

趣味数学精品译丛

写得如此迷人的数学读物是十分罕见的

绳长之谜

——隐藏在日常生活中的数学(续编)

出租汽车里的车费计是按什么标准收费的？

在按了电钮以后，电梯为何慢腾腾地迟迟不来？

在参加电视大赛“谁想成为百万富翁”时，最优策略是什么？

创作深孚众望的流行歌曲里面有没有数学道理？

一根绳子究竟有多长？

“罕见的”
“一本迷人的书”

——《新科学家》

罗勃·伊斯特威
杰里米·温德姆

著

谈祥柏
谈欣

译



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATION PUBLISHING HOUSE

趣味数学精品译丛

写得如此迷人的**数学**读物是十分罕见的

绳长之谜

——隐藏在日常生活中的数学(续编)

罗勃·伊斯特威 著
杰里米·温德姆

谈祥柏 译
谈欣



Bob Eastaway and Jeremy Wyndham

How long is a piece of String?

More hidden mathematics of everyday life

Copyright © 2002 Bob Eastaway and Jeremy Wyndham

First published in Great Britain in 2002 by Robson Books,

a member of Chrysalis Books Group PLC. The Chrysalis

Building, Bramley Road, London W10 6SP, UK

图书在版编目(CIP)数据

绳长之谜:隐藏在日常生活中的数学:续编 / (英)伊斯特威,
(英)温德姆著;谈详柏,谈欣译. —上海:上海教育出版社,
2011.5

(趣味数学精品译丛)

ISBN 978-7-5444-3090-6

I. ①绳... II. ①伊...②温...③谈...④谈... III. ①数学课—中学—
课外读物 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第025553号

趣味数学精品译丛

绳长之谜

隐藏在日常生活中的数学(续编)

罗勃·伊斯特威 杰里米·温德姆 著

谈详柏 谈欣 译

出版发行 上海世纪出版股份有限公司

上海教育出版社

易文网 www.ewen.cc

地址 上海永福路123号

邮编 200031

经销 各地新华书店

印刷 江苏启东人民印刷有限公司

开本 890×1240 1/32 印张 6.25 插页 1

版次 2011年5月第1版

印次 2011年5月第1次印刷

书号 ISBN 978-7-5444-3090-6/O·0139

定价 15.00元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

致 谢

创作这样一本书的乐趣部分来自同一些人士的交往,如果没有写作任务,笔者们也许永远不会遇上他们,这些人士中有德律克·史密斯,奥梯斯公司的开电梯老师傅,他善于协助我们揭开了电梯所遵循的一些神奇逻辑;另外还有勒顿大学的理查德·福赛斯,他是鉴定文稿著作权的专家;保林·麦金斯,伦敦运输管理局研究出租汽车收费的学者,知识极为渊博.以上各位都慨然伸出了帮助之手.

我们也获得了某些数学科普界朋友的无私帮助,时间与物质援助兼而有之: 这些人士的大名是: 苏萨克斯大学的约翰·赫亥,国际趣题大师大卫·辛马斯特^[1],神奇而诙谐的大卫·威尔士.另外也要感谢约翰·毕贝公司的支持,汤尼·皮尔顿以及趣味数学网页 NRICH 的教练团队等.

就书中所涉及的课题而言,从麻疹一直到音乐,我们十分感谢麦特·基林、克利斯·海利、理查德·哈利斯、西蒙·派丁逊、约翰·特莱温、隆尼·佩克特、汤尼·刘易士、凯思·斯蒂尔、内格尔·黎思、肯·培克、安德鲁·马斯拉夫、戈尔顿·文思、彼得·白克、阿伦·伊文思、拜利·莱文萨尔、克雷格·迪勃尔、科林·艾肯、杰姆·白蒂斯、保尔·米尔斯、梯姆·琼斯等人,感谢他们专业知识的大力支持.如果没有马丁·丹尼斯、大卫·罗吉逊、海伦·尼可尔、查斯·拜罗克、休·琼斯、夏绿蒂·霍华德、斯蒂文·拜斯基、路易茜·亨特、大卫·弗拉维尔等先生、女士的反馈材料,本书也不可能以最后所呈现的面貌来问世.书中最后仍有可能存在着若干瑕疵,那是由于作者们未能好好留意林肯指数(请参看书中正文第 140 页)所致.

