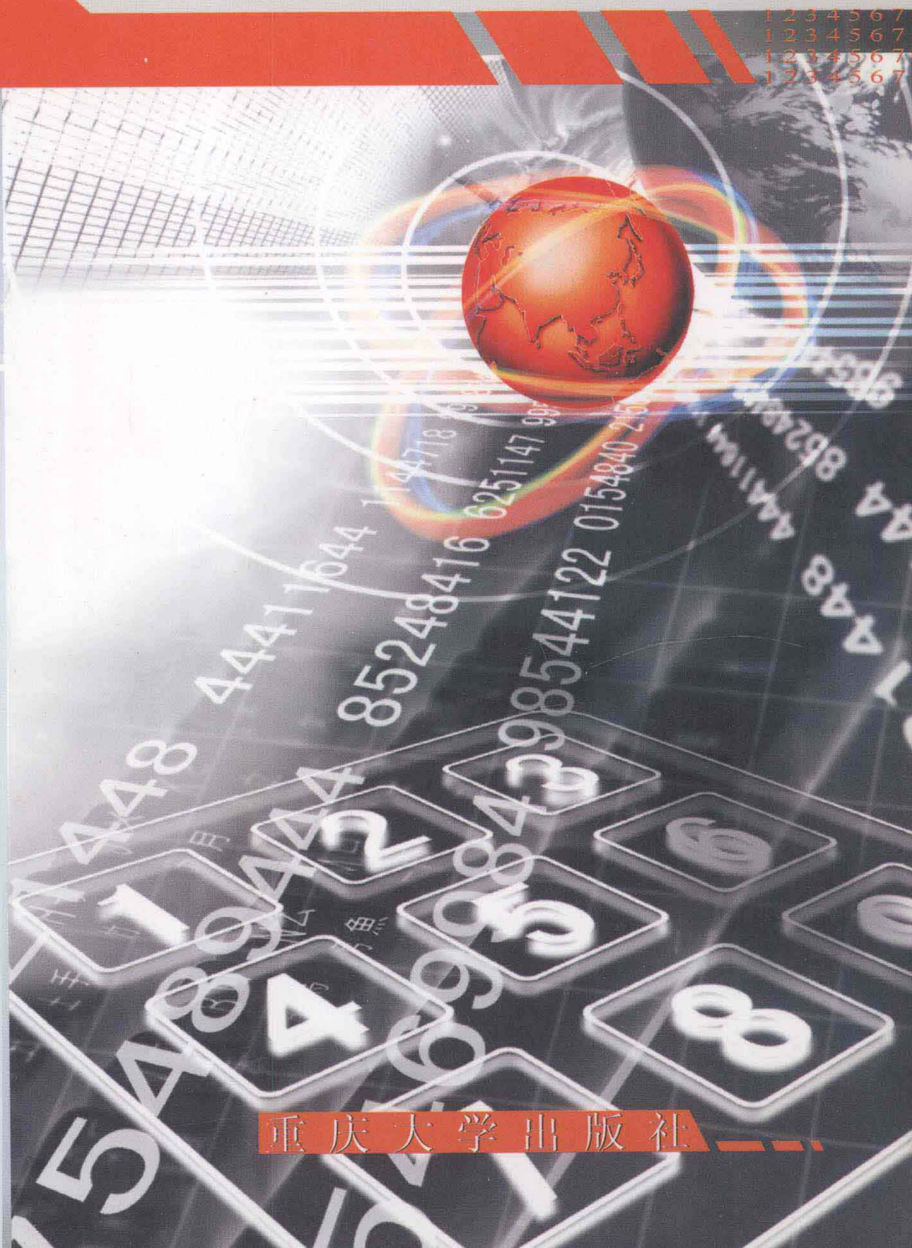
高职高专基础课教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

郑志荣　彭国良　编著



重庆大学出版社

高等数学

郑志荣　彭国良　编著

重庆大学出版社

内容简介

本书以职业教育为主导，体现职业技术教育的特点，在内容和选材上把握高职教育"必需、够用"的原则，力求做到简明易懂。全书共分 11 章，包括函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、空间解析几何、多元函数的微分、多元函数的积分、级数和常微分方程。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/郑志荣等编著. —重庆：重庆大学出版社，2005.8

