■ 2000年考研辅导教材

（数学分册）

[经济类]

编　写　考研命题研究组

主　编　北京大学　陈凯

总策划　胡东华

北京大学出版社

单元测练

2000年

硕士研究生入学考试

考 研 辅 导 教 材

2000年硕士研究生入学考试单元测练（数学分册）

〔经 济 类〕

编　写　考研命题研究组

主　编　北京大学　陈凯

总策划　胡东华

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2000年硕士研究生入学考试单元测练:数学分册:经济类/陈凯主编.
-北京:北京大学出版社,1999.6
ISBN 7-301-04229-9

Ⅰ.20… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习
题 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第24029号

书　　　名:2000年硕士研究生入学考试单元测练(数学分册)〔经济类〕
著作责任者:陈凯
责 任 编 辑:商鸿业
标 准 书 号:ISBN 7-301-04229-9/G·0542
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话:出版部 62752015
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:北京读书新知教育图书公司电脑部
印　刷　者:中国农业出版社印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　21印张　531千字
1999年6月第一版　1999年6月第一次印刷
定　　　价:25.00元

前　言

本丛书自去年在科技文献出版社出版以来，得到广大考生及专家的一致好评，以其卓越的品质跃居全国同类书销售量的榜首。今年北大出版社将此丛书列入出版计划。

您的早期复习参考 4 月份推出的《应试教程》；本丛书的《单元测练》是您中期复习时，检查复习质量、培养应试素质、加强重点记忆、发现薄弱环节的最佳参考资料；后期的《最后冲刺》丛书，以模拟题的形式；使您在考研的题海中游刃有余，从容应试！

本丛书在提供单元测练的同时，对政治和数学总结出了知识网络图，使考生从支离破碎的详细考点中解脱出来，在大脑中勾画出本科目的总体知识构架，并从各知识点之间的联系和对比之中加强对概念的认识，从而使复习综合化、整体化，对问题能够从总体上全面把握，为培养你的“应试思维”、“应试能力”打下基础。另外，在知识网络图中列出新大纲对各知识点的要求，我们用 A，B 分别表示对有关概念，理论方面内容的较低和较高两种层次的要求（大纲中以“了解”和理解”表达），用 C、D 分别表示对有关方法，运算方面内容的较低和较高两种层次的要求（大纲中用“会或了解”和“掌握”表达），这样标记便于考生明确重点，合理安排时间。同时，英语科目紧紧衔接应试教程，通览知识点，把握要点，突出重点，使考试大纲在本书中，以点、线、面的形式充分结合，科学体现，为您的考研打下坚实的基础。

本书《数学分册》（经济类）中每个单元一般有二至三套模拟试题。对数学三、数学四考生的不同要求，本书均有注明，未注明的则两类考生均应掌握。知识网络图中加着重号的是尤应重视的重点内容。图后附有（应考提示）对考研试题中本单元知识点的命题情况作出了说明，以帮助考生把握重点。在单元测练的参考答案中，对每道题都给出了答案和考点，分析各知识点命题的频率、方式和注意事项。关于数学三和数学四适用的专业及考试内容，考试要求请参阅《2000 年考研应试教程》。复习本书时，最好先做题，后对答案，按研考要求在规定的时间（3个小时）内完成，这样才能真正测出自己的水平。

在编写本丛书的过程中，我们力求切合考生的各个复习阶段，结合当前命题趋势，尽可能的容纳最新信息，使考生的复习形成一个科学有效的体系，如果您在参阅本书后，觉得有所收获，将是我们最大的欣慰！如果您不吝批评与指正，我们将不胜感激！

