流体有限元素法基础

沈慧俐 纪名刚 主编

西北工业大学出版社

流体有限元素法基础

沈慧俐　纪名刚　主编

西北工业大学出版社

内 容 提 要

本书共有十三章，第一章至第八章分别讨论了应用有限元素法所需要的数学基础知识和方法，包括矩阵和向量空间，变分原理，数值积分法，线性代数方程和非线性代数方程的数值解法以及非线性规划法。同时，在上册中也论述了元素和插值函数以及有限元方程的形成方法。第九章至第十三章主要讨论了有限元素法在气体流动中的应用，包括气体动力学的基本知识和基本方程、气体流动的有限元素法、边界元素法和最优控制有限元素法。在书末并附有一个算例的计算机程序。

本书可作为高等学校有关专业的高年级学生和研究生的教科书，也可作为水利、航空、宇航、气象、高能物理及生化等领域的科技人员的技术参考书。

主审稿人： 马铁犹
责任编辑： 周士林

流体有限元素法基础

沈慧俐　纪名刚　主编

责任编辑　周士林

西北工业大学出版社
西北工业大学出版社发行科发行
西北工业大学印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/16　印张 18.75　字数 469 千字
1985 年 4 月第一版　1985 年 4 月第一次印刷　印数 0001—1000 册
统一书号：15433·001　定价：1.94 元

序　　言

本书是编者以近年来为西北工业大学喷气发动机原理专业的研究生开设的“气体流动的有限元素法”课程的内容为基础而编写的。它比较系统地介绍了应用有限元素法分析气体流动的必要的基础知识和实际方法。

多年来，有限元素法在我国固体力学领域中已经得到了比较广泛的应用和推广。对我国科研和生产起了很大的推动作用，也出版了不少有关这方面的论著。但在流体力学领域中，系统地介绍有限元素法的应用的书籍却很少。然而大约从七十年代开始，有限元素法已经推广到流体力学。十几年来，已经由求解简单的线性问题发展到非线性问题。与这一领域有关的广大学生和科技人员，迫切需要这方面的知识，以便掌握和运用这一方法。在这种情况下，我们希望本书能在某种程度上满足广大读者的这一要求。

考虑到本书的对象将包括高等学校有关专业的高年级学生和工程技术人员，他们对这一方法可能并不很熟悉，因此，在编写过程中，力求深入浅出和便于自学。在内容上增加了必要的有关计算数学的知识和气体动力学的知识，这样，使那些对于这些内容比较生疏的读者在阅读全书时，不致发生很大的困难。书中附有算例和程序，使读者在学完本书后，能初步应用有限元素法求解气体流动问题。

近年来，在用有限元素法求解气体动力学问题上出现了一些新的解法。本书对此也作了简明的介绍。第十一章扫描有限元素法和时间相关扫描有限元素法是以1981年在第五届国际喷气发动机会议和1982年在第四届国际流体有限元会议上发表的两篇论文为基础改写的。第十二章边界元素法包括了杨祚生教授1982年发表于第四届国际流体有限元会议的研究成果。第十三章最优控制有限元素法是近年来发展的比较新的有效的解法，这种方法首先由法国R. Glowinski教授提出。

本书由西北工业大学沈慧俐、纪名刚主编，由陈辅群、邢宗文、杜声桐审校，全书并由潘锦珊同志进行复审。其中第1、3、4、5、11章由沈慧俐编写，第2、6、7章由纪名刚编写，第2章中的泛函分析部分由周肇锡编写，第8章由李楠编写，第9章由纪名刚、董秋庭编写，第10章由沈慧俐、邢宗文编写，第十三章由张仲寅编写，附录A由蔡元虎同志编写。

南京航空学院的杨祚生教授为本书编写了第十二章。北京航空学院马铁犹副教授与西安交通大学游兆泳教授对全书作了审阅，游兆泳教授并提供了求解非线性方程组的$n+1$点残量法的手稿。在这里，编者谨对他们的热心帮助和指导表示衷心的感谢。