ISBN 7-5624-3445-X

Ⅰ.高… Ⅱ.郑… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 091560 号

高等数学

郑志荣 彭国良 编著

责任编辑：周 立 版式设计：周 立

责任校对：任卓惠 责任印制：秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学（A 区）内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）

全国新华书店经销

重庆科情印务有限公司印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：18.5 字数：462 千

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—4 000

ISBN 7-5624-3445-X 定价：25.00 元

前言

我国的高等教育体制改革正在不断深化，职业教育已成为教育体系的一个重要支柱。2002年国务院召开全国职业教育工作会议，颁发了《关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，对职业教育工作做出了全面部署。几年来，职业教育发展势头良好，职业教育的路子越走越宽，正迎来深化改革、加快发展的大好机遇。

高等职业教育强调理论与实践的紧密结合，重点培养学生的动手能力，理论教育主要以应用为目的，以“必需、够用”为度。在这一思想的指导下，我们编写了这一教材。可作为职业技术院校、各类成人院校和民办院校的教学用书或参考读物。

本书共11章，包括函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、空间解析几何、多元函数的微分、多元函数的积分、级数和常微分方程。全书供一学年使用，也可根据不同的教学要求选学部分内容。

南昌大学的万绍文教授为本书审稿并提出修改意见。在编写过程中，得到邱映辉教授的大力支持，也得到有关院校领导和同志的关心和支持，在此一并表示衷心感谢！

由于时间和水平所限，本书难免存在缺点与不足之处，欢迎读者批评指正。

编者

2005年5月

目录

第1章 函数

函数是数学中的主要研究对象。这一章内容主要介绍函数的概念和一些基本性质。由于对函数研究离不开实数,因此对于实数的有关知识做一些必要的介绍。为了以后的叙述方便,本章中还介绍一些数学中常用的符号。

1.1 函数的概念

1.1.1 常用符号与集合

由一些可识别的个体组成的全体,就称为一个集合。集合 S 中每个个体称为集合 S 的一个元素。如果 x 是集合 S 的一个元素,记为 $x \in S$,读作"x 属于 S",如果 x 不是集合 S 的一个元素,记为 $x \notin S$,读作"x 不属于 S"。

另外还有一个常用有关集合的符号"$\exists$"。设 S 是一个数集,表达式"$\exists x \in S$"表示"在集合 S 中存在一个元素 x",读为"存在 x 属于 S"。

没有任何元素的集合是一种特殊的集合,这个集合被称为空集,记为 ϕ。

例 1.1.1 ①设 S 是由所有偶数组成的集合,则 $2 \in S$,而 $3 \notin S$。

②设 A 是由方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根组成的集合,则 $2 \in A$,$4 \notin A$。

③设 A 是由方程 $x^5 - 5x + 6 = 0$ 的根组成的集合,这个集合究竟有几个元素,还不清楚,但可以断定,方程至少有一个根,因此,可以说"$\exists x \in A$"。

④A 是由方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根组成的集合,则在实数范围内方程是无根的,因此 A 是一个空集,所以 $A = \phi$。

集合的表示方法一般有两种:列举法和描述法。

列举法:顾名思义,列举法就是将集合的元素都列举出来。设集合 S 的所有元素可排成一列为:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

则 S 可记为 $S = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$。

例 1.1.2 ①S 是由 10 以内的非负偶数组成的集合,可记为 $S = \{0,2,4,6,8,10\}$;

②有时集合元素的个数虽然不是有限的，但可将所有的元素按一定的顺序排列出来，则也可以用列举法来表示这个集合。例如：S 是由所有偶数组成的集合，可记为 $S=\{0,2,4,6,\cdots\}$。

