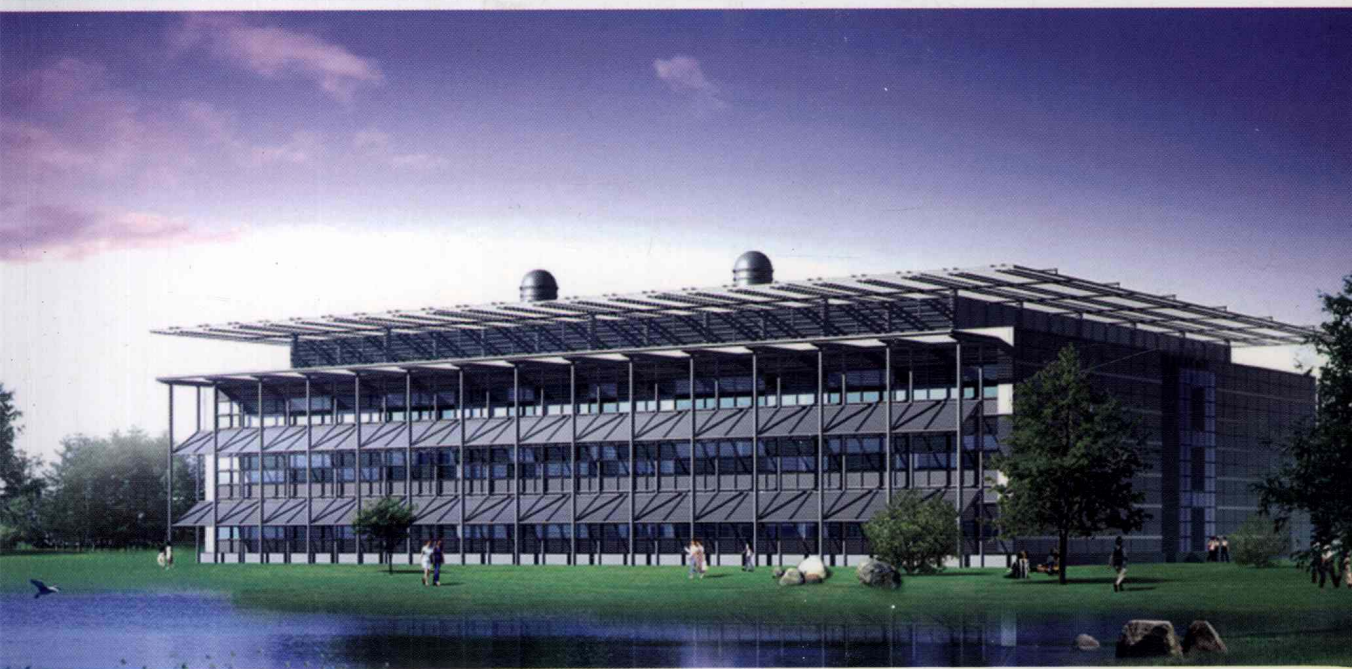


交通版

高等学校土木工程专业规划教材

JIAOTONGBAN GAODENG XUEXIAO TUMU GONGCHENG ZHUANYE GUIHUA JIAOCAI



结构力学

(下册)

林继德 段敬民 甘亚南 主编
王立忠 主审



人民交通出版社

China Communications Press

交通版 高等学校土木工程专业规划教材
JIAOTONGBAN GAODENG XUEXIAO TUMU GONGCHENG ZHUANYE GUIHUA JIAOCAI

结构力学 (下册)

Jiegou Lixue

林继德 段敬民 甘亚南 主编
王立忠 主审



人民交通出版社
China Communications Press

内 容 提 要

本书是交通版高等学校土木工程专业规划教材之一,是按照教育部力学课程教学指导委员会拟定的《结构力学教学基本要求》编写的。

全书共十三章,分上、下两册。上册共九章,内容包括:第一章绪论;第二章平面体系的几何组成分析;第三章静定梁、静定平面刚架和三铰拱;第四章静定桁架和组合结构;第五章虚功原理和结构的位移计算;第六章力法;第七章位移法;第八章力矩分配法;第九章结构在移动荷载下的计算。下册共四章,内容包括:第十章矩阵位移法;第十一章结构的动力计算;第十二章梁和刚架的极限荷载;第十三章结构的稳定问题。每章均有思考题、习题及习题答案。

本书为土木工程专业,即“大土木”的房建、路桥、水利等各类专门化方向的教材,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学.下册/林继德 等主编. —北京:人民
交通出版社,2010.6

ISBN 978-7-114-08482-9

I. ①结… II. ①林… III. ①土木结构—结构力学—
高等学校—教材 IV. ①TU311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 105383 号

交通版高等学校土木工程专业规划教材

书 名: 结构力学(下册)

著 作 者: 林继德 段敬民 甘亚南

责任编辑: 张征宇 赵瑞琴

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010)59757969,59757973

总 经 销: 人民交通出版社发行部

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京交通印务实业公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 13.5