最后，由于编者水平有限，书中有错误或不妥之处，请读者批评指正。

编　者

1983年7月于西北工业大学

目　　录

第一章 概 述

§1.1 有限元素法简介

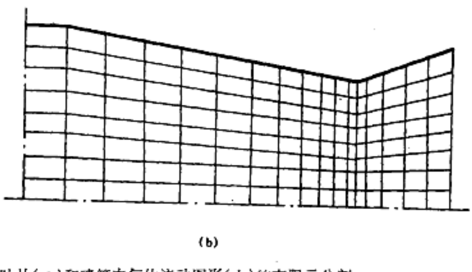
有限元素法是一种取得工程问题的近似解的数值计算方法。这种方法早期是由飞机结构的应力分析方法发展而来，目前已推广应用到宽广的连续体力学领域。作为一种分析工具，由于它的多样化和灵活性，所以得到了越来越广泛的应用和重视。

我们知道，今天对于工程中的许多问题，人们宁愿要近似的数值解而不去求精确的解析解。例如，对带加强筋和不规则应力集中孔的板的应力分布、不均匀大气条件下的污染物的散布或者通过一个任意形状通道中的流体的流量等这类问题，写出控制方程和边界条件也许不是太困难的，但是，简要的精确解却不易找到。求解这类问题的困难是由于它们的几何形状或者其他条件的任意性，简单的解析解很可能并不存在。但是，客观上又常常需要我们去寻找它们的答案。这时，人们通常采用两种办法，一种办法是作一些简化的假定使问题可以求解，但这样做有时是不行的，因为为了克服难点而进行简化常常与实际不符，导致结果不精确甚至是错误的。另一种办法是试图在一定程度上保留问题的复杂性而找出一个近似的数值解。由于大型电子计算机的出现，这种方法具有强大的生命力。

有多种近似的数值分析方法。有限元素法是近三十年发展起来的一种新的数值计算方法，它把求解区域划分为许多互相联结的子域（或元素）。子域的形状可根据不同的问题和求解的需要选用。由于元素组合是任意的，所以可以用它来表达相当复杂的形状。

为了说明有限元素法如何分割一个复杂的几何形状，这里举一个涡轮叶片的横截面图形和超音速喷管内气体的一种流动图形作为例子（图 1.1），问题可能是求给定载荷条件下的位移和应力分布，或是求在给定边界条件下的温度，压力和速度分布等等。从图中可以清楚看出，由三角形或四边形元素构成的有限元素模型，用较少的节点，就能较好的逼近边界。

(a)



(b)

图 1.1 涡轮叶片(a)和喷管内气体流动图形(b)的有限元分割

§1.2 有限元素法解题要点介绍

一、有限元素法解题过程

可用有限元素法求解的问题种类很多。对多元的连续体问题，求解域内的变量即所谓的场的变量（压力、温度、位移、应力或其他量）的值，是点的位置的函数，有无限多个。所以，这是一个求无限个未知量的问题。在用数值计算方法来求解这类问题时，需要把未知量的数目降为有限个，这就是离散化。当用有限元素法求解时，整个求解域划分为若干个元素，在每一个元素内选定几个特殊点(节点)，再取一些近似函数(或叫插值函数)，把整个元素的所有点的变量值用该点的坐标和该点上的变量值（待定）来表示。这样，每一个元素的未知数减少为该元素上有限个节点上的变量数，从而整个求解域的总未知量数也就为有限个了。

元素的节点一般位于边界且与相邻的元素共有，同时，一个元素也可以有少量的内节点。节点上的变量值以及元素的插值函数完全定义了一个元素内的变量场的特性。一个问题在建立有限元模型后，各元素的节点上的变量值组成了新的变量，一旦这些变量求出，通过插值函数可得到整个求解域的变量值。因此，有限元素法模型给出了控制方程的分片近似。

显然，解的性质与近似程度，不仅取决于元素的大小与个数，而且取决于所选的插值函数。应该指出，插值函数在选取时要满足一些相容性条件。一般选取的插值函数满足相邻元素边界之间的变量或其导数值连续。不同的插值函数用于构造不同效能的元素，详细情况将在下面另行讨论。

