经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 4

SHUXUE

（必修）

齐民友 主编

湖北教育出版社

经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数 学 4

SHUXUE

(必修)

主　　编 齐民友
副 主 编 裴光亚 徐学文 郭熙汉
本册主编 徐学文
主要编者 樊孝农 谢志庆 彭树德 彭永东
参与设计 朱翠蓉 郑学群 李佳涵 姚　卫
审　　读 黄邦本 徐汉文 金保云

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

普通高中课程标准实验教科书
数学 4
(必修)
*
湖 北 教 育 出 版 社 出 版
(武汉市青年路 277 号 邮编:430015)
网 址:http://www.hbedup.com
新 华 书 店 发 行
孝感市三环印务有限责任公司
(432100·孝感市高新开发区)
*
880 毫米×1230 毫米 1/16 印张:6.75 字数:147 000
2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 7—5351—4341—5 / G·3613(课) 压膜本定价:6.20 元

Mulu

目录

第1章 三角函数

第2章 平面向量

目 录

Mulu

致高中生

高中数学是一门非常重要的课程.

我们需要数学，因为数学在人类生产和社会生活中有着广泛的应用，可以为社会创造价值，推动社会生产力的发展.

我们需要数学，因为数学是刻画自然规律和社会规律的语言和工具，是自然科学、技术科学的基础，而且在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越大的作用.

我们需要数学，还因为数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用.

我们需要数学，更因为数学是人类文化的重要组成部分，数学素质是公民所必须具备的一种基本素质.

本套教科书是以《普通高中数学课程标准（实验）》为依据编写的，它涵盖的内容正是我们适应21世纪现代生活和未来发展的基础，也是我们进一步学习的必备知识.

高中数学课程分必修和选修. 必修课程由5个模块构成，是每个学生都必须学习的数学内容；选修课程有4个系列，每个系列又由若干模块或者专题构成. 整套教科书为同学们学习数学提供了多层次、多种类选择的可能.

教科书不是金科玉律，而是我们学习的出发点. 现代社会是信息社会，又是终身学习的社会. 在使用本书时，我们应该多关注现实生活，关注社会的进步和科技的发展，用数学的眼光来看待我们周围的世界. 尤其应根据实际条件，充分利用计算机与互联网，丰富学习资源，提高学习效率.

我们希望同学们积极参与数学活动，勇于克服困难，善于独立思考，敢于提出质疑，勤于动手实践，乐于合作交流，使数学学习变得更为主动，更加生动活泼和富有情趣.

我们祝愿同学们：在学习中学会学习，在创造中学会创造.

Mulu

目录

第 1 章 三角函数

第 2 章 平面向量

Mulu

目 录

第1章 三角函数

观察我们的身边，你会发现一类具有某种变化规律的现象．例如：

弹簧下挂着的小球，给它一个向下的拉力之后，小球就会重复地做上下振动；

将单摆从离平衡位置一定角度处放下，在重力的作用下，单摆会左右重复摆动；

观察正常人的心电图，你会发现，心电图上显示的波形在相同长度的横段内呈现重复性的变化，而心电图正是医生判断一个人的心脏是否正常的依据之一；

受日月的引力，海水在每天的相同的两个时段涨落，这就是通常所说的潮汐，人们正是依据潮涨、潮落的规律确定船只进出港的时间．

上述这些现象中的变化规律具有一个共同的特点——周而复始，我们称这种现象为周期现象．

周期现象随处可见．如电网上供给工用、民用的电一般为交变电流，而交变电流通常以每秒50次的频率周期变化；通过电视、卫星通讯等方式给我们带来大量信息的电磁振荡都是周期性变化的电磁波；我们的经济生活也时常呈现周期性的特征．

在所有的周期现象中，有一种最简单、最直观、最有代表性的周期现象——匀速圆周运动．

正如人们用一次函数描述匀速直线运动，用二次函数描述自由落体运动，用指数函数描述物质的衰变、种群的繁殖、经济的增长等变化规律一样，人们用一类新的函数——三角函数来描述匀速圆周运动．三角函数正是描述各种周期现象中的变化规律的最基本的工具．