字 数: 328 千

版 次: 2010 年 7 月 第 1 版

印 次: 2010 年 7 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-08482-9

定 价: 26.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

交通版

高等学校土木工程专业规划教材

编委会

主任委员：阎兴华

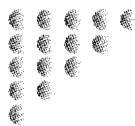
副主任委员：张向东 李帼昌 魏连雨 赵 尘

宗 兰 马芹永 段敬民 黄炳生

委 员：彭大文 林继德 张俊平 刘春原

党星海 刘正保 刘华新 丁海平

秘 书 长：张征宇



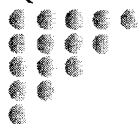
随着科学技术的迅猛发展、全球经济一体化趋势的进一步加强以及国力竞争的日趋激烈,作为实施“科教兴国”战略重要战线的高等学校,面临着新的机遇与挑战。高等教育战线按照“巩固、深化、提高、发展”的方针,着力提高高等教育的水平 and 质量,取得了举世瞩目的成就,实现了改革和发展的历史性跨越。

在这个前所未有的发展时期,高等学校的土木类教材建设也取得了很大成绩,出版了许多优秀教材,但在满足不同层次的院校和不同层次的学生需求方面,还存在较大的差距,部分教材尚未能反映最新颁布的规范内容。为了配合高等学校的教学改革和教材建设,体现高等学校在教材建设上的特色和优势,满足高校及社会对土木类专业教材的多层次要求,适应我国国民经济建设的最新形势,人民交通出版社组织了全国二十余所高等学校编写“交通版高等学校土木工程专业规划教材”,并于2004年9月在重庆召开了第一次编写工作会议,确定了教材编写的总体思路;于2004年11月在北京召开了第二次编写工作会议,全面审定了各门教材的编写大纲。在编者和出版社的共同努力下,目前这套规划教材已陆续出版。

这套教材包括“土木工程概论”、“建筑工程施工”等31门课程,涵盖了土木工程专业的专业基础课和专业课的主要系列课程。这套教材的编写原则是“厚基础、重能力、求创新,以培养应用型人才为主”,强调结合新规范、增大例题、图解等内容的比例并适当反映本学科领域的新发展,力求通俗易懂、图文并茂。其中,对专业基础课要求理论体系完整、严密、适度,兼顾各专业方向,应达到教育部和专业教学指导委员会的规定要求;对专业课要体现出“重应用”及“加强创新能力和工程素质培养”的特色,保证知识体系的完整性、准确性、正确性和适应性。专业课教材原则上按课群组划分不同专业方向分别考虑,不在一本教材中体现多专业内容。

反映土木工程领域的最新技术发展、符合我国国情、与现有教材相比具有明显特色是这套教材所力求达到的,在各相关院校及所有编审人员的共同努力下,交通版高等学校土木工程专业规划教材必将对我国高等学校土木工程专业建设起到重要的促进作用。

交通版高等学校土木工程专业规划教材编审委员会
人民交通出版社



本书是根据高等学校学科建设发展的需要,由人民交通出版社组织河北建筑工程学院、天津城市建设学院、北京建筑工程学院、河南理工大学、南阳理工学院、华北水利水电学院、西南交通大学,按照土木工程专业的培养目标和教学大纲,本着“厚基础、重能力、求创新、以培养应用型人才为主”的总体思想,结合编者多年的教学经验编写而成的。

本书以结构力学基本概念、基本原理及科学运算为主线,以学生素质能力为目标,准确把握结构力学教学基本要求。本书体现了概念结构力学的基本思想,并加强了结构电算的内容。在教材组织上力求使教师易教、学生易学,为此与其他同类教材相比增加了一定数量的例题和习题,并在各章后加入思考题,以活跃思维、启发思考,提高对问题本质的认识。此外对某些非重点内容也是通过思考题和习题引导学生自己思考、掌握,而不是不分主次地对所有内容全面铺叙,这样更有利于抓重点,精讲多练,启发学生独立思考。全书始终注重分析问题和解决问题能力的培养。本书除作为土木工程专业的教材外,也可作为土木工程专业的工程技术及科研人员的参考书。

本书由林继澍、段敬民、甘亚南主编,由王立忠主审。各章编写分工如下:第一、六章由林继澍编写;第二章由段敬民编写;第三章由毕全超编写;第四章由朱守芹编写;第五章由魏俊亚编写;第七章由甘亚南编写;第八章由杨庆年编写;第九章由张方、周万俊编写;第十章由崔恩第编写;第十一章由符怡编写;第十二章由林松编写;第十三章由张方、周森编写;全书由林继澍修改、统稿。在编写过程中,得到了许多同行的大力帮助,在此深表谢意。