[1] 他也是本书译者的好朋友.——译注

多才多艺的巴巴拉·肖尔女士善于将抽象概念转化为令人愉快的插图,本书中的插图再次显示了她的绝技。

最后,还得感谢杰里米、纳塔利、凯特与梅尔,他们允许我们将罗伯逊丛书推入正常的图书流通领域,也要感谢埃拉因与萨拉的始终如一的忠实支持。

引 言

设想你的学校课程表提供了下列选修课：

星期一：怎样避免受骗上当

星期二：动脑筋游戏

星期三：高薪工作须知

星期四：现实世界的模式

星期五：何时可以冒险

无疑你至少会选择其中的一种，甚至照单全收。你的课程表上所提供的选择不至于离开现实生活太遥远。难怪某些行政管理人员认为上述每个课题都是变相的数学。接着，他们把一些有趣的成分统统挤压出来，尽量把每个课题都搞得既抽象又死板，使它们远离现实生活。

这样做的结果只有为数极少的孩子茁壮成长，而绝大多数学生则埋头去做那些同他们无关且繁难的习题了。“先生，我们为什么要去学什么毕达哥拉斯定理？”“派金斯，你说话不要这样冒冒失失。”

幸运的是，时代不同了。如今，数学科普工作者们已经充分意识到，从干巴巴的理论开始，远不如从紧贴人们日常生活的实际例子开始，有很多数学是讲抽象概念的，但对大多数人来说，只有通过能为他们熟悉与理解的途径才能接受。

目前，由于各种原因，在某些西方社会有一种颇为时髦的说法，认为对数学发生兴趣的人是很“可悲”的。然而，如果拿出一个大家重视的课题，那么我们如想把它们彻底研究清楚，则又全将成为数学家。历史最有创造天才的一位人物，列昂纳多·达·芬奇对他所接触的每一个问题都提出了疑问，然后探索其答案。他是一位艺术家，但毋宁说是一位科学家，一位数学家。迄今为止，就我们所知，无人敢把他说成是个

微不足道的小人物(或者意大利语中与之相近的字眼)。

本书是我们所编写的、第二本讲日常生活中数学的科普读物。我们再次抓住了大家兴之所在的一些广泛课题。主要的取舍标准是公众喜欢的那些材料。书中的一些课题可能对熟悉该领域的读者已属司空见惯,然而还有一些内容——例如电梯、出租汽车收费、男人的小便池等趣话则在以往的出版物中几乎不曾见过。

同我们所写的另一本书《三车同到之谜》一样,你们将会发现,书中有些章节很好读,有些则需要更仔细地阅览。在书中,有些课题多次出现,例如概率、逻辑推理与模式等。如果把所有涉及的内容一个不漏地全部罗列出来,那么这样的教学大纲也许可以写成本与之结伴同行的书。总之,本书不是一本教科书,我们希望它读起来既令人愉快,又从容不迫。

目 录

致谢	III
引言	V
第 1 章 转眼又是星期一,何以如此之快?	
同月亮有关的一组数字怎样形成了我们的星期	1
第 2 章 骗子们怎会连连得手,越来越富?	
使被害人的钱财不翼而飞的一些阴谋诡计	12
第 3 章 曲调凭什么风行一时?	
人人喜欢的模式与变化	25
第 4 章 手提箱何以放不进行李舱?	
怎样才能多装东西或者把它们分得很开	34
第 5 章 我要给朋友打电话吗?	
怎样在电视大赛中作出重大决策	46
第 6 章 走楼梯是不是会更快些?	
怎样减少电梯的等候时间	62
第 7 章 一根绳子有多长?	
神奇的分形世界	73
第 8 章 为什么天气预报会出错?	
混沌与不可预知性	87
第 9 章 下一个冬天我会染上流感吗?	
流行病及其传播	97
第 10 章 我出门去,是否应该打的?	
漫话车费计背后的公式	108
第 11 章 我能遇上理想伴侣吗?	