在本章中，我们将学习三角函数及其基本性质，体会三角函数在解决周期性问题中的作用．

1.1 任意角

2003 年 10 月 15 日，我国成功地发射了神舟 5 号载人飞船. 飞船变轨后，在离地面 343 km 的圆形轨道上绕地球做逆时针方向的匀速圆周运动，大约 91.3 分钟转一圈，共转了 14 圈. 那么，如何确定变轨后飞船所在的位置？也就是说，如何对变轨后飞船的运动进行数学描述呢？

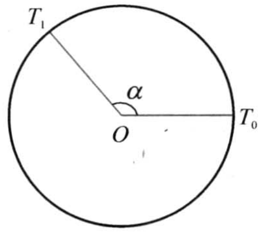

图 1-1

如图 1-1，若记地球球心为 O，飞船开始做匀速圆周运动的起始位置为 T_0，连接 OT_0. 当飞船从点 T_0 沿圆形轨道上运动到点 T_1 时，射线 OT_0 按逆时针方向旋转到 OT_1，这就形成了一个角，记为 $\angle T_0OT_1$ 或 α，OT_0 是这个角的始边，OT_1 是这个角的终边. 我们可以用这个角来记录飞船的运动.

由于飞船运行了 14 圈，为描述飞船的运动，显然，仅有 $0°\sim360°$范围内的角是不够的，还需要有 $360°\sim720°$，$720°\sim1\,080°$，…范围内的角.

我们还需要规定角的方向. 这是因为形成角的射线有顺时针与逆时针两个不同的旋转方向，而这两个不同的方向表示的是不同的运动. 如用扳手拧螺钉时，一般是顺时针方向旋转是将螺钉拧紧，而逆时针方向旋转是将螺钉拧松. 我们规定，按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**(positive angle)；按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**(negative angle)；一条射线没有作任何旋转，我们认为这时也形成一个角，并把它叫做**零角**(zero angle). 这样，除了上述正角外，我们还有 $0°$，$-360°\sim0°$，$-720°\sim-360°$，$-1\,080°\sim-720°$，…范围内的角. 也就是说，角的概念经推广后包括正角、负角和零角.

今后我们常在平面直角坐标系下讨论角，并使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 角的终边(除端点外)在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 例如：

在图 1-2(1)中，$60°$，$420°$，$-300°$的角都是第一象限角；

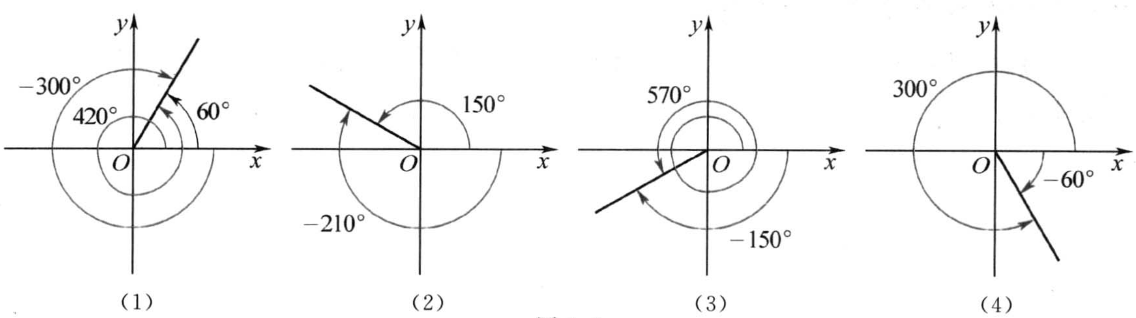

图 1-2

在图 1-2(2)中，150°，$-210°$的角都是第二象限角；

在图 1-2(3)中，570°，$-150°$的角都是第三象限角；

在图 1-2(4)中，300°，$-60°$的角都是第四象限角.

若角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任一象限. 比如 0°，±90°，±180°，±270°，±360°，±1 080°的角等都不在某个象限内.

从图 1-2(1)中可以看出，420°，$-300°$角的终边都与 60°角的终边相同，并且这两个角都可以表示成 0°到 360°内某个角与 k 个($k\in\mathbf{Z}$)周角的和，即

$$420°=360°+60° \quad (这里\ k=1),$$

$$-300°=-360°+60° \quad (这里\ k=-1).$$

本书约定："0°到 360°"这一说法包含 0°，但不包含 360°.