二、单个元素性质的形成

有限元素法的一个特点是它可以对每个元素建立一组表达该元素节点变量关系的方程式。例如，对于一个应力分析问题，可以先求出每个元素的节点的力——位移关系式（或称刚度特性），然后把各元素的关系式综合，得到整个结构的刚度特性。这就是说，一个复杂的问题分解为一系列大为简化的问题。

对每一个元素建立一组表达该元素节点变量关系的方程式，称为形成元素性质。形成元素性质的方法很多，基本上有以下四种：

直接法　来源于结构分析的直接刚度法。虽然只有相当简单的问题才能用直接法，但它有助于理解有限元素法的基本性质。

变分法　这种方法要利用变分原理，即求泛函的极值。对于固体力学，泛函将是位能，余位能或它们的导数。变分法使有限元素法超越了初级阶段，使可以求解的工程问题更为多样化。与直接法相比较，变分法可用于形状更为复杂的元素。

加权余量法　是一种应用范围更为宽广的方法，它完全由数学得出。因为加权余量法直接从基本方程出发，它不需要泛函或变分公式，所以它适合于那些不存在泛函或是尚未找到泛函的问题。

能量平衡法　类似于加权余量法，也不需要变分公式，因而扩大了解题范围。

三、解题步骤

不管用什么方法形成元素性质，用有限元素法解连续体问题总是按一定的步骤进行的。

为了总的说明如何用有限元素法解题，现将这些步骤一般的列出如下：

1．连续体离散化

第一步把连续体或求解域划分为元素。在图 1.1a 中，涡 轮 叶片被划分为三角形单元以求温度或应力分布。元素的形状种类很多，在一个问题中，也可以同时使用几种不同形状的元素。

2．选择插值函数

第二步是指定元素的节点并选择插值函数以表达元素内的场变量的变化规律。场变量可以是标量、向量或高阶张量。常常取多项式作为场变量的近似表达式，因为它便于积分和微分。多项式的阶数取决于元素的节点数、每一节点处未知数的数目和性质，以及对于节点上的和沿元素边界上的变量的连续性要求。场变量和场变量的导数都可以取作为节点的未知数。

3．形成元素的性质

当元素的节点和插值函数选定后，就要求出表达单个元素性质的矩阵方程。我们可以用前面说到的四种方法之一来完成此项工作。变分法常是最方便的。但究竟用哪一种方法，完全取决于问题的性质。

4．集合各元素性质以获得整个系统的方程

为了得到总系统的性质，必须集合所有元素的性质。换句话说，需要把所有表达元素性质的矩阵方程综合，形成表达整个求解域或系统的性质的矩阵方程。系统的矩阵方程具有与单个元素的方程同样的形式，只是包括更多的项，因为它包括了所有的节点。

集合过程的基础是，在联结各元素的节点上，场变量是同样的。

在整个系统方程获得以后，必须引入边界条件，这时需对方程作某些修改。

5．求解系统方程

前面说的集合过程给出一组同时求解的方程组，求解该方程组可以得出节点上的未知场变量。如果方程是线性的，可以用标准的解法。如果方程是非线性的，求解就比较困难。在后面的章节里将介绍一些有效的解法。

6．进一步的计算

有时我们可能要利用已求得的解，再计算一些另外的参数。例如，对一个流场解出压力分布后，还要计算流体边界上所受的合力等。

§1.3　有限元素法的应用范围

根据求解问题的性质，有限元素法的应用范围可以归纳为三个方面。第一方面称为平衡问题或时间独立问题，有限元素法大部分的应用属于这一类。例如，对于流体力学问题，就是求定常情况下的压力、速度和温度分布等。第二方面称为特征值问题。这类问题常要求确定固体或流体在稳定状态下的自然振动频率和振动模式。例如有关湖泊和堤坝的相互作用问题。另一类特征值问题是稳定性问题，例如层流的稳定性等。有限元素法应用的第三方面是传播问题或时间相关问题，这是上两类问题加上时间变量而形成的。例如计算非定常的流场问题。