描述法：描述法就是将一个集合中的元素用一种性质描述，使得满足两点：

1. 集合中的元素都满足这个性质；

2. 满足该性质的元素都是集合中的元素，特别是当集合的元素不能按一定的顺序排成一列时，这时集合就只能用描述法来表示了。

集合中的元素没有前后顺序，例如：集合$\{2,4,6\}$与集合$\{4,2,6\}$表示的是同一个集合。

例 1.1.3　①A 是由所有偶数组成的集合，则 $A=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$

②A 是由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成的集合，则 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$。

③A 是由方程 $x^5-5x+6=0$ 的根组成的集合，则 $A=\{x\mid x^5-5x+6=0\}$。

④A 是由方程 $x^2+1=0$ 的根组成的集合，则 $A=\{x\mid x^2+1=0\}$。

⑤A 是区间$(0,1)$中的无理数集，$A=\{x\mid\in(0,1),x\notin\mathbf{Q}\}$。

在此例中①中的集合 A 可用给出的描述法，也可以用列举法表示为

$$A=\{0,\ -2,2,\ -4,4,\cdots\ -2n,\ 2n,\cdots\}$$

在②中，可用列举法表示为 $A=\{2,3\}$；在③中，由于根的个数不知道，在未解出方程时，是无法用列举法表示的，在⑤中，根本不可能将$(0,1)$中无理数排成一列，因此对③和⑤只能用描述法表示。

在例 1.1.3 中，使用了几个常用的数学符号，如：整数符号“$\mathbf{N}$”，有理数符号“$\mathbf{Q}$”，区间符号“$(0,1)$”。在数学中对一些常用的数集符号有些常用的表示习惯。

(1)数集符号

$\mathbf{R}$：表示实数集；　　　　$\mathbf{Q}$：表示有理数集；

$\mathbf{R}^+$：表示正实数集；　　　$\mathbf{Q}^+$：表示正有理数集；

$\mathbf{Z}$：表示整数集；　　　　$\mathbf{N}$：表示自然数集(包含零)；

$\mathbf{Z}^+$：表示正整数集。

(2)区间

有限区间：　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；　　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

　　　　　　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；　　$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$。

无限区间：　$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$

　　　　　　$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；　　$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；

　　　　　　$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；　　$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$。

(3)邻域

今后经常会讨论一种称为“邻域”的特殊的集合，它们的定义如下：

邻域：集合$(a-\delta,a+\delta)$称为 a 的一个 δ-邻域，记为 $U_\delta(a)$或$[U(a,\delta)]$。

空心邻域：集合$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$称为 a 的一个空心 δ-邻域，记为 $U_\delta(\hat{a})$。

左邻域：集合$(a-\delta,a]$称为 a 的一个左 δ-邻域，记为 $U_\delta^-(a)$。

空心左邻域：集合$(a-\delta,a)$称为 a 的一个空心左 δ-邻域，记为 $U_\delta^-(\hat{a})$。

同样可以定义右邻域 $U_\delta^+(a)$，空心右邻域 $U_\delta^+(\hat{a})$。

1.1.2　函数的概念

在实际问题中，经常会遇到各种不同变化的量。例如，物体在自由下落过程中，时间 t 和路程 s 都是在不段变化的，它们之间有相互关系：$s=\frac{1}{2}gt^2$。其中 t 和 s 不断变化，可取得不同的值，它们称之为变量。在同样的变化过程中，重力加速度 g 总是取不变的数值，称为常量。

两个变量，它们相互变化，但又有相互联系，这种相关性，在自然现象中是非常普遍的，虽然形式有所不同，但就其本质来说，可归纳为数学中的“函数”概念。

定义　在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果按照某一确定的法则，对于在 x 变化范围内的每一个值，都有 y 的一个确定的值与它相对应，这样的一种关系就称 y 是 x 的一个函数，记为 $y=f(x)$。

在函数 $y=f(x)$ 中，x 称为自变量，y 称为因变量。自变量的变化范围称为函数的定义域，一般记为 $D(f)$；因变量的变化范围称为函数的值域，一般记为 $R(f)$。