设 $S=\{\beta|\beta=k\cdot 360°+60°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，则 420°，$-300°$的角都是 S 的元素，60°角也是 S 的元素（此时 $k=0$）. 容易看出，所有与 60°角终边相同的角，连同 60°角在内，都是集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 60°角终边相同.

一般地，所有与角 α 终边相同的角(连同角 α 在内)所组成的集合为

$$S=\{\beta|\beta=k\cdot 360°+\alpha,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成整数个周角与 α 的和.

例 1 在 0°到 360°范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们是第几象限角：

(1) 花样滑冰赛中，运动员逆时针旋转 1 260°；

(2) 时针走过 2 小时 40 分时，分针转过的角度.

解 (1) 1 260°=3×360°+180°，所以在 0°到 360°范围内与 1 260°角终边相同的角是 180°角，它不属于任何象限.

(2) 时针与分针是按顺时针方向转动，转过的角度是负角.

时针走过 1 小时，分针恰好转一圈即转过$-360°$，而 2 小时 40 分$=2\dfrac{2}{3}$小时，所以

$$-360°\times 2\frac{2}{3}=-960°=-3\times 360°+120°.$$

因此，在 0°到 360°范围内，与分针转过的角度(即$-960°$角)终边相同的角是 120°角，它是第二象限角.

例2 写出终边在 x 轴上的角的集合：

解 终边在 x 轴非负半轴上的角的集合为

$$S_1=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+0°,\ k\in\mathbf{Z}\};$$

终边在 x 轴非正半轴上的角的集合为

$$S_2=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+180°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

所以，终边在 x 轴上的角的集合为

$$\begin{aligned}S&=S_1\cup S_2\\&=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+0°,\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\\&\quad\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+180°,\ k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|\alpha=2k\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\\&\quad\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot 180°,\ k\in\mathbf{Z}\}\\&=\{\alpha|\alpha=n\cdot 180°,\ n\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

终边在 y 轴上的角的集合如何表示？终边在坐标轴上的角的集合如何表示？

例3 (1) 写出与 $-345°$ 角终边相同的角的集合；

(2) 在(1)的集合中，求适合不等式 $-720°<\alpha<720°$ 的角 α.

解 (1) 与 $-345°$ 角终边相同的角的集合是

$$M=\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°-345°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

(2) $k=-1$ 时，$\alpha=(-1)\times 360°-345°=-705°$；

$k=0$ 时，$\alpha=0\times 360°-345°=-345°$；

$k=1$ 时，$\alpha=1\times 360°-345°=15°$；

$k=2$ 时，$\alpha=2\times 360°-345°=375°$.

在 M 中适合 $-720°<\alpha<720°$ 的角是

$$-705°,\ -345°,\ 15°,\ 375°.$$

练习

1. 写出下列角的集合：

   (1) 锐角；　(2) 不大于 90°的正角；　(3) 第一象限的角；　(4) 小于 90°的角.

2. 试求出与下列各角终边相同的最小正角和最大负角，并指出它们是哪个象限的角：

   (1) 1 563°；　(2) $-1\,190°30'$.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-720°\leqslant\beta<360°$ 的角 β 写出来：

   (1) 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度；

   (2) 将钟表上的时针作为角的始边，分针作为终边，当钟表上显示 8 点 5 分时，时针与分针构成的角.

习题 1.1

1. (1) 下列各命题正确的是(　　).

(A) 第一象限角都是锐角　　(B) 小于 90° 的角都是锐角

(C) 终边相同的角一定相等　　(D) 相等角的终边必相同

(2) 在平面直角坐标系中，若角 α 与 β 的终边互相垂直，则 α，β 之间的关系是(　　).

(A) $\beta=\alpha+90^\circ$　　(B) $\beta=k\cdot 360^\circ+\alpha+90^\circ \quad (k\in\mathbf{Z})$

(C) $\beta=\alpha\pm 90^\circ$　　(D) $\beta=k\cdot 360^\circ+\alpha\pm 90^\circ \quad (k\in\mathbf{Z})$

2. (1) 终边在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上的角的集合是________________.

(2) 第三象限角的集合是________________________.

3. 若集合 $A=\{x\mid x=k\cdot 90^\circ+45^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=k\cdot 45^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，试讨论 A，B 之间的关系.

4. 经过 5 小时又 25 分，时针和分针各转过了多少度？

5. 已知 α 是第二象限角，试探讨 2α，$\dfrac{\alpha}{2}$ 分别是第几象限角.