第二章　矩阵、向量空间与泛函分析基础

矩阵是研究和求解线性方程组的一个有力工具，也是有限元素法必须用到的基本数学方法之一。本章首先介绍矩阵和向量空间的基本知识，然后介绍泛函分析。泛函分析是数学分析中最年轻的一支，它取得本质性的发展，只不过是本世纪内的事。目前，泛函分析已开始广泛地应用于各类应用学科中。这里，仅简单介绍泛函分析的某些基本方面，作为读者进一步深入研究的引导。

§2.1　矩阵概念

在用行列式解线性方程组时，我们看到，线性方程组的解完全由其系数和常数项决定。但是，如果未知数和方程的个数很多时，用行列式提供的计算公式是很烦的。若能对方程组的求解过程提出一个清晰的计算公式，问题就能大大简化。

一个矩阵是一组按一定次序排列的数或函数（加一个括弧）。一般包括有 $m\times n$ 个，排列成 m 行 n 列，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

这时，我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶，当 $\boldsymbol{A}$ 只有一行 $(m=1)$ 或一列 $(n=1)$ 时，也称 $\boldsymbol{A}$ 为矢量，在本章中矩阵用黑体字表示，而且当它们不是矢量时用大写，是矢量时用大写或小写。

如下列矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5.3 \\ 3 & 2.1 & 6 \end{bmatrix},\ [6.1\quad 2.2\quad 3] \tag{2.2}$$

其中第一个与第三个分别为列矢量与行矢量，为了与一般矩阵记号〔 〕相区别，以后列矢量也用记号 { }，行矢量用记号 $\{\ \}^T$ 或 $\lfloor\ \rfloor$ 表示，即有$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$，$\lfloor 6.1\quad 2.2\quad 3\rfloor$。

在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个数或函数称为矩阵的元素，它用两个下标表示所在的位置，如第 i 行 j 列的元素为 a_{ij}。对（2.1）式表示的矩阵来说，下标 i 由 1 到 m，j 由 1 到 n。如果有可能混淆时，在 i 和 j 之间要用逗号隔开如 $a_{i+r,j+s}$。

一般说，我们所以用矩阵是因为当对一个由若干数字组成的数组进行运算时，可以用一个简单的符号来代替它。这样，大块数字组之间的关系可以用很简洁、清楚的方式表达。另外，当这个关系式中包括有已知量和未知量时，还可以用某种规律性的步骤来解出未知量，这就是说，可以借助于电子计算机来进行矩阵运算。

§2.2 特殊矩阵

当矩阵的元素符合某些规律时，则为特殊矩阵。矩阵的元素可以是实数或复数，但我们这里仅限于讨论实数矩阵。

方阵和对称阵：当把 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列互相调换后，便得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置，记作 $\boldsymbol{A}^T$。若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$，这时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相等，而且矩阵元素 $a_{ij}=a_{ji}$。因为 $m=n$，故称 $\boldsymbol{A}$ 阵为 n 阶方阵，且因为 $a_{ij}=a_{ji}$，故称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，对称阵一定是方阵。但方阵不一定是对称阵。

单位阵：另一个特殊矩阵的例子是单位阵 $\boldsymbol{I}_n$，它是一个 n 阶方阵，除了主对角线上的元素为 1 外，其余的元素为零，例如，一个 3 阶的单位阵为

$$\boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\tag{2.3}$$

在实际计算中，下标 3 常常不写。另外，与单位阵类似的，我们定义了 n 阶单位矢，记为 e_i，下标 i 表示它是某一单位阵的第 i 列。

在有限元素法计算中，常常遇到具有一定带宽的对称矩阵。所谓具有一定带宽指的是离矩阵主对角线一定宽度以外的元素全部是零，因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，于是可表达为

$$a_{ij}=0,\qquad 对于\ j>i+m_A\tag{2.4}$$

以 $2m_A+1$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的带宽。例如，下面写出一个 5 阶的对称矩阵，其半带宽 m_A 是 2

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&1&0&0\\2&3&4&1&0\\1&4&5&6&1\\0&1&6&7&4\\0&0&1&4&3\end{bmatrix}\tag{2.5}$$