编　者

1999．6

目　　录

第一单元　极限和一元函数微分学

第二单元　一元函数积分学

第三单元　多元函数微积分学

第四单元　无穷级数

第五单元　常微分方程与差分方程

第六单元　行列式

第七单元　向量与线性方程组

第八单元　矩阵代数

第九单元　矩阵的特征值和特征向量

第十单元　二次型

第十一单元　随机事件和概率

第十二单元　随机变量及其概率分布

第十三单元　随机变量的数字特征

第十四单元　大数定律和中心极限定理

第十五单元　数理统计

第一单元　极限和一元函数微分学

知识网络图

- 连续
  - 连续函数性质
    - 有界(闭区间)　[C]
    - 取到最大，最小值(闭区间)　[C]
    - 中间值取到　[C]
  - 间断点分类(左右极限)
    - 可去间断点　[A]
    - 第一类间断点　[A]
    - 第二类间断点　[A]
- 极限及求极限的常用方法
  - 序列极限：ε—N语言
    - 极限存在准则
      - 单调有界　[A]
      - 夹逼定理　[A]
    - 积分和表示求极限
  - 函数极限：ε—δ语言
    - 两个重要极限　[D]
    - 洛必达法则：$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$ 型(求导)　[D]
    - 等阶无穷小求极限　[C]
- 导数
  - 几何意义：切平面和法线方程　[B]
  - 求导法则
    - 四则运算法则　[D]
    - 反函数求导　[D]
    - 隐函数求导　[D]
    - 复合函数求导(链锁法则)　[D]
    - 参数方程求导　[B]
  - 高阶导数　[A]
  - 导数和函数性质
    - 几何性质
      - 单调性　$f(x)\neq 0$　[D]
      - 驻点　$f(x)=0$　[D]
      - 极值　[D]
      - 渐近线　[C]
    - 罗尔定理　[C]
    - 柯西中值定理(数学四不要求)　[C]
    - 拉格朗日中值定理　[C]
- 微分
  - 一阶微分形式不变性　$df(u)=f(u)du$　[A]

【应考提示】　本单元内容为考试的重点内容，每年题分均在 20 分左右，并且覆盖了所有题型，难度变化也非常大。考生应对基本概念融汇贯通，并应具备解综合题目的能力.

单元测练一

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. 如果函数 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,那么函数 $f(\sin x)$ 的定义域是________.

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} =$ ________.

3. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{x-1}=3$,则常数 $b=$ ________,$c=$ ________.

4. $y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$,则 $dy=$ ________.

5. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1 \\ 2x-1, & x>1\end{cases}$,则 $f'(x)=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x}),g(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x}),a>1$,已知 $f(x)g(y)+f(y)g(x)=g(u)$ 则 $u=$ ________. ( )

(A)$x-y$　　(B)$x+y$　　(C)$y-x$　　(D)xy

2. 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比另三个更高阶的无穷小量 ( )

(A)x^2　　(B)$1-\cos x$

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D)$x-\tan x$

3. 若 $3a^2-5b<0$ 则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ ( )

(A) 无实根　　(B) 有唯一实根

(C) 有三个不同实根　　(D) 有五个不同实根

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\,sin\,\dfrac{1}{x^2} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ( )

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

5. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 ( )

(A)$n![f(x)]^{n+1}$　　(B)$n[f(x)]^{n+1}$　　(C)$[f(x)]^{2n}$　　(D)$n![f(x)]^{2n}$

三、(本题满分 5 分)

证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$.

四、(本题满分 16 分,每小题 4 分)

(1) 已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$,求 y'.

(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(3) 已知$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t\end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$(此题数学四考生可不做).

(4) 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2},f'(2)=0$ 及$\int_0^2 f(x)dx=1$ 求$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

五、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在闭区间$[0,c]$上连续,其导数 $f'(x)$ 在开区间$(0,c)$内存在且单调减少;$f(0)=0$. 试应用拉格朗日中值定理证明不等式:$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

其中常数 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

六、(本题满分 6 分)

已知 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在，

证明 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有界.

七、(本题满分 6 分)

求由方程 $\sin y + xe^y = 0$ 所确定的曲线，$y = y(x)$ 在 $(0,0)$ 点的切线和法线方程.

八、(本题满分 5 分)

写出曲线 $y = x - \dfrac{1}{x}$ 与 x 轴交点处的切线方程.

九、(本题满分 5 分)

求 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$ 在 $x = 0$ 处存在的最高阶导数.

十、(本题满分 7 分)

要造一圆柱形油罐，体积为 v，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小，这时底直径与高的比是多少？

十一、(本题满分 7 分)(此题数学四考生不要求)

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) \leqslant 0$，

记 $F(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

证明在 (a,b) 内，$F'(x) \leqslant 0$.

十二、(本题满分 8 分)

已知函数 $y = \dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$，试求其单调区间，极值点，拐点.

单元测练一参考答案与解题分析

一、填空题

1. $\underline{2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi}$

【解析】$f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，则要求 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，由此即得答案.

【考点】函数的基本概念. 一般只见于填空、选择且难度不大.

2. $\underline{0}$

【解析】 由于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，x 为无穷小量，因此$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

【考点】极限求法. 出题频率非常高，必须熟练掌握.