1.2 弧度制

我们已经知道，一个圆周的 $\dfrac{1}{360}$ 的弧所对的圆心角是 1 度的角，记作 1°. 这种用度作单位来度量角的单位制叫做**角度制**.

类似角度制，把一个圆周的 $\dfrac{1}{2\pi}$ 的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，记作 1 rad，读作 1 **弧度**(radian). 这种用弧度作单位度量角的单位制叫做**弧度制**(radian measure).

角的概念经推广之后，有正角、负角、零角之分. 我们规定，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0.

用弧度表示角的大小时，“rad”(或“弧度”)通常可以省略不写. 例如 $\alpha=2$ rad，$\beta=-\dfrac{1}{3}$ rad 可以分别写成 $\alpha=2$，$\beta=-\dfrac{1}{3}$，$\sin\dfrac{\pi}{6}$ 表示 $\dfrac{\pi}{6}$ 弧度的角的正弦.

角度制与弧度制可以互化.

在角度制里，一个周角是 360°，而在弧度制里，它的弧度数等于 $2\pi=6.283\,185\cdots$，所以有

$360° = 2\pi\ \mathrm{rad}$,

$180° = \pi\ \mathrm{rad}$,

$1° = \dfrac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} \approx 0.017\,453\ \mathrm{rad}$,

$1\ \mathrm{rad} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57.30° = 57°18'$.

下面给出一些常见特殊角的度数与弧度数的对照表：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

度数与弧度数的换算，可以用计算器进行.

例1 （1）化 $112°30'$ 为弧度；　（2）化 $-\dfrac{5\pi}{12}$ rad 为度.

解 （1）$112°30' = 112.5° = \dfrac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} \times 112.5 = \dfrac{5\pi}{8}\ \mathrm{rad}$.

（2）$-\dfrac{5\pi}{12}\ \mathrm{rad} = \dfrac{180°}{\pi} \times \left(-\dfrac{5\pi}{12}\right) = -75°$.

例2 利用弧度制推导弧长公式 $l = |\alpha| \cdot r$，其中 α 为圆心角的弧度数，r 是圆半径.

解 因为 1 弧度的圆弧的弧长为 $\dfrac{1}{2\pi}(2\pi r) = r$，所以圆心角为 α 弧度的弧的弧长是

$$l = |\alpha| \cdot r.$$

这一公式比采用角度制时的相应公式 $\left(l = \dfrac{n\pi r}{180}\right)$ 简单.

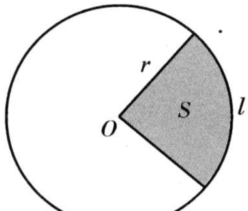

图 1-3

例3 利用弧度制推导扇形面积公式 $S = \dfrac{1}{2}lr$，其中 l 是扇形的弧长，r 是圆的半径.

解 如图 1-3. 因为圆心角为 1 弧度的扇形的面积为 $\dfrac{1}{2\pi} \cdot \pi r^2$，而弧长为 l 的扇形的圆心角的大小为 $\dfrac{l}{r}$ 弧度，所以它的面积

$$S = \frac{l}{r} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}lr.$$

这个公式形式简洁，而且与三角形面积公式类似.

例4 地球的半径约为 6 400 km，在同一经线上，甲、乙两地的距离为 150 km，试求甲、乙两地的纬度差.

解 设 θ 为甲、乙两地的纬度差，则

$$\theta=\frac{150}{6\,400}\text{rad}=\frac{150}{6\,400}\times\frac{180^\circ}{\pi}\approx1.343^\circ\approx1^\circ21'.$$

所以两地纬度差约为 $1^\circ21'$.

角的概念推广后，无论用角度制(角度制的度数采用十进制的算法，如 $26^\circ12'$ 写成 26.2°)还是用弧度制，均使得**每一个角都有唯一的一个实数与它对应；反之，每一个实数也都有唯一的一个角与它对应**（如图 1-4).

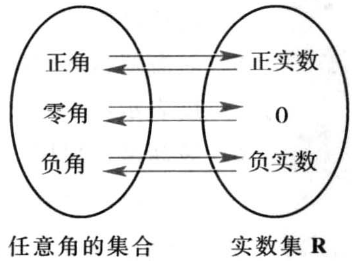

图 1-4

练习

1. (口答)把下列各角的度数化成弧度数：

(1) 15°; (2) 75°; (3) -120°; (4) 210°; (5) -225°; (6) 270°.