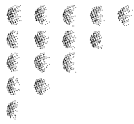
对审稿人王立忠的精心审阅和指导深表谢意。

由于水平有限,对本书中存在的不足之处敬请读者不吝赐教。

编者

2010年6月

目录 MULU



第十章 矩阵位移法..... 1



第一节 概述..... 1

第二节 单元分析..... 2

第三节 连续梁的整体刚度矩阵 10

第四节 刚架的整体刚度矩阵 18

第五节 等效结点荷载 26

第六节 计算步骤及举例 29

第七节 连续梁程序的框图设计和源程序 38

第八节 平面刚架程序的框图设计和源程序 47

思考题 71

习题 71

习题答案 74

第十一章 结构的动力计算 76



第一节 动力计算概述 76

第二节 单自由度体系的自由振动 79

第三节 单自由度体系的强迫振动 90

第四节 多自由度体系的自由振动..... 101

第五节 多自由度体系主振型的正交性..... 119

第六节 多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动..... 121

第七节 多自由度体系在任意荷载作用下的强迫振动及振型叠加法..... 128

第八节 考虑阻尼时多自由度体系的强迫振动..... 134

第九节 无限自由度体系的自由振动..... 139

第十节 能量法计算自振频率..... 142

思考题..... 146

习题..... 147

习题答案..... 152

第十二章 梁和刚架的极限荷载..... 155

 ||

 第一节 概述..... 155

 第二节 极限弯矩、塑性铰和破坏机构 156

 第三节 确定极限荷载的几个定理..... 160

 第四节 确定极限荷载的方法——超静定梁的极限荷载..... 161

 第五节 平面刚架的极限荷载..... 165

 思考题..... 171

 习题..... 171

 习题答案..... 173

第十三章 结构的稳定问题..... 175

 ||

 第一节 稳定的概念及两类稳定问题..... 175

 第二节 确定临界荷载的静力准则及静力法..... 178

 第三节 用初参数法建立稳定方程..... 183

 第四节 确定临界荷载的能量准则及能量法..... 187

 第五节 剪力对临界荷载的影响..... 193

 第六节 组合压杆的稳定..... 195

 第七节 用矩阵位移法计算刚架的临界荷载..... 198

 思考题..... 203

 习题..... 203

 习题答案..... 204

参考文献..... 205

第十章 矩阵位移法

DISHIZHANG



第一节 概 述

力法、位移法和渐近法是建立在手算基础上的结构分析方法。当实际结构的形状和所受荷载比较复杂时,用传统的手算方法对其进行计算,工作量是相当大的,有时甚至不能求解。随着现代电子计算机的广泛应用,结构分析的计算方法也得到空前的发展,有限元法就是伴随着电子计算机技术的进步而发展起来的一种新兴数值分析方法。应用有限元法对杆件结构或连续体进行分析时都要借助矩阵。矩阵表达式简洁、紧凑,便于编制计算机程序,适宜在高速数字计算机进行自动化运算。

传统位移法和矩阵位移法基本原理是相同的,只是后者在表达形式上采用了矩阵形式。矩阵方法用于分析杆件结构时,通常称为结构矩阵分析方法;用于分析连续体时,称为有限单元法。结构矩阵分析法就是有限单元法在杆件结构分析中的应用。

结构矩阵分析方法的基本思路是将结构看成是由有限个单元组成的整体,以单元结点的位移或结点力作为基本未知量求解。其解题过程可以概括为:“一分一合”。所谓“分”就是将结构离散为单元。通过单元分析,根据物理条件确定单元杆端力与杆端位移之间的关系式,即“单元刚度方程”。所谓“合”就是根据位移条件确定结点位移和杆端位移之间的关系,以及根据平衡条件确定结点力与杆端力之间的关系,将已经离散的单元再组合为原结构。这样,通过“一分一合”或“拆了再搭”的过程,建立结点力与结点位移之间的关系式,即整个结构的刚度方程。最后,解算刚度方程,完成结构计算。

与传统的力法、位移法和混合法相对应,结构矩阵分析方法依所选未知量不同,也可分为矩阵力法、矩阵位移法和混合法。当以结构的多余约束力为基本未知量时,称为矩阵力法,亦称柔度法;当以结构的结点位移为基本未知量时,称为矩阵位移法,亦称刚度度法;当以结构中部分多余约束力及部分结点位移为基本未知量时,则称为混合法。在杆件结构矩阵分析中,混合法很少采用。矩阵力法用于分析超静定结构时,由于基本体系和多余约束力未知量的选取不是唯一的,因此它不适合编制计算机通用程序。而矩阵位移法的基本体系和结点位移未知量的选择一般来说是唯一的,这一点为编制计算机通用程序提供了便利,因而矩阵位移法得到

了广泛的应用。矩阵位移法又有刚度法和直接刚度法之分。二者的基本原理无本质区别,只是在形成整体刚度矩阵时,使用的方法不同。相比较来说,直接刚度法要简便得多,因而得到广泛的应用。本书只介绍矩阵位移法中的直接刚度法。

