方程中的未知函数是多元函数时，称为偏微分方程. 微分方程中出现的未知函数的导数或微分的最高阶数，称为微分方程的阶.

据此定义，式(1.7) 是二阶微分方程，式(1.3)、(1.4) 与(1.8) 是一阶微分方程，式(1.5) 与(1.6) 是 n 阶微分方程的一般形式，式(1.9) 是二阶偏微分方程.

设 I 是一个区间，有限或无限，开或闭，函数 $y=\varphi(x)$ 在 I 上有定义，而且有直到 n 阶的导数. 如果 $\forall x\in I$，

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

或

$$\varphi^{(n)}(x)=f(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x))$$

成立，则称 $\varphi(x)$ 是式(1.5) 或(1.6) 的解. $y=\varphi(x)$ 在 x-y 坐标平面上代表的曲线称为积分曲线.

我们看到，最简单的微分方程 $y'=f(x)$ 是微积分中已知导数求原函数的问题. 而式(1.7) 所表示的质点运动方程，不论质点以怎样的初始位置与初始速度开始运动，只要在同一个力 F 作用下，代表运动的函数 $x(t)$ 都满足它，所以，与在微积分中要确定一个原函数需要知道 y 在某点的值一样，为了确定 $x(t)$，除了式(1.7) 以外，还要知道质点在开始时刻 t_0 时的初始位置与初始速度

$$x(t_0)=x_0 \quad 与 \quad x'(t_0)=v_0. \tag{1.10}$$

由不同的 x_0 与 v_0 得到不同的 $x(t)$. 可见，式(1.7) 的解不是有限个，而是无限个. 从物理角度看，给定 x_0 与 v_0，应该只有一个解 $x(t)$ 满足式(1.10). 式(1.10) 是决定满足微分方程一个特解的条件，我们称它为定解条件. 这里它代表的是初始位置与初始速度，又称它为初值条件. 式(1.7) 与(1.10) 一起称为微分方程的初值问题或 Cauchy 问题.

一般地，式(1.6) 的初值条件是

$$\begin{cases} y(x_0)=y_{0,0}, \\ y'(x_0)=y_{1,0}, \\ \quad\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1,0}. \end{cases} \tag{1.11}$$

微分方程(1.6) 的含有 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解为

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n). \tag{1.12}$$

若对区间 $J \subseteq I$ 中的点 x_0，任意给定式(1.11)的初值，都能确定常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，使得式(1.12)的函数 y 在 J 中满足式(1.6)与(1.11)，则我们称式(1.12)为 n 阶微分方程(1.6)在 J 中的通解或简称为通解. 满足式(1.11)的解称为特解.

对于二阶以上的微分方程，定解条件除了式(1.11)的初值条件之外，还有边值条件. 例如，对区间 $I = (a,b)$ 中的二阶微分方程

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1.13}$$

求在下面条件下的解

$$\begin{cases} \alpha_0 y'(a) + \beta_0 y(a) = y_0, \\ \alpha_1 y'(b) + \beta_1 y(b) = y_1, \end{cases} \tag{1.14}$$

式中 $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ 是满足 $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$ 与 $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ 的常数.

我们称式(1.14)为边值条件，式(1.13)与(1.14)一起称为边值问题. 初值条件、边值条件和初值问题、边值问题分别统称为定解条件和定解问题.

微分方程除了初值问题与边值问题之外，还有常见的一类所谓特征值问题. 例如，求 λ，使得下面的方程

$$(p(x)y')' + q(x)y - \lambda r(x)y = 0 \tag{1.15}$$

当式(1.14)中 $y_0 = y_1 = 0$ 时有非零解. 这类特征值问题也称为 Sturm-Liouville 问题.

对偏微分方程也有相应的初值问题、边值问题和特征值问题，而且还有初、边值条件都有的混合问题，这在第七章以后再讨论.

§1.2 存在、唯一性定理

求解微分方程最理想的方法是能找出式(1.12)通解的表达式，再根据定解条件来决定常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，从而得到所需要的解. 对于含有参数的方程，可通过对通解的研究，了解解对参数的依赖情况，从而适当地选择参数，使相应的解具有所需要的性能. 不幸的是，能求出通解的方程类型是很少的. 例如，方程

$$y'' - y = 0$$

的通解是 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. 但是，如果 $a(x)$ 是一般函数，方程

$$y'' + a(x)y = 0$$

就没有用积分与初等函数表达的通解. 所以，微分方程解的定性研究与近似解法就显得十分重要. 当然最重要的是，微分方程是如何来反映实际问题的，以及如何从实际出发，根据物理规律，建立由微分方程反映的数学模型. 本书第三章讲微分方程的模型及应用问题，而近似解法的内容属于计算方法课程. 不论是建模

还是近似求解，都有一个合理性的问题或者所谓适定性的问题：建立的微分方程或近似求解是否符合实际，解是否存在、唯一以及连续依赖于定解条件或参数. 这些是研究问题的基础与前提.