2. (口答)把下列各角的弧度数化成度数：

(1) $\frac{3\pi}{4}$; (2) $\frac{5\pi}{6}$; (3) $-\frac{4\pi}{3}$; (4) $\frac{7\pi}{4}$; (5) $-\frac{11\pi}{6}$; (6) $\frac{5\pi}{3}$.

3. 已知 120° 的圆心角所对的弧长等于 4π cm，求圆的半径.

4. 已知扇形弧长为 20 cm，半径为 15 cm，求扇形的面积.

5. 已知地球半径约为 6 400 km，地面上一段弧所对球心角为 $1'$，求该弧的弧长（精确到 0.001 km).

习题 1.2

1. (1) $\alpha=-3$，则 α 的终边在(　　).

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

(2) 下列各组角中终边相同的是(　　). (其中 $k\in\mathbf{Z}$)

(A) $(2k+1)\pi$ 与 $(4k\pm1)\pi$　(B) $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi+\frac{\pi}{2}$

(C) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$　(D) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{k\pi}{3}$

(3) 准确的钟表上，分针的角速度 φ 等于(　　).

(A) $\frac{\pi}{30}$ rad/min　(B) $-\frac{\pi}{30}$ rad/min　(C) $\frac{\pi}{60}$ rad/min　(D) $-\frac{\pi}{60}$ rad/min

2. (1) 在角集合 $M=\{\alpha|\alpha=k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$ 中，终边位于 -4π 到 -2π 之间的角为 ________.

(2) 2 弧度的圆心角所对弦长是 2，这个圆心角所夹扇形的面积是__________.

3. 把下列各角化成 0 到 2π 的角与 $2k\pi(k\in \mathbf{Z})$的和的形式：

(1) $\frac{27}{4}\pi$；　　(2) $\frac{29}{6}\pi$；　　(3) $-\frac{7\pi}{4}$.

4. 在直径为 10 cm 的轮子上有一长为 6 cm 的弦，P 是该弦的中点，轮子以 5 rad/s 的速度旋转，求经过 5 s 后点 P 转过的弧长.

5. 航海罗盘的圆周被分成 32 等份，把每一等份所对的圆心角的大小分别用度与弧度表示出来.

6. 装修某一房屋，设计师在客厅设计一个扇形天窗，已知扇形天窗的周长为定值 c $(c>0)$，当扇形的中心角设计为多少弧度时，透光最好？

7. 已知 α 是第二象限角，则$\frac{\alpha}{3}$是第几象限角？

8. 在军事上，炮兵常采用另一种度量角度的制度——密位制，密位制的单位是“密位”. 1 密位的角就是圆周的$\frac{1}{6\,000}$的圆弧所对的圆心角. 试探究：

(1) 1 密位等于多少弧度？1 弧度等于多少密位？

(2) 密位制下，n 密位所对的弧长 l 的公式；

(3) 密位制下，n 密位所对的扇形面积 S 的公式.

1.3 任意角的三角函数

现在我们回到如何对神舟 5 号载人飞船变轨后的匀速圆周运动进行数学描述的问题.

如图 1-5，设 t(s)时刻飞船所在位置为 T，点 T 的位置可由角 α 来确定，建立直角坐标系后，又可由直角坐标(x, y)来确定. 那么，坐标(x, y)与角 α 有何关系呢？

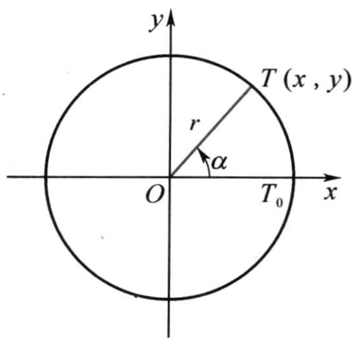

图 1-5

当(x, y)在第一象限时，对于图 1-5 中的角 α，由锐角三角函数的定义知，

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{6\,713},\ \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{6\,713}.$$

(6 713 km 是地球半径 6 370 km 与飞船高度 343 km 之和.)那么，当 T 在其他位置时，$T(x, y)$与 α 的关系又如何呢？

为了解决这一问题，我们将锐角三角函数的概念扩充到任意角.