在电子计算机得到广泛应用之前,结构分析靠“手算”完成。由于计算工具以计算尺、手摇计算器为主,因此,为了避免大量繁杂、重复的运算,设计人员在计算技巧方面做了许多研究工作。随着计算机技术的发展,将矩阵简洁、明快的数学表达形式与高速、准确运算的电子计算机结合在一起,形成了现代结构分析的“电算”。电算适合于系统化、模式化的计算过程。它要求数据结构简明、规范,大量的、重复性地计算并不会增加难度,但计算时头绪杂乱,则会给编制电算程序带来困难。这就是人们常说的“手算怕繁,电算怕乱”的道理。

本章在介绍矩阵位移法的同时,用手算计算了少量简单的问题,以利于读者了解结构矩阵分析的原理和过程,为编制结构计算程序做了简单的铺垫。计算结果可作为检验程序正确性的依据。

第二节 单元分析

一、单元的内力和变形

1. 单元的划分

整个结构可视为有限个单元的集合体。对杆件结构而言,每一根直杆都可以划分为一个或几个单元。单元与单元相连接的点称为结点。换言之,单元与单元之间是用结点连接在一起的。对于图 10-1a) 所示的刚架,其单元和结点的划分如图 10-1b) 所示。图中 1、3、4、6、7、8 结点称为构造结点。构造结点包括杆件的汇交点、转折点、支承点和截面的突变点,它是由结构本身构造的特征决定的。而 2、5 结点称为非构造结点,它不是由结构本身构造的特征决定的。之所以将单元上集中荷载作用点作为结点处理,是为了保证结构只承受结点荷载作用。关于单元上承受非结点荷载的另一种处理方法是把它改用等效的结点荷载来代替。对于图 10-1b) 所示单元⑦的情况,只能将均布荷载改用等效的结点荷载来代替。

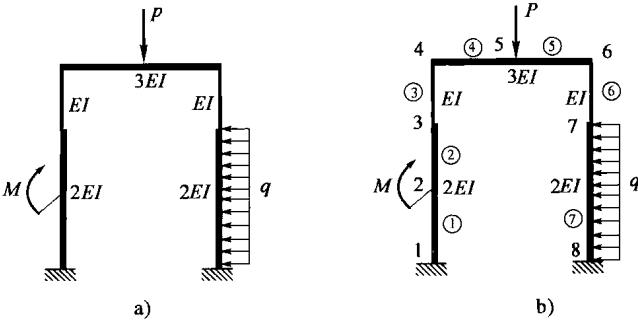


图 10-1 单元和结点的划分

a) 门式刚架; b) 结点、单元编号情况

对杆件结构而言,由于单元受力情况不同,一般可分为刚架单元(一般单元)、桁架单元和梁单元。分析刚架单元时应同时考虑弯矩、剪力和轴力的作用,对桁架单元一般只考虑轴力的影响,而梁单元一般同时考虑弯矩和剪力的影响。当所研究的结构为空间刚架时,除考虑弯矩、剪力和轴力的作用外,还应考虑扭矩的作用。

2. 单元的内力

对杆件结构而言,每一单元都是一根直杆。直杆两端的内力称为单元的杆端力。当单元的杆端力确定后,则可以求出单元任意截面上的内力。所以,单元的杆端力是单元内力的代表。

建立一个坐标系来描述单元的内力。这种专属于某一个单元的坐标系称为局部坐标系,

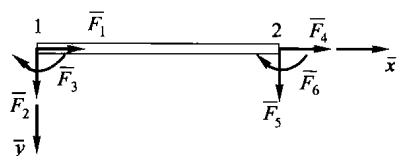


图 10-2 局部坐标系下的单元杆端力

用 $Oxyz$ 表示。设单元的编号为 e , 单元的始端记为 1、末端记为 2, 称为局部号。杆轴与 $\bar{x}$ 轴重合, 截面的两个主轴分别与 $\bar{y}$ 轴、 $\bar{z}$ 轴重合。对平面结构, 单元杆端力为图 10-2 所示的杆端力方向均为正。在这种情况下, 杆端力与杆的内力是一致的, 它们分别对应 1、2 点的轴力、剪力和弯矩。

$$\bar{F}^{\text{e}} = [\bar{F}_1 : \bar{F}_2]^{eT} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3 : \bar{F}_4 \quad \bar{F}_5 \quad \bar{F}_6]^{eT} \quad (10-1)$$

$$\bar{F}^{\text{e}} = [\bar{F}_1 : \bar{F}_2]^{eT} = [N_1 \quad Q_1 \quad M_1 : N_2 \quad Q_2 \quad M_2]^{eT} \quad (10-2)$$

3. 单元的变形

当荷载作用在结构上时,组成结构的单元将发生变形,单元的两端将发生位移。该位移称为杆端位移。我们用杆端位移来表示单元的变形。

单元 $\textcircled{e}$ 的杆端位移可表示为

$$\bar{\delta}^{\text{e}} = [\bar{\delta}_1 : \bar{\delta}_2]^{eT} = [\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3 : \bar{\delta}_4 \quad \bar{\delta}_5 \quad \bar{\delta}_6]^{eT} \quad (10-3)$$