例 1.1　解方程

$$(y')^2 + y^2 + 1 = 0. \tag{1.16}$$

显然，它的解不可能存在.

例 1.2　历史上曾经有个实际问题可归结为解如下的微分方程初值问题(见参考文献[A-1])：

$$\begin{cases} xy' - 3y = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{1.17}$$

解　易知微分方程的通解是 $y = Cx^3$. 由初值条件，得 $C = 1$，于是，特解为 $y_1(x) = x^3$，其积分曲线如图 1-1 所示. 这结果似无问题，但是实验曲线却如图 1-2 所示，即我们得到两个解：

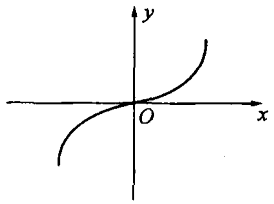

图 1-1

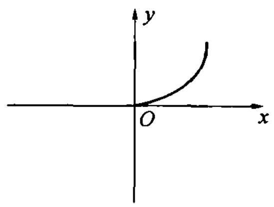

图 1-2

$$y_1(x) = x^3 \quad 与 \quad y_2(x) = \begin{cases} x^3 & (x \geqslant 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \tag{1.18}$$

它们在 $x \geqslant 0$ 时相同，但在 $x < 0$ 时完全不同，这说明初值问题(1.17)的解不是唯一的. 事实上，

$$y(x) = \begin{cases} x^3 & (x \geqslant 0), \\ Ax^3 & (x < 0) \quad (A\ 为任意常数) \end{cases} \tag{1.19}$$

都是式(1.17)的解. 然而，在区间 $I = (0, +\infty)$ 中，式(1.17)的解是唯一的，$y(x) = x^3$.

例 1.3　解初值问题

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \\ y(x_0) = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

解　方程的通解是 $y = \dfrac{1}{4}(x + C)^2$，满足条件 $y(x_0) = 0$ 的解为 $y = \dfrac{1}{4}(x - x_0)^2$，而 $y = 0$ 也是它的解. 所以初值问题(1.20)的解不是唯一的(注意到在通解中无论怎样取常数 C，都不能得到解 $y = 0$). 从这些例子可见，微分方程的解

是否存在、唯一的问题是研究的基础,下面我们给出初值问题解的存在、唯一性定理.所给的条件仅仅是充分的,不是必要的,其证明由第四章 §4.1 与 §4.2 的一般情况得到,详见附录 Ⅰ.

定理 1.1 设(1) $f(x,p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 在 $n+1$ 维空间 $(x,p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 中的闭区域

$$D: |x-x_0|\leqslant a, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i-y_{i,0})^2}\leqslant b$$

上连续;(2) $f(x,p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 在 D 上关于 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 满足 Lipschitz 条件,即对于一切的

$$(x,p_1,p_2,\cdots,p_n),\ (x,q_1,q_2,\cdots,q_n)\in D,$$

$$|f(x,p_1,p_2,\cdots,p_n)-f(x,q_1,q_2,\cdots,q_n)|\leqslant L\sum_{i=1}^{n}|p_i-q_i| \tag{1.21}$$

成立,式中 L 是正常数,则初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \\ y^{(i-1)}(x_0)=y_{i,0} \quad (i=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 内有唯一解,这里

$$h=\min\left(a,\frac{b}{\sqrt{n}M}\right),$$

而

$$M=\max_D f(x,p_1,p_2,\cdots,p_n).$$

注 1.1 f 满足式(1.21)的一个充分条件是 $f(x,p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 在 D 上有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial p_i}(i=1,2,\cdots,n)$.

习 题 一

1. 验证函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 是方程 $(1+x^2)y''+4xy'+2y=0$ 的解.

2. 验证由 $x^3+3xy^2=1$ 所决定的隐函数是方程 $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2+y^2=0$ 在区间(0,1)上的解.

3. 验证参数方程 $x=t^3-t+2, y=\frac{1}{4}(3t^4-2t^2)+c$(其中 t 为参数,c 为任意常数)所决定的函数是方程 $x=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2$ 的解.

4. 证明一阶微分方程 $\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|+|y|+1=0$ 没有实解.

5. 证明 $y=(x+c)^2$（c 为任意常数）是一阶微分方程 $(y')^2-4y=0$ 的通解；$y=0$ 也是该微分方程的解，但它不包含在通解中.

6. 已知 $y''+y=0$ 的通解为 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$（c_1,c_2 为任意常数），问下列定解问题是否有解存在？其解是否唯一？

(1) $y''+y=0, y(0)=1, y'(0)=0$；

(2) $y''+y=0, y(0)=2, y''(0)=-2$；

(3) $y''+y=0, y(0)=1, y(\pi)=-1$；

(4) $y''+y=0, y(0)=0, y(\pi)=1$.

7. 根据定理 1.1，写出一阶微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$$

解的存在、唯一性定理.