	两性结合幕后的机遇与选择	119
第 12 章	它是假货吗?	
	数字测试能查出欺诈行为	130
第 13 章	黑马会爆出冷门吗?	
	难忘的决胜时刻后面的数学	141
第 14 章	卡拉 OK 的歌手们声音何以如此难听?	
	声波与分数如何产生了好听与难听的音阶	151
第 15 章	我凭什么来信以为真?	
	漫话事物的证明艺术	163
第 16 章	我能相信报纸上读到的资讯吗?	
	舆论导向专家怎样利用数目字变戏法	174
参考文献及进一步阅读材料		185
索引		187

第 1 章

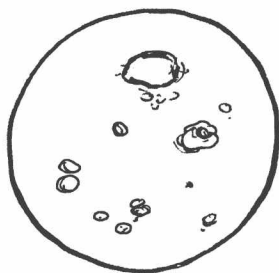
转眼又是星期一，何以如此之快？

同月亮有关的一组数字怎样形成了我们的星期

对一本讲日常生活中的数学书来说，从日子本身的数学，尤其是从星期一开始谈起，难道还有什么比这更好的办法吗？

七天一星期已经如此根深蒂固地植入我们的文明，以致很容易忘记“星期”的概念其实不过是一个人们用起来方便的发明。为什么我们不去真正爱上某些人所说的“一星期有八天”（引自歌词）？或者，就此而言，一星期十天？还有一点，工作日为何要从星期一开始？

事实上，正像处于现代文明核心的许多事物一样，七天一星期的来到人间，应当感谢迷信、巧合、人们所犯的错误、秩序的迫切需要……这样一些复杂因素的综合，当然也需要用到某些初等数学。以上这些事物不光是对一星期有七天要负责，它们还决定了西方历法中日子的先后顺序。为什么它们是星期一、星期二、星期三，而不是星期三、星期一、星期二那样的顺序，那是由数字的组合方式来决定



为了搞清楚现代星期概念的演化史,需要快速地审视某些历法知识,应该指出,历史学家们对此仍然存在着争议,并未取得完全共识。然而,与之有关的数学,则是正确无误的。

星期的概念究竟来自何方?对原始种族来说,没有什么星期的概念,主要因为他们没有这种需要。时间的决定性周期是“日”与“季”。因为人与动物一样,日子决定了觅食吃饭、睡觉等基本生活规律,季节则影响了狩猎、收获、应对气候变化等时间较长久的生活规律。

对不同季节能在事前预知并作出应对策略的种族肯定在生存与兴旺发达方面有着更好的机遇。即使只有最原始、最简陋的历法的种族,比那些根本没有这种工具的对手也占有明显的优势。

除了这种十分粗糙,但尚可勉强一用的温度、雨量等线索以外,古人怎么能知道正处于一年中的哪个时段呢?有证据表明,最早的历法奠基于天上最方便的时钟——月亮。

太阴历与 12 这个数目

除了太阳之外,月亮绝对是天上最明亮的物体。一夜又一夜,月相变化也显然可见,从满月慢慢变小,乃至蛾眉月……月黑之夜,最后由朔到望,重新变回月圆。

考古学家已发现了一些迹象,表明早在公元前 30 000 年左右,月相变化现象已受到人们密切关注。兽骨上的蚀刻画显示出各种月相,一些乱涂乱抹的图形记录了月亮圆、缺的日期。

月亮何以对原始人如此的重要?这是有不少原因的。从一个满月到下一个满月的周期几乎同妇女的排卵周期吻合。我们并不知道几千年之前家庭里有没有计划生育,但“月经”这个词来自月相周期,它至少对生育有所帮助。迄今在世界上许多地方依旧存在着拜祭月亮的宗教仪式,有可能起源于当时的“求子”活动。

月亮作为计时工具,何以具有如此吸引力?这当然还有别的原因。利用月相变化来对一年加以划分是很自然的方法,我们知道,一年大致有十二月,12 是一个很明显的除数(毫无疑问,“月份”(month)这个单词显然也是来自“月”(moon)这个单词)。

我们现在知道,确切地说,一年有 12.36 个月份,而 12 则是与之最接近的整数.但若把 12.36 削减到 12,舍入误差未免太大了一点,这就是从埃及人到朱利叶斯·恺撒^[1]等历法颁行者最感头痛的原因,这些人老是想把年和月统一起来,但总是

12

事与愿违.如果月亮在其绕地运行的轨道上稍微走得快一些,那么我们就有可能会实施一年有十三个月的历法,而数 13 将被人们视为幸运数了.可惜事情并非如此.