二、单元刚度矩阵和单元刚度方程

单元分析的目的在于得出单元刚度方程和单元刚度矩阵。单元刚度方程是单元的杆端力与杆端位移之间的关系式,而单元的刚度矩阵是单元的杆端位移与杆端力之间的变换矩阵。由于在一般杆件结构中,各单元的方向不尽相同。因此,必然会有若干杆件的局部坐标系与整体坐标系不一致。对于这些杆件单元,我们先要在局部坐标系下进行分析,建立单元刚度方程和刚度矩阵,而后再通过坐标变换,将它们转换为相应于整体坐标系的刚度方程和刚度矩阵。

为了分析问题方便,我们做如下规定:

(1) 以直杆单元的轴线为局部坐标系的 $\bar{x}$ 轴,在单元轴线上划一箭头表示 $\bar{x}$ 轴的正方向,即由单元的始端指向单元的末端的方向。

(2) 一律采用右手直角坐标系。由 x 轴与 $\bar{x}$ 轴的正方向按顺时针方向转 90° 为 y 与 $\bar{y}$ 轴的正方向。一切与转动有关的量,如角位移、弯矩、力偶等,均以顺时针为正;一切与平动有关的量,如线位移、剪力、轴力、集中荷载、分布荷载等,以与坐标轴正向一致时为正。

(3) 表示局部坐标系中各量值的文字符号,均在其上面加一横线;不加横线的表示整体坐标系下的量。

1. 一般单元

如果把所有的杆端力都作为计算对象,对单元不考虑任何约束,即相当于单元可以在平面内任意运动而不受任何约束,这样的单元称为一般单元。一般单元也称为刚架单元或自由式单元。

设单元 $\textcircled{e}$ 的弹性模量、截面惯性矩、横截面积分别为 E 、 I 、 A , 杆长为 l , 局部坐标系杆端力及杆端位移的正方向则如图 10-3 所示。

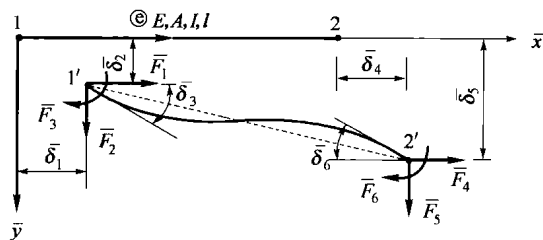


图 10-3 一般单元位移图

因为我们所讨论的问题局限于线性变形体系的范围,故不考虑轴向力、轴向变形与弯曲内力与弯曲变形的相互影响问题。它们可分别考虑再予以组合。

根据转角位移方程,可分别求出当 $\delta^{\textcircled{e}}$ 中一个分量等于1,而其余分量均为零时的单元杆端力,如图10-4所示。各图中未绘出的杆端位移分量和杆端力分量在该情况下其数值为零。

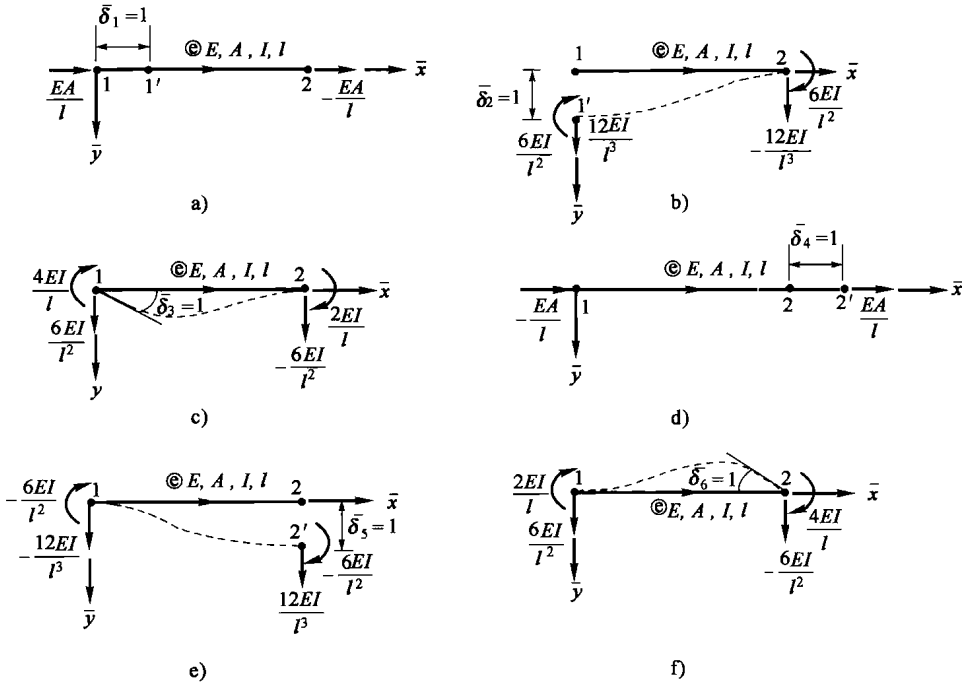


图10-4 仅一个位移分量等于1时的杆端力

a) $\bar{\delta}_1 = 1$; b) $\bar{\delta}_2 = 1$; c) $\bar{\delta}_3 = 1$; d) $\bar{\delta}_4 = 1$; e) $\bar{\delta}_5 = 1$; f) $\bar{\delta}_6 = 1$