3. $\underline{1}$，$\underline{-2}$

【解析】 当$\lim\limits_{x\to 1} x^2 + bx + c \neq 0$ 时，极限不存在，因此必须有$\lim\limits_{x\to 1} x^2 + bx + c = 1 + b + c = 0$，此时用洛必达法则求极限有$\lim\limits_{x\to 1}(2x + b) = 2 + b = 3$，可得 $b = 1$，$c = -2$.

【考点】用洛必达法则求极限.

4. $\underline{-\dfrac{1}{1+x^2}dx}$

【解析】$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1-x}{(1+x)^2}}{1 + \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$，从而得到 $dy = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

【考点】导数与微分的关系.

5. $\underline{2}$

【解析】$f_-'(1) = (x^2)'|_{x=1} = 2x|_{x=1} = 2$

$f_+'(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)' = \lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2.$

【考点】导数的定义. 主要考查对基本概念的理解.

二、选择题

1. B

【解析】只需将等式左、右端展开进行比较即可.

【考点】函数表示法.

2. D

【解析】当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$，即 $1 - \cos x$ 与$\sqrt{1-x^2} - 1$ 是与 x^2 同阶的无穷小量，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \tan x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \sec^2 x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x}{2} = 0$，所以 $x - \tan x$ 是比 x^2 更高阶的无穷小量.

【考点】无穷小量. 考试较少涉及. 但对常见的函数应知道其量阶.

3. B

【解析】令 $f(x) = x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c$

则 $f'(x) = 5x^4 + 6ax^2 + 3b$

若将 x^2 看成未知数，则 $f'(x)$ 的判别式

$\Delta = 36a^2 - 60b < 0$

故 $f'(x)$ 恒大于 0，即 $f(x)$ 是单调增函数

而 $x \to -\infty$ 时，$f(x) < 0$

$x \to +\infty$ 时，$f(x) > 0$

$\therefore$ 原方程只有唯一实根.

【考点】方程的根的个数的判断.若能联系函数的图像,则往往容易得出结果.

4. C

【解析】由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0$且$f(0)=0$,可知$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,即$f(x)$在$x=0$连续.

又由$\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=\begin{cases}\sqrt{-x}\sin\frac{1}{x^2}, x<0\\ \sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}, x>0.\end{cases}$

可知$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}\sin\frac{1}{x^2}$不存在,即$f(x)$在$x=0$处不可导,故选($C$).

【考点】连续与可导的概念,对这样的基本概念应了然于胸.

5. A

【解析】在等式两边求导得$f''(x)=2f(x)f'(x)=2[f(x)]^3$

再对上式求导$f^{(3)}(x)=6[f(x)]^2f'(x)=6[f(x)]^4$

此时已经可以判断应选(A).下面用数学归纳法证明:$n=3$时成立.设$n=k$时成立,即有

$f^{(k)}(x)=k![f(x)]^{k+1}$

对上式两边求导,即有

$f^{(k+1)}(x)=(k+1)![f(x)]^k\cdot f'(x)=(k+1)![f(x)]^{k+2}$

即$n=k+1$时也成立,故$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$.

【考点】高阶导数.只要求会做简单题目.

三、证明:若$a<1$,显然有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$,若$a>1$,则:

$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\cdots\frac{a}{n}<a^{[a]}\cdot\frac{a}{n}$

其中后一不等式成立是因为去掉了$\frac{a}{[a]+1},\cdots\cdots,\frac{a}{n-1}$这些小于1的项.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

【考点】极限求法.

四、(1) 解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}(e^{-\sqrt{x}})'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}e^{-\sqrt{x}}\frac{-1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{(1-e^{-2\sqrt{x}})^x}}$

【考点】复合函数求导.对导数的求导方法应运用自如.每年关于导数的题分都较多,应重点掌握.

(2) 解 设$y=(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

两边取对数,则有$\ln y=\frac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}=2$$

故$\lim\limits_{x\to0}y=e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y}=e^2$

【考点】对数求导法.

(3) 解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}\frac{1}{2t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx}$

$$=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{2t^2}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

【考点】参数方程求导. 新大纲对此未做要求,但此类题目可加深考生对导数的理解.