小测验:月亮究竟有多大?

把下面的圆形物体拿在手中,距你一臂之遥时,究竟哪一个看起来同月亮一样大小?

- (a) 一粒豌豆;
- (b) 一便士硬币;
- (c) 一只乒乓球;
- (d) 一只橙子(或柑橘).

正确答案竟然是(a),真是个小东西.在夜空中处于统治地位之物却是如此之小,委实令人惊讶.不过,由于人类大脑的作用,我们看它要大得多.

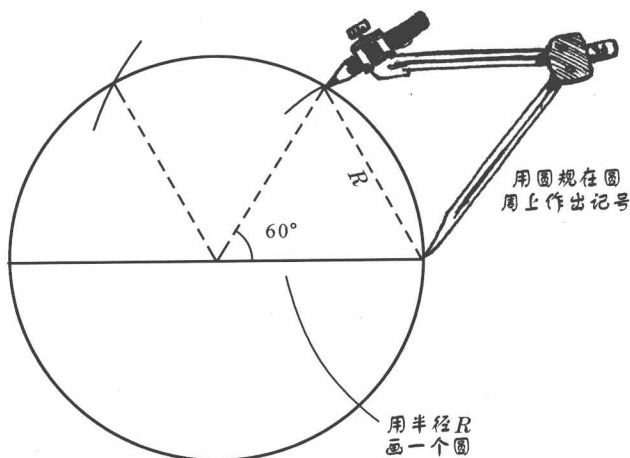
一年有十二个月这个基本事实,侥幸成为时间的量度单位,从而使埃及与希腊的早期文明把 12 这个数目铭刻在石碑上.

12 是一个便于使用的小数目,它还有着其他重要性质.其中之一是这个数目能被等分为两部分、三部分、四部分以至六部分,这使它成为计量与分配的一个重要度量.在英国,12 的这种可除性表现得尤为突出,不论是货币(1 先令=12 便士),还是长度(1 英尺=12 英寸)都一直维持到了 20 世纪的后期.

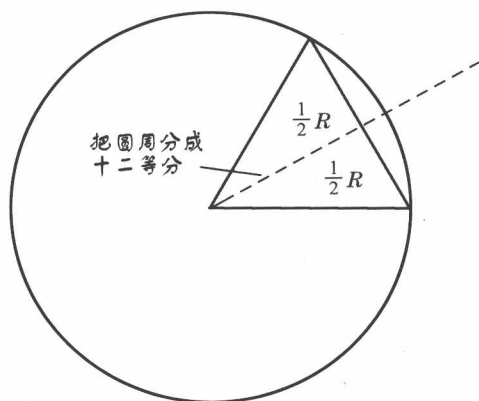
[1] 古罗马的一位大政治家,在历法、天文等领域通常译为“儒略”,科学名词译名的不统一,是屡见不鲜之事,我们对此只能采取“约定俗成”的办法.——译注

数 12 也同圆有联系,等分圆周的最简便方法之一就是利用一副圆规.

在圆周上作出记号,可将圆周等分为六份



一旦得出了圆周长的六分之一,那就不难将它再分成两半:



这意味着,圆可以极容易地分成 12 份,于是,把天空分成 12 份,并相应地用记号表示,即有名的黄道十二宫,后来,又将钟面分成了十二个小时.