如图10-4所示,仅一个位移分量等于1时的杆端力称为刚度系数。当杆端位移分量等于任意值时,可以以刚度系数为基础进行叠加,进而求出杆端力的各分量。单元的杆端力与杆端位移之间的关系式称为单元刚度方程,以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \dots \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \\ \bar{\delta}_5 \\ \bar{\delta}_6 \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} \quad (10-4)$$

可简写为

$$\bar{\mathbf{F}}^{\textcircled{e}} = \bar{\mathbf{k}}^{\textcircled{e}} \bar{\boldsymbol{\delta}}^{\textcircled{e}} \quad (10-5)$$

其中

$$\bar{k}^{\odot} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix}^{\odot} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{array} \right]^{\odot} \quad (10-6)$$

称为单元刚度矩阵。它具有如下性质：

(1) 单元刚度矩阵 $\bar{k}^{\odot}$ 中的每个元素代表单位杆端位移引起的杆端力。例如元素 $\bar{k}_{ij}$ 的物理意义是第 j 个位移分量等于 1、其余位移分量为零时，所引起的第 i 个杆端力分量的值。 $\bar{k}^{\odot}$ 中第 j 列元素表示第 j 个杆端位移分量为 1、其余位移分量为零时，所引起的各杆端力分量值；第 i 行元素表示各个杆端位移分量均等于 1 时，所引起的第 i 个杆端力分量值。

(2) 单元刚度矩阵 $\bar{k}^{\odot}$ 为对称矩阵，其元素 $\bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ji} (i \neq j)$ 。

(3) 单元刚度矩阵 $\bar{k}^{\odot}$ 为奇异矩阵，其元素行列式等于零。由 $\bar{k}^{\odot}$ 的奇异性可知， $\bar{k}^{\odot}$ 的逆矩阵不存在。也就是说，如果给定杆端位移 $\bar{\delta}^{\odot}$ ，可由刚度方程 $\bar{F}^{\odot} = \bar{k}^{\odot} \bar{\delta}^{\odot}$ 求出杆端力的唯一解；但反过来，当杆端力 $\bar{F}^{\odot}$ 已知时，则不存在 $\bar{\delta}^{\odot} = (\bar{k}^{\odot})^{-1} \bar{F}^{\odot}$ 这样的关系式，因此无法求出杆端位移的唯一解。

(4) $\bar{k}^{\odot}$ 具有分块性质。

2. 轴力单元

只需考虑轴向杆端位移和轴向杆端力的单元，称为轴力单元。桁架中的杆单元就是轴力单元。在轴力单元中，杆端力与杆端位移的关系[如图 10-4a)、图 10-4d)] 为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix}^{\odot} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^{\odot} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{bmatrix}^{\odot} \quad (10-7)$$

式(10-7)是在局部坐标系下轴力单元的刚度方程，式中刚度矩阵为 2×2 阶方阵。一般情况下，单元的局部坐标系与结构的整体坐标系不都是相同的，因此需要进行坐标变换。为了便于坐标变换，将式(10-7)写成

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \end{bmatrix}^{\odot} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\odot} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \end{bmatrix}^{\odot} \quad (10-8)$$

式中刚度矩阵为

$$k^{\odot} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\odot} \quad (10-9)$$

显然,轴力单元的刚度矩阵 4×4 阶对称方阵,也是奇异矩阵。

式(10-7)中的轴力单元刚度矩阵可由一般单元刚度矩阵,即式(10-6)删去 2、3、5、6 行和列的元素得到。

3. 梁单元

对于只考虑结点弯矩与结点转角的梁单元刚度矩阵,也可以由一般单元刚度矩阵删去第 1、2、4、5 行和第 1、2、4、5 列的元素得到。

$$\bar{k}^{\odot} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^{\odot} \quad (10-10)$$

由以上分析可以看出,梁单元和轴力单元是一般单元的特殊情况。用这种删去单元两端并不存在或不考虑的位移所对应的行和列的方法,还可以得到其他形式的特殊单元。

例 10-1 试建立同时考虑杆端弯矩与杆端剪力的梁单元刚度矩阵。该梁 E 、 A 、 I 、 l 为已知常数。

解

该单元局部坐标系下的单元杆端力如图 10-5 所示,局部坐标系下的杆端位移 $\bar{\delta}_1$ 、 $\bar{\delta}_2$ 、 $\bar{\delta}_3$ 、 $\bar{\delta}_4$ 与杆端力一一对应,在图中没有绘出。