如果一个矩阵的半带宽是零，这时只有主对角线上的元素不为零，称为对角阵。例如，单位阵就是一个对角阵。

§2.3 矩阵的相等，相加与数乘

上面已经引入了矩阵的记号并定义了它的阶数。为了进行运算，必须进一步定义它的相等、相加、相减、相乘与相除的规则。在这里并不准备说明这些规则如何得来。不过，它们的合理性可以通过用矩阵求解实际问题来得到充分的说明。

定义： 满足下列两个条件的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 称之为相等，即

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行与列；

(2) 所有的对应元素全相等。

定义： 只有当两个矩阵的行数与列数都相等时，两个矩阵才能相加。所谓两矩阵的相加，就是两矩阵的所有对应元素相加。例如，当 a_{ij} 与 b_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 i 行 j 列元素，

则 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ 为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与列数当然和 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 的相同。

类似的，我们可以得到减法的定义。当一个矩阵减去它自身时，便得到一个全部是零元素的矩阵，称为零矩阵。

定义：当一个矩阵的所有元素都乘以某一数时，便称为该矩阵乘以某 数，亦即 $\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}$ 代表 $c_{ij}=ka_{ij}$

§2.4 矩 阵 的 乘 法

现在来定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘。若它的积是 $\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$

定义：只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 $p\times m$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数是 $m\times q$，它们的积为 $\boldsymbol{C}$，则

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{m}a_{ir}b_{rj} \tag{2.6}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的阶数为 $p\times q$，式(2.6)中的下标 i 由 $1\to p$，j 由 $1\to q$。

因此，为了计算 $\boldsymbol{C}$ 阵的元素 (c_{ij})，需要把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 j 列的元素对应相乘并相加。由于 $\boldsymbol{C}$ 阵是 $\boldsymbol{A}$ 阵的行与 $\boldsymbol{B}$ 阵的列相乘，故其阶数是 $p\times q$。

例：计算矩阵乘积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 2\\ 10 & 3 & 4\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

则有

$$c_{11}=5\times1+3\times2+1\times3=14$$

$$c_{21}=4\times1+6\times2+2\times3=22$$

$$c_{31}=10\times1+3\times2+4\times3=28 \text{ 等}$$

于是得

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}14 & 39\\ 22 & 48\\ 28 & 70\end{bmatrix}$$

很容易计算出，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的运算次数是 $p\times q\times m$。在实际运算时，由于零元素的存在，常常可把运算次数减少。

大家知道，数的乘法满足交换律，即 $ab=ba$。现在来看矩阵的乘法是否是这样，假如有矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{B}=[3\quad 4] \tag{2.7}$$

则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{BA}=[11] \tag{2.8}$$

因此，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不相等，也就是矩阵相乘不满足交换律。实际上，随着矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的阶数的不同，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的阶数也不一样，也可能 $\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 是无法计算的。

为了区别矩阵相乘时的先后次序，称乘积 $\boldsymbol{AB}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 前乘矩阵 $\boldsymbol{B}$，或矩阵 $\boldsymbol{B}$ 后乘矩阵 $\boldsymbol{A}$。虽然，一般说，$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$，但也有可能对某些特殊矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，存在 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，这时，我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为可交换。

虽然交换律对矩阵不适用，但分配律与集合律却都是对的。根据分配律

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC} \tag{2.9}$$

这就是说，我们可以先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加，再与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 相乘，也可以先分别以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 乘 $\boldsymbol{C}$，然后相加。不过，从运算次数来看，先相加再相乘的运算次数要少得多，因而计算时间也就少得多，这一点在编写计算程序时应特别予以注意。

分配律可以利用式（2.10）证明，即

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^{m} (a_{ir} + b_{ir})\, c_{rj} \tag{2.10}$$

可得

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}\, c_{rj} + \sum_{r=1}^{m} b_{ir}\, c_{rj} \tag{2.11}$$