12: 一个富裕数

一切整数都有着因子——也就是,比原数小且能把它除尽的整数(1当然也算). 数 12 的因子为 6、4、3、2、1, 它们的和为 16. 如果一个数的所有因子相加以后的总和大于该数本身, 那么它称为“富裕数”, 而 12 就是这类数目中最小的一个. 实际上, 富裕数是极为常见的. 数学家们一般都喜欢碰硬的, 因而他们通常不去考虑一个自然数究竟是不是富裕数, 而是要计算它究竟富裕到何种程度, 例如, 12 的富裕度是 $\frac{16}{12}$, 即 1.33. 它的富裕度比不上 24 ($\frac{36}{24} = 1.5$), 每加上 12 的一个倍数, 富裕度就随之递增. 数 60 的所有因子之和等于 108, 而 $\frac{108}{60}$ 的富裕度为 1.8, 得分之高, 值得欢呼了. 我们说, 60 这个数目是高度富裕的, 它的因子很多, 难怪它要成为一种进位的基数了(60 进位制). 看来, 只要把数搞得越来越大, 富裕度并不封顶, 它是不存在上界的.

富裕度究竟重要不重要呢? 除了拓广视野, 丰富与充实数的理解之外, 别的用途就谈不上. 但是古希腊人, 尤其是毕达哥拉斯及其亲密战友们一贯寻找证据来支持他们的观点, 即数控制着整个宇宙. 数的任何一项微不足道的性质都被赋予了某种重要意义, 现在当然认为是说过了头.

月亮、行星与 7 这个数目

每天夜里, 人们熟悉的月亮在闪烁的群星背景下横穿天穹. 从最早的年代起, 人们观察到这些群星本身也是在慢慢转动的, 它们的旋转如同太阳一样, 正好需要一天. 不过, 也存在着一些例外情况. 某些亮星与别的星不一样, 有着不同的运行速度, 偶尔甚至会围绕着自身转圈子.

一群为数不多的天体以其独特的周期引人注意. 它们就是所谓的“漫游者”, 希腊名词叫行星. 由于这些行星有着各自的运动方式, 自然需要加以命名. 在罗马人统治时期, 它们就都有了专名, 相当于如今英语中的月亮、太阳、木星、土星、金星、火星和水星.

人们相信行星有七个, 几乎肯定是由于这种信仰, 而使 7 这个数目有了某种神秘的意义. 同 12 一样, 7 在历法中的重要性来自另一种巧

合现象. 它同月相有联系, 从月圆到没有月亮^[1], 大约有 14 天——7 的 2 倍, 而从满月到下一个满月则刚好比 29 天稍微多一点. 29 同 28(7 的 4 倍) 相差不大. 另外, 28 在数学上有它的重要性, 请看方框中的一段说明文字.

28: 一个完全数

28 的因子为 1、2、4、7、14, 而这些数目之和正好等于 28 本身. 希腊人注意到了这种巧合现象, 把具有此种性质的一类数目称为“完全数”. 或许你会认为, 所谓“完全”, 不过是随便叫叫的.

完全数是稀有之物. 希腊人只发现了四个: 6、28、496 与 8 128, 迄今为止, 就我们所知, 他们未能发现其他完全数, 这是不足为奇的, 因为下面一个最小的完全数将是 33 550 336. 人们相信, 一切完全数都以 6 或 8 结尾, 但现在还不知道完全数是否有无穷多个.

有奇妙性质的数必然有着某种神秘意义, 这种信仰有助于将这些神秘数字视为文化的一部分. 完全数 28 与富裕数 12 可以说是这种看法的两个主要受益者.

7 在天空中的第二次出现自然是一种巧合, 月相变化周期的日数同七个行星其实是毫无关系的, 但是人们有一种自然倾向, 总是喜欢在巧合中看出“意义”, 因此早期文明相信 7 同天上的事情有着本质联系, 这一点不足为奇. 为了方便, 也为了奉行宗教仪式, 于是月相变化周期就被一分为四, 而每一阶段定为 7 天.