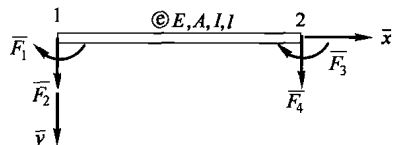


图 10-5 局部坐标系下的单元杆端力

根据转角位移方程,可确定各刚度系数(仅一个位移分量等于 1 时的杆端力),进而建立局部坐标系下的单元刚度矩阵[式(10-11)]。该单元刚度矩阵也可由一般单元刚度矩阵删去第 1、4 行和第 1、4 列的元素得到。

$$\bar{k}^{\odot} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^{\odot} \quad (10-11)$$

三、坐标变换、整体坐标系下的单元刚度矩阵

在进行整体分析时,需要考虑结点的平衡条件和位移连续条件,同时还要将各单元刚度矩阵组集成整体刚度矩阵。由于各单元局部坐标系不尽相同,因而在电算中就难以做到自动化地处理各种数据,无法完成上述工作,因此必须建立一个各单元共同参照的坐标系 xOy ,这就是整体坐标系,亦称公共坐标系。

图 10-6 所示为一般单元 $\textcircled{e}$, 其中 $\bar{x}O\bar{y}$ 为局部坐标系, xOy 为整体坐标系。单元 $\textcircled{e}$ 在整体坐标系和局部坐标系中的杆端力列阵分别为

$$F^{\textcircled{e}} = [F_1 : F_2]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} = [F_1 F_2 F_3 : F_4 F_5 F_6]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} \quad (10-12)$$

$$\bar{F}^{\textcircled{e}} = [\bar{F}_1 : \bar{F}_2]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} = [\bar{F}_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 : \bar{F}_4 \bar{F}_5 \bar{F}_6]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} \quad (10-13)$$

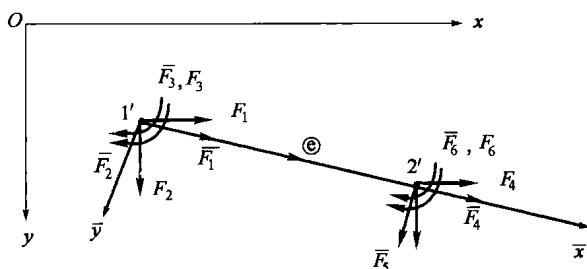


图 10-6 两种坐标系中的杆端力

而杆端位移列阵(与杆端力一一对应, 图中没有绘出)分别为

$$\delta^{\textcircled{e}} = [\delta_1 : \delta_2]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} = [\delta_1 \delta_2 \delta_3 : \delta_4 \delta_5 \delta_6]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} \quad (10-14)$$

$$\bar{\delta}^{\textcircled{e}} = [\bar{\delta}_1 : \bar{\delta}_2]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} = [\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \bar{\delta}_3 : \bar{\delta}_4 \bar{\delta}_5 \bar{\delta}_6]_{\textcircled{e}}^{\text{T}} \quad (10-15)$$

为了导出单元 $\textcircled{e}$ 1 端在整体坐标系中杆端力 F_1, F_2, F_3 与局部坐标系中杆端力 $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ 之间的关系, 将 F_1, F_2 分别向 $\bar{x}, \bar{y}$ 轴上投影, 可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 &= F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \alpha \\ \bar{F}_2 &= -F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (10-16)$$

式中, α 表示由 x 轴转到 $\bar{x}$ 轴之间的夹角, 以顺时针为正。

在两个坐标系中, 力偶分量不变, 即

$$\bar{F}_3 = F_3 \quad (10-17)$$

同理, 对于单元 $\textcircled{e}$ 2 端在整体坐标系中杆端力 F_4, F_5, F_6 与局部坐标系中杆端力 $\bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6$ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_4 &= F_4 \cos \alpha + F_5 \sin \alpha \\ \bar{F}_5 &= -F_4 \sin \alpha + F_5 \cos \alpha \\ \bar{F}_6 &= F_6 \end{aligned} \right\} \quad (10-18)$$

将式(10-16)、式(10-17)、式(10-18)合并起来, 并用矩阵表示, 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \dots \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \end{bmatrix}_{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\textcircled{e}} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}_{\textcircled{e}} \quad (10-19)$$

此式即为两种坐标系中单元杆端力的变换式。该式可简写为

$$\bar{F}^{\textcircled{e}} = \lambda^{\textcircled{e}} F^{\textcircled{e}} \quad (10-20)$$

式中:

$$\lambda^{\odot} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\odot} \quad (10-21)$$