根据集合律，有

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{ABC} \tag{2.12}$$

显然，乘法先后次序是无所谓的。因为根据（2.6）式的乘法定义，计算（2.12）式中的任一种表达式都得到同样的结果 $\boldsymbol{G}$。

由于存在集合律，对于一连串矩阵的相乘，就可以有几种不同的做法，巧妙的组合可以使运算次数大为减少。唯一应注意的是前后次序不能颠倒。

在矩阵运算中，除了不能使用交换律外，也不能把方程两边的同一个矩阵消去。例如，当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CB}$，并不一定有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$，这很容易证明，例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

但

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

不过，应该指出，如果方程 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CB}$ 对所有可能的 $\boldsymbol{B}$ 都成立，则有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$。因为，若 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，就有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$。

根据上面的理由，可以得出这样的结果，即当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$，它并不一定有 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 为零矩阵，下面的例子可以证明这一点：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

在矩阵乘法中使用转置阵必需注意，两个矩阵相乘后的转置等于两个矩阵转置后再相乘，但必须颠倒次序，即

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T \tag{2.16}$$

上式同样可以用乘法定义（2.6）式予以证明。

根据（2.16）式，可以得出，当 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵时，一般说，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 不对称。但是，当 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵时，乘积 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 必为对称，其证明如下

$$(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})^T=(\boldsymbol{AB})^T(\boldsymbol{B}^T)^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} \tag{2.17}$$

但，因为 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，故

$$(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB} \tag{2.18}$$

所以 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵。

§2.5 逆　　阵

从前面我们可以看到，矩阵的加法和减法的规则与一般数的加减法相同。然而，矩阵的乘法却与一般数的乘法有相当大的差异。至于矩阵的除法，严格讲它并不存在。于是，定义了一个逆阵来代替它。这里，我们只定义方阵的逆阵。

定义：一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示。如果逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是存在的，那么它的各元表将保证 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 以及 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$。一个矩阵如果逆阵存在，则称为非奇异矩阵，如果不存在逆阵，则称为奇异矩阵。

根据上面所讲可知，并不是每一个矩阵都存在逆阵。举一个明显的例子，如零矩阵就没有逆阵。另外，假如逆阵是存在的，下面我们还需要证明满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$ 是不是一回事。

若有两个逆阵 $\boldsymbol{A}_e^{-1}$ 和 $\boldsymbol{A}_r^{-1}$ 它们满足 $\boldsymbol{A}_e^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{AA}_r^{-1}=\boldsymbol{I}$，于是有

$$\boldsymbol{A}_e^{-1}=\boldsymbol{A}_e^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_r^{-1})=(\boldsymbol{A}_e^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}_r^{-1}=\boldsymbol{A}_r^{-1} \tag{2.19}$$

所以 $\boldsymbol{A}_e^{-1}=\boldsymbol{A}_r^{-1}$

为了计算乘积（$\boldsymbol{AB}$）的逆阵，现令 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{AB})^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是方阵，则

$$\boldsymbol{GAB}=\boldsymbol{I} \tag{2.20}$$

两边都后乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得到

$$\boldsymbol{GA}=\boldsymbol{B}^{-1} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{2.22}$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{2.23}$$

可以看出，乘积的求逆与转置一样，需颠倒次序。

对于阶数较低的矩阵，可以用试探法来找出它的逆阵。不过，我们需要一个一般的算法来求逆阵。其中一种方法是求解 n 组线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{I} \tag{2.24}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵，则有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

例如有线性方程组

$$\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{C} \tag{2.25}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 阶系数阵，$\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为 $n\times 1$ 阶列矢量，则有

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \tag{2.26}$$

可以用高斯消去法来求解方程组(2.25)。

§2.6 矩阵的分块

为了充分利用特殊矩阵的性质和简化矩阵的运算，常常将一个矩阵分成几个子矩阵（分块）。由只包含原矩阵中某些行、列上的元素所构成的矩阵称为原矩阵的子矩阵。例如在(2.27)式中用虚线将原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分为6个子矩阵。应注意的是，分隔必须是整行或整列的。

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{array}\right] \tag{2.27}$$

分块后的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix}$； $\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$； 等等 (2.29)

(2.28)式的右边，还可以再分块，例如

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|cc} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{array}\right] \tag{2.30}$$