(4) 解　　设 $2x = t$,则

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx = \int_0^2 \frac{t^2}{4} f''(t)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{8}\int_0^2 t^2 f''(t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 t^2 df'(t) = \frac{1}{8}[t^2 f'(t)|_0^2 - 2\int_0^2 tf'(t)dt]$$

$$= \frac{1}{8}[0 - 2\int_0^2 tdf(t)] = -\frac{1}{4}[tf(t)|_0^2 - \int_0^2 f(t)dt] = -\frac{1}{4}[1-1] = 0$$

【考点】分部积分法.

五、证明:

1° 当 $a = 0$ 时,$f(0) = 0$ 有 $f(a+b) = f(b) = f(a) + f(b)$

2° 当 $a > 0$ 时,在 $[0,a]$ 和 $[b,a+b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \dfrac{f(a)}{a}, \xi_1 \in (0,a)$,

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(a+b) - f(b)}{(a+b) - b} = \dfrac{f(a+b) - f(b)}{a}, \xi_2 \in (b, a+b)$

显然 $0 < \xi_1 < a \leqslant b < \xi_2 < a + b \leqslant c$. 因 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 上单调减少,故 $f'(\xi_2) \leqslant f'(\xi_1)$,从而有

$\dfrac{f(a+b) - f(b)}{a} \leqslant \dfrac{f(a)}{a}$.

因为 $a > 0$,所以有

$f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$

综合 1°,2°,当 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant a + b \leqslant c$ 时

$f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$ 总成立.

【考点】拉格朗日中值定理。中值定理常用来证明各种等式及不等式,几乎每年都有涉及到中值定理的题目,应注意掌握.

六、证明:设 $|\lim\limits_{x \to a^+} f(x)| = \dfrac{M_1}{2}$,由函数极限的定义,取定 $\varepsilon = M_1/2$,$\exists\ S > 0$(不妨设 $0 < \delta < b - a$),当 $0 < x - a < \delta$ 时有:

$|f(x) - \lim\limits_{x \to a^+} f(x)| < \dfrac{M_1}{2}$,

$\therefore |f(x)| \leqslant |\lim\limits_{x \to a^+} f(x)| + \dfrac{M_1}{2} = M_1$.　　(1)

又 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b]$ 上连续,故 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b]$ 上有界,即取 $\exists\ M_2 > 0, \forall\ x \in [a+\delta, b]$,有

$$|f(x)| \leqslant M_2 \tag{2}$$

取 $M = \max(M_1, M_2) > 0$,则由(1)、(2)两式,$\forall\ x \in (a,b]$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

故 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有界.

【考点】函数连续的概念.

七、解　　先求切线的斜率 $k = y'(0,0)$,为此由方程两边对 x 求导得

$$\cos y \cdot y' + e^y + xe^y y' = 0$$

解出

$$y' = -\frac{e^y}{\cos y + xe^y}$$

由于曲线在(0,0)点切线斜率为

$$k = y'\Big|_{(0,0)} = -\frac{e^y}{\cos y + xe^y}\Big|_{(0,0)} = -1$$

故切线方程为

$$y - 0 = -(x - 0)$$

即

$$y - x = 0$$

法线方程为

$$y - 0 = x - 0$$

即

$$y - x = 0$$

【考点】曲线切线法线求法.解这类题要求对导数的几何意义很清楚.

八、解 斜率 $k = y' = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$.

曲线与 x 轴的交点处：$y_0 = 0$，代入曲线方程 $0 = x - \frac{1}{x}$，解出 $x_1 = 1, x_2 = -1$，故曲线与 x 轴交点为(1,0)(−1,0).

在点(1,0)处，$k_1 = 2$，切线方程为 $y = 2(x-1)$，即

$$2x - y - 2 = 0$$

在点(−1,0)处，$k_2 = 2$，切线方程为 $y = 2(x+1)$，即

$$2x - y + 2 = 0$$

【考点】切线求法.

九、解 $f(x)$ 的分段表达式为 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \geqslant 0 \\ 2x^3, & x < 0 \end{cases}$

易求得 $f''_+(0) = f''_-(0) = 0$，且 $f''(x) = \begin{cases} 24x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 12x & x < 0 \end{cases}$

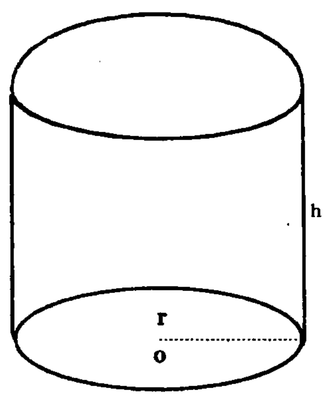
用定义可求得 $f^{(3)}_+(0) = 24, f^{(3)}_-(0) = 12$

因而 $f^{(3)}(0)$ 不存在，$f(x)$ 在 $x = 0$ 存在的最高阶导数为 $f''(0) = 0$

【考点】高阶导数.对考生这方面的要求不高.