称为一般单元坐标变换矩阵。该矩阵为正交矩阵,其逆矩阵等于其转置矩阵,即

$$\lambda^{\odot^{-1}} = \lambda^{\odot^T} \quad (10-22)$$

显然,式(10-19)杆端力之间的这种变换关系,同样也适用于杆端位移之间的变换,即

$$\bar{\delta}^{\odot} = \lambda^{\odot} \delta^{\odot} \quad (10-23)$$

将式(10-20)及式(10-23)代入式(10-5)

$$\lambda^{\odot} F^{\odot} = \bar{k}^{\odot} \lambda^{\odot} \delta^{\odot}$$

等号两边同时左乘 $\lambda^{\odot^{-1}}$, 并利用式(10-22), 可得

$$F^{\odot} = \lambda^{\odot^{-1}} \bar{k}^{\odot} \lambda^{\odot} \delta^{\odot} = \lambda^{\odot^T} \bar{k}^{\odot} \lambda^{\odot} \delta^{\odot} \quad (10-24)$$

令

$$k = \lambda^{\odot^T} \bar{k}^{\odot} \lambda^{\odot} \quad (10-25)$$

则得整体坐标系中的单元刚度矩阵

$$F^{\odot} = k^{\odot} \delta^{\odot} \quad (10-26)$$

式(10-26)称为整体坐标系中的单元刚度矩阵;而式(10-25)称为两种坐标系中单元刚度矩阵的变换公式,利用该式可求得整体坐标系中的单元刚度矩阵 $k^{\odot}$ 。

$k^{\odot}$ 写成展开形式为

$$k^{\odot} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & -S_3 & -S_1 & -S_2 & -S_1 \\ & S_4 & S_5 & -S_2 & -S_4 & S_5 \\ & & 2S_6 & S_3 & -S_5 & S_6 \\ \hline & & & S_1 & S_2 & S_3 \\ & \text{对 称} & & & S_4 & -S_5 \\ & & & & & 2S_6 \end{bmatrix}^{\odot} \quad (10-27)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \\ S_2 &= \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ S_3 &= \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \\ S_4 &= \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \\ S_5 &= \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \\ S_6 &= \frac{2EI}{l} \end{aligned} \right\} \quad (10-28)$$

以上推导方法和步骤完全适合于轴力单元。由于轴力单元不需要考虑杆端角位移和杆端弯矩,所以杆端力列阵和杆端位移列阵均为4元素列阵,因而相应的轴力单元坐标变换矩阵为4阶方阵

$$\lambda^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} \quad (10-29)$$

该矩阵仍为正交矩阵。它也可以由式(10-21)删去第3、6行与第3、6列得到。

式(10-20)、式(10-22)~式(10-26)这些关系式对轴力单元仍然成立。在整体坐标系中,轴力单元的单元刚度矩阵为

$$k^{\textcircled{e}} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}^{\textcircled{e}} \quad (10-30)$$

例 10-2 已知一般杆件单元整体坐标系下的单元刚度矩阵 $k^{\textcircled{e}}$,试推导局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{k}^{\textcircled{e}}$ 的表达式。

解

整体坐标系下的单元刚度矩阵 $k^{\textcircled{e}}$ 由下式决定

$$k = \lambda^{\textcircled{e}\text{T}} \bar{k}^{\textcircled{e}} \lambda^{\textcircled{e}}$$

上式两侧同时左乘 $\lambda^{\textcircled{e}}$ 、右乘 $\lambda^{\textcircled{e}-1}$,同时考虑到 $\lambda^{\textcircled{e}-1} = \lambda^{\textcircled{e}\text{T}}$,于是可得局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{k}^{\textcircled{e}}$ 的表达式如下

$$\bar{k}^{\textcircled{e}} = \lambda k^{\textcircled{e}} \lambda^{\textcircled{e}\text{T}}$$

例 10-3 试求图 10-7a) 所示刚架单元①和单元②的局部坐标系下的单元刚度矩阵和整体坐标系下的单元刚度矩阵。已知 $E = 30\text{MPa}$, $A = 0.18\text{m}^2$, $I = 5.4 \times 10^{-3}\text{m}^4$, $l_{AB} = 3\text{m}$, $l_{BC} = 4\text{m}$ 。

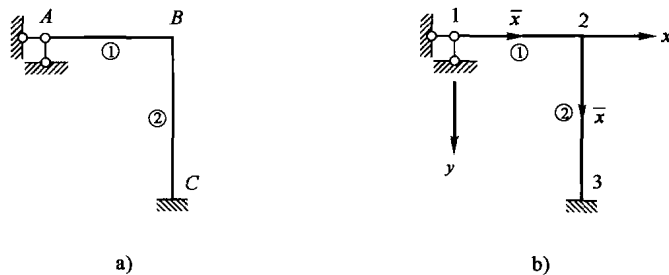


图 10-7 例 10-3 图

a) 原结构; b) 坐标系及单元、结点编号

解

(1) 计算各单元局部坐标系下的单元刚度矩阵。

单元①: 将 $E = 30\text{MPa}$, $A = 0.18\text{m}^2$, $I = 5.4 \times 10^{-3}\text{m}^4$, $l_{AB} = 3\text{m}$ 代入式(10-6)得