故可把 $\boldsymbol{A}$ 写成

$$\boldsymbol{A}=\lfloor \bar{\boldsymbol{A}}_1\ \bar{\boldsymbol{A}}_2 \rfloor; \quad \bar{\boldsymbol{A}}_1=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} \\ \boldsymbol{A}_{21} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{A}}_2=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

把矩阵分块可以节省计算机内存。例如，当子矩阵有重复时，只需要存放一个。运算也是一样，对于同样的重复性的运算，只需要算一次，其他的则直接用已有的计算结果。

分块后矩阵的运算规则（加、减或乘）完全同前面所叙述的规则，运算时把子矩阵当作一个元素看待。因为矩阵分块的目的仅在于简化运算，所以这些结论是很容易证明的。

§2.7 矩阵的迹和行列式值

只有方阵才有迹和行列式值，这两者都只代表一个数，是由矩阵的元素运算而得。

定义：矩阵的迹记作 $t_r(\boldsymbol{A})$，它等于 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$，其中 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值可以根据它的子矩阵的行列式值来定义，而对于1阶矩阵，它只有一个元素 a_{11}，则其行列式值即等于 a_{11}。

定义：对于一个 $n\times n$ 阶的矩阵的行列式值记作 $\det\boldsymbol{A}$，它用以下递推关系式来计算，

$$\det\boldsymbol{A}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det\boldsymbol{A}_{1j} \tag{2.32}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{1j}$ 为 $(n-1)\times(n-1)$ 阶矩阵，它是从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去第一行以及第 j 列后得到的。实际上，计算不一定像（2.32）式所表示那样沿第一行进行，而是可以沿任何一行或一列进行。

很多定理都与行列式值的计算有关。例如，一组线性方程组的解可以通过一系列行列式值的计算而得出。不过，从现代的观点来看，很多问题用矩阵理论来求解比用求行列式更为有效，例如在求解线性方程组时就是如此。

一个矩阵如果是若干个矩阵的积，则它们的行列式值之间有下列关系：

$$\det(\boldsymbol{BC}\cdots\boldsymbol{F})=(\det\boldsymbol{B})(\det\boldsymbol{C})\cdots(\det\boldsymbol{F}) \tag{2.33}$$

公式（2.33）的证明十分繁琐，就不在这里做了。

矩阵的迹和行列式值是矩阵元素的函数，但是迹只受对角线元素的影响。如果一个矩阵的迹或行列式值很大，这就意味这个矩阵包含有值比较大的元素。但是，若迹或行列式值很小，不能得出结论说这个矩阵的所有元素值都很小。

§2.8 矩阵的微分与积分运算

一、微分运算

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素是 n 个独立变量 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 的函数，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为变量 x_1，x_2，$\cdots x_n$ 的矩阵函数。当矩阵的每一个元素的 n 阶导数都存在，则认为该矩阵的 n 阶导数存在。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的导数计算就是它的每一个元素的导数计算。例如，当求 $\partial\boldsymbol{A}/\partial x_k$ 时，就分别计算所有的 $\partial(a_{ij})/\partial x_k$。

二、积分运算

一个矩阵只有当它的所有元素的积分都存在时才能求它的积分，计算矩阵的积分 $\int\boldsymbol{A}\,dx_k$ 就是求它的每一个元素的积分，也就是分别计算所有的 $\int a_{ij}dx_k$。

§2.9 向量空间，子空间，矩阵的秩

前面已经指出，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一行或一列时也称为矢量或向量，例如对于三阶向量

$$\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} \tag{2.34}$$

代表三维空间内相对某一坐标系统的向量。

这个概念可以推广到 n 维，假定在 n 维空间，相对某一坐标系统有一组向量，于是有下列定义

定义：一组向量 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\cdots\boldsymbol{X}_n$，如果有一组不全为零的数 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 使

$$a_1\boldsymbol{X}_1+a_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{X}_n=0 \tag{2.35}$$

便称这组向量为线性相关。反之，则称为线性独立。

这就是说，一组线性独立的向量中的任一个向量，是不能够用其余向量的线性组合来代