[1] 中国的说法是从“望”至“晦”。——译注

佛罗伦萨^[1]人把一星期定为 8 天

在中世纪的佛罗伦萨，人们相信一星期（我们只好勉强使用一下这个字眼）有 8 天。佛罗伦萨的教堂前面有一座八边形建筑，名叫浸礼堂。建筑物的形状具有某种重要意义。七条边表示尘世工作的七日，而第八条边（永恒日）则表示我们死后住在天堂（或其他地方^[2]）的日子。

构筑一座八边形的建筑物，自然要比造七边形的建筑物容易得多。因而佛罗伦萨人 8 天的信条使建筑师们避开了很头痛的设计问题。

按照《圣经》的说法，在混沌之初，上帝用七天时间创造了地球。对 7 来说，其神秘意义是否即从此而来？还是编故事的那些人特意挑选了一个他们认为很有意义的数目，此数既能表示行星的个数，又能近似地等分一个月？然而此事无关紧要。事实上，上述故事牢固地树立了犹太文化中七天为一星期的概念，第七天就是休息日，称为“安息日”。犹太人把这种概念传播到中东，而罗马人沿袭了这种说法，尽管后者在其本土上早已有了出处不明、与市场有关的八天为一周的说法。

把小时与行星联系起来

我们已经发现，12 与 7 这两个数目怎样不谋而合地对时间的量度起了至关重要的作用，12 是由于它能整除一年与整除一天，而 7 则是因为它能整除一个月^[3]。现代的星期概念已初具雏型，由于这两个神秘数目之间的进一步联系，终于使一周中“星期几”的名称也得已确定下来。

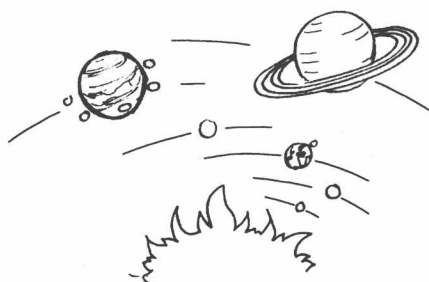
在天文史上早已知晓，各颗行星在其轨道上绕行一周，回到其出发位置（一个“行星年”），所需要的时间大不相同。它们之间有一个高下等级，处于最高地位的是土星，运行周期最长，整个等级如下页图所示：

[1] 意大利的重要城市，在北部波河流域。——译注

[2] 指高山绝顶、海底龙宫、地狱、外星球等不是天堂的地方，升天享福或者永堕沉沦，这当然是古人的迷信。——译注

[3] 所谓整除，当然是极为粗略的近似说法。——译注

土星 (29 年)
木星 (12 年)
火星 (687 天)
太阳 (365 天)
金星 (225 天)
水星 (88 天)
月亮 (28 天)



现在你也许会想,既然有了七颗行星与七天,那么依次给一周中的星期一、星期二、……来命名,自然是非常简单与合乎逻辑的一步了,按照上面所说的等级,先后顺序应该是:土曜日、木曜日、火曜日……然而不知何故,由于占星学家们突然来了一个脑筋急转弯,事情却不是如此。

埃及人是首先把白天分为十二小时的民族,后来,到了公元前 1 000 年左右,巴比伦人又将一天一夜分为 24 小时。但他们并未按照行星等级给曜日排定先后顺序,倒是对小时排了序。第一小时指派给等级最高的行星——土星,第二小时给了第二等级的行星——木星,第三小时给了名列第三的火星,这样依次类推,直到 24 小时统统用完,七大行星也轮转了好几圈,然后继续进行到后一天。结果如下表所示(由一个纵列从上往下看,然后再继续进行到下一列):

小 时	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天	第八天
1	土星	太阳	月亮	火星	水星	木星	金星	土星
2	木星	金星	土星	太阳	月亮	火星	水星	木星
3	火星	水星	木星	金星	土星	太阳	月亮	火星
4	太阳	月亮	火星	水星	木星	金星	土星	太阳
5	金星	土星	太阳	月亮	火星	水星	木星	金星
6	水星	木星	金星	土星	太阳	月亮	火星	水星
7	月亮							
8	土星							
9	木星	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	火星	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮							
22	土星	太阳	月亮	火星	水星	木星	金星	土星
23	木星	金星	土星	太阳	月亮	火星	水星	木星
24	火星	水星	木星	金星	土星	太阳	月亮	火星