十、解 设表面积为 A，则

$$\begin{cases} A = 2\pi r^2 + 2\pi rh, & ① \\ V = \pi r^2 h. & ② \end{cases}$$



由②解出 $h = \frac{V}{\pi r^2}$，代入①得函数：

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} (r > 0)$$

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{r^2}\left(r - \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)\left[r^2 + r\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}\right]$$

唯一极值嫌疑点为 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$（驻点）.

由此问题的实际意义知，这种表面积必有最小值，并且最小值就在此驻点处取得，故 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，此油罐的表面积最小(如图)

这时 $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，因此底直径与高的比为 $2r : h = 1 : 1$.

【考点】求极值.

十一、证明：由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，知 $F(x)$ 在 (a,b) 内可导

因此：$F'(x) = \frac{1}{x-a}f(x) - \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt$

$$= \frac{1}{x-a}\left[f(x) - \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\right]$$

由积分中值定理，知存在 $\varepsilon, a < \varepsilon < x$，

使 $f(\varepsilon) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，

所以 $F'(x) = \frac{1}{x-a}[f(x) - f(\xi)]$

又由于 $f'(x) \leqslant 0, x \in (a,b)$

知：$f(x)$ 在 (a,b) 内为减函数，因此当 $x > \xi$ 时，$f(x) \leqslant f(\xi)$ 又因 $\frac{1}{x-a} > 0$，故可知 $F'(x) \leqslant 0, x \in (a, b)$

【考点】 柯西中值定理.

十二、解 定义域为 $x \neq 1$，由

$y' = \frac{4x}{(1-x)^3}$；令 $y' = 0$，得 $x = 0$；

$y'' = \frac{8x+4}{(1-x)^4}$；令 $y'' = 0$，得 $x = -\frac{1}{2}$.

于是可列表讨论如下：

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$	/	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	/	$+$
y	↓	拐点	↓	极小值	↑	无定义	↓

由表可见

$x = 0$ 是函数的极小值点，极小值为 0；

点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ 是曲线的拐点；

区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 是函数的单调减区间；

区间 $(0,1)$ 是函数的单调增区间.

【考点】 函数的有关性质.

单元测练二

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=$ ________.

3. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geqslant0$, 则 $\varphi(x)=$ ________, 其定义域为________.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

5. $f(x)=x-\sqrt{x}$ 在[0,4]区间的最小值是________, 最大值是________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限存在且相等是在该点有极限的 ( )

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

2. 如果对于任意 $a>0$, ( )

(A) $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上无界,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$;

(B) $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上有界,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$;

(C) 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|<a$, 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=a$;

(D) 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|<a$, 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$;

3. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$, 则当 $\triangle x\to0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是 $\triangle x$ 的. ( )

(A) 等阶无穷小; (B) 同阶但不等阶的无穷小;

(C) 低阶无穷小; (D) 高阶无穷小

4. 已知 $f(x)=(x-a)g(x)$, $g(x)$ 连续但不可导,则 $f'(a)$ ( )

(A) 不存在 (B) 等于 0

(C) 等于 1 (D) 等于 $g(a)$

5. 设偶函数 $f(x)$ 有连续二阶导数,且 $f''(0)\neq0$, 则 $x=0$ ( )

(A) 不是 $f(x)$ 的驻点 (B) 一定是 $f(x)$ 的极值点

(C) 一定不是 $f(x)$ 的极值点 (D) 不能确定是否为 $f(x)$ 的极值点

三、(本题满分 6 分)

若对一切 n, $a_n<b_n$ 或 $a_n\leqslant b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 则有 $a\leqslant b$.

四、(本题满分 6 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

五、(本题满分 6 分)

已知 $e^y+xy=e$, 求 $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

六、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases}e^x+b, x\leqslant0\\ \sin ax, x>0,\end{cases}$ 确定 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

七、(本题满分 6 分)

求由方程 $\cos(xy)=x^2y^2$ 所确定的函数 y 的微分.

八、(本题满分 8 分)