第二章　可积的特殊方程

这一章我们考虑常见的简单类型的方程(或者经过自变量与函数变换后可化为简单类型的方程),它们能用积分或初等函数表示出通解.

§2.1　一阶方程

一、导数形式

一阶方程已解出导数的一般形式是

$$y' = f(x,y). \tag{2.1}$$

下面介绍的是常见的可积方程的一些类型.

(1) 变量分离方程 $y' = \varphi(x)\psi(y)$.

例 2.1　求解方程 $y' = (1+y^2)x$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = x\mathrm{d}x$,积分后,得到 $\arctan y = \dfrac{x^2}{2} + C$. 所以,通解为

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

其中 C 为任意常数.

例 2.2　求解方程 $y' = -\dfrac{(y^2-1)x}{y(x^2-1)}$.

解　当 $y \neq \pm 1$ 时,等式两边同除以 $\dfrac{y^2-1}{y}$,积分后,得到

$$\int \frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x + C,$$

$$\ln|y^2-1| + \ln|x^2-1| = 2C,$$

$$|(x^2-1)(y^2-1)| = \mathrm{e}^{2C},$$

$$(x^2-1)(y^2-1) = \pm\,\mathrm{e}^{2C}.$$

因为 C 是任意常数,$\pm\,\mathrm{e}^{2C}$ 也是不为零的任意常数,为了记号的简洁,我们仍然用 C 表示它,而且下面也采用这个约定,从而

$$(x^2-1)(y^2-1) = C \quad (C \neq 0). \tag{2.2}$$

我们再来检查 $y=\pm 1$ 的情况.从方程可见,它们都是方程的解,而且可以在公式(2.2)中取 $C=0$ 时得到.所以,通解为

$$(x^2-1)(y^2-1)=C. \tag{2.3}$$

例 2.3　求解方程 $y'=\sqrt[3]{y}$.

解　$\mathrm{d}y=\sqrt[3]{y}\,\mathrm{d}x$,当 $y\neq 0$ 时,等式两边同除以$\sqrt[3]{y}$,积分后,得到

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}=x+C.$$

所以,通解为

$$y^2=\frac{8}{27}(x+C)^3. \tag{2.4}$$

我们再来检查 $y=0$ 的情况,它也是方程的解,但是,在通解公式(2.4)中,不论取怎样的 C 都不能得到这个解,这是与例2.2不同的地方.

对方程(1),当 $\psi(y)\neq 0$ 时,易见其通解是

$$\int\frac{1}{\psi(y)}\mathrm{d}y=\int\varphi(x)\mathrm{d}x+C. \tag{2.5}$$

注 2.1　这里以及以后出现的不定积分均假定被积函数为可积或是连续的函数,且不定积分与微积分中的不同,是被积函数的某一原函数,它的任意常数包括在常数 C 中.有时,如例 2.2 那样,用同一个 C 来表示不同的常数.

注 2.2　对方程(1),若有 y_0 使得 $\psi(y_0)=0$,则有特解 $y=y_0$.它是否可以包含在式(2.5)中,必须要如例 2.2 与例 2.3 那样具体分析.不论哪种情况,我们都称这样的解为奇解.关于奇解及相关的包络问题,这里不准备论述,可参阅文献[A-2]和[A-9].

(2) 线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$.

对方程(2),令

$$y=z\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{2.6}$$

代入方程(2)中,得到

$$z'=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.7}$$

从而

$$z=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right). \tag{2.8}$$

方程(2)在初值 $y(x_0)=0$ 时的解是

$$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}\int_{x_0}^{x}q(s)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s. \tag{2.9}$$

例 2.4　求解方程 $xy' - 2y = -x^2$.

解　由式(2.8),因为 $p(x) = -\dfrac{2}{x}, q(x) = -x$,所以

$$e^{\int p(x)d(x)} = x^{-2},$$

$$e^{-\int p(x)d(x)} = x^2,$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)d(x)} = -\ln|x|,$$

从而通解为

$$y = x^2(C - \ln|x|).$$

如果初值是 $y(1) = 0$,则 $C = 0$,故解为

$$y = -x^2\ln|x|.$$

例 2.5　求解方程 $y' + \dfrac{2x}{x^2-1}y = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

解　可以如上例一样由公式(2.8)得到通解,但是,我们也可以直接求解.方程两端同乘以(x^2-1),得到

$$(x^2-1)y' + 2xy = 2x.$$

显然,

$$[(x^2-1)y]' = 2x,$$

两边积分后,得到通解为

$$y = \frac{x^2+C}{x^2-1}.$$

(3) 齐次方程 $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

对方程(3),令

$$y(x) = xz(x). \tag{2.10}$$

代入方程(3)中,得到

$$z' = (f(z) - z)/x, \tag{2.11}$$

它是方程(1)的形式,从而

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C,$$

即有

$$\int_{z_0}^{y/x} \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C, \tag{2.12}$$

其中下限 z_0 是任意的定值.