在函数的定义中，函数的对应法则和函数的定义域是函数的两个要素。

例 1.1.4　①两个函数

$$y=f_1(x)=x+1,\ -\infty<x<+\infty$$

$$y=f_2(x)=\frac{x^2+x}{x},x\neq 0$$

它们的对应法则是相同的，但定义域却不相同，$f_1(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$f_2(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此这是两个不同的函数。

②$y=f_1(x)=x\quad x>0$；　$y=f_2(x)=2^{\log_2 x}\quad x>0$

这两个函数表面上它们的形式不尽相同，但按照定义，x 与 y 的对应法则相同，且定义域显然相同，因此这是两个相同的函数。

③$y=f_1(x)=\sin x\quad -\infty<x<+\infty$；　$y=f_2(x)=\sin x\quad -\pi\leqslant x\leqslant +\pi$

这两个函数的对应法则是相同的，但它们的定义域是不同的，因此这是两个不同的函数。

在通常的应用中，经常只给出函数的对应法则，而未给出函数的定义域，在这种情况下，约定函数的定义域是那些使得对应法则有意义的所有自变量的取值的集合，这一定义域，称为函数的自然定义域。

例 1.1.5　求下列函数的定义域

①$f(x)=\sqrt{x-1}$

②$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$

解：①当 $x\geqslant 1$ 时，函数都有定义，所以，函数的定义域是 $[1,+\infty)$。

②当 $x\neq -2$ 时，函数都有定义，所以，函数的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$。

习题 1.1

1. 用区间表示下列不等式的解集合。

①$|x-3|<4$　　②$|ax-x_0|<\delta(a>0,\delta>0)$

③$0<(x-2)^2\leqslant 4$　　④$2x+3>x^2$

2. 求下列函数的定义域。

①$y=\sqrt{3x+2}$　　②$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

③$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$　　④$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

3. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求$g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$的定义域。

4. 下列各对函数中相同的一对是(　　)。

(A)$f(x)=\lg(3-x)(3+x)$与$g(x)=\lg(3-x)+\lg(3+x)$

(B)$f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x}$与$g(x)=x-1$

(C)$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$

(D)$f(x)=\lg x^2$与$g(x)=2\lg x$

1.2　函数的几个基本性质

1.2.1　函数的奇偶性

设S是一个集合，如果x是S中的任意一个元素，都可得它的相反的数$-x$一定也是S的一个元素，就称S是一个对称集(即集合S关于原点对称)。

设函数$y=f(x)$的定义域$D(f)$是一个对称集，如果对$D(f)$中的任意一个元素x，都满足$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$是一个偶函数；如果对任意的$D(f)$中的一个元素x，都满足$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$是一个奇函数。

例 1.2.1　证明：①函数$y=f_1(x)=x^2$是偶函数；

②函数$y=f_2(x)=x^3$是奇函数。

证：①因为$f_1(-x)=(-x)^2=x^2=f_1(x)$，由定义，$y=f_1(x)=x^2$是偶函数；

②因为$f_2(-x)=(-x)^3=-x^3=-f_2(x)$，由定义，$y=f_2(x)=x^3$是奇函数。

现将几个常见的奇偶函数给出如下：

$y=x^{2n}$，$y=\cos x$等都是偶函数；

$y=x^{2n+1}$，$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$等都是奇函数。

例 1.2.2　判断函数$f(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$的奇偶性。

解:函数的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$是一个对称集,对任意一个 x

$$f(-x)=\frac{3^{(-x)}+3^{-(-x)}}{2}=\frac{3^x+3^{-x}}{2}=f(x)$$

所以,$f(x)$是一个偶函数。

例 1.2.3　设$f(x)$的定义域是一个对称集,证明:

①$g(x)=f(x)+f(-x)$是一个偶函数;

②$h(x)=f(x)-f(-x)$是一个奇函数。

证:①对任意 $x\in D(g)$,

$$g(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(x)+f(-x)=g(x)$$

所以 $g(x)$是偶函数。

②对任意 $x\in D(h)$,

$$h(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=-[f(x)-f(-x)]=-h(x)$$

所以 $g(x)$是奇函数。

函数的奇偶性有下面的一些性质:

①两个偶函数的和、差、积或商都是偶函数;

②两个奇函数的和、差还是奇函数;

③两个奇函数的积与商是偶函数;

④一个奇函数与一个偶函数的积或商是奇函数。

在这里,仅给出④的证明,其他的请自己完成。

证:设$f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,对任意 $x\in D(h)$,则

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x),\text{令 } h(x)=f(x)g(x),$$

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)]\cdot g(x)=-[f(x)g(x)]=-h(x)$$

所以,$h(x)$是奇函数。

以上性质今后将会经常用到,希望要熟练掌握。另外,我们也形象地表示如下:

奇+奇=奇　　奇-奇=奇　　偶+偶=偶　　偶-偶=偶

奇×奇=偶　　奇÷奇=偶　　偶×偶=偶　　偶÷偶=偶

奇×偶=奇　　奇÷偶=奇

偶函数的图形关于 y 轴对称,即:如果点(x,y)在函数图形上,那么,点$(-x,y)$也在函数图形上。奇函数的图形关于原点对称,即:如果点(x,y)在函数图形上,那么,点$(-x,-y)$也在函数图形上(图 1.2.1,图 1.2.2)。

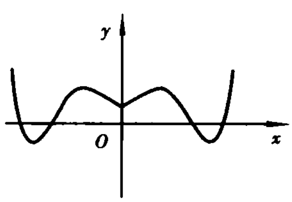


图 1.2.1　偶函数图像

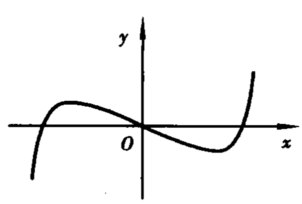


图 1.2.2　奇函数图像

例 1.2.4 ① $g(x)=x^3$ 和 $h(x)=\sin x$ 是奇函数，由以上性质 $f_1(x)=x^3+\sin x$ 也是奇函数，而 $f_2(x)=x^3\sin x$ 是偶函数。

② $g(x)=x, h(x)=\sqrt{1+x^2}$, $g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数，所以

$$f(x)=g(x)h(x)=x\sqrt{1+x^2}$$

是奇函数。

1.2.2 函数的单调性

定义 1.2.1 设 $D(f)$ 是函数 $f(x)$ 的定义域，对 $D(f)$ 中的任意两个数 $x_1\neq x_2$:

①如果，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单调增加函数；

②如果，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单调减少函数；

③如果，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是非减函数；

④如果，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是非增函数。

下面是一些常见的单调增加函数:

① $y=x^k$, k 是一个正奇数，是一个单调增加函数；

② $y=\sin x \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，是一个单调增加函数；

③ $y=\cos x \quad 0<x<\pi$，是一个单调减少函数；

④ $y=\mathrm{e}^x$, $y=\ln x$ 和 $y=\log_a x \quad (a>1)$，是单调增加函数；

⑤ $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 当 $0<a<1$ 时，是单调减少函数；

⑥ $y=\tan x \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，是单调增加函数；$y=\cot x \quad 0<x<\pi$，是单调减少函数；

⑦ $y=\arcsin x$ 是单调增加函数；$y=\arccos x$ 是单调减少函数；

⑧ $y=\arctan x$ 是单调增加函数；$y=\mathrm{arccot}\, x$ 是单调减少函数。

单调函数有下面的几个常用判别方法:

①设 $y=f(x)$ 是单调增加函数，则 $y=af(x)\ (a>0)$ 也是单调增加函数；

②设 $y=f(x)$ 是单调增加函数，则 $y=-f(x)$ 是单调减少函数；

③设 $y=f(x)$ 是单调增加函数，且 $f(x)>0$，则 $y=1/f(x)$ 是单调减少函数；

④两个单调增加(减少)函数的和还是单调增加(减少)函数；

⑤设 $y=f(x)$ 是单调增加函数，则 $y=a^{f(x)}\ (a>1)$ 是单调增加函数。

注意:两个单调增加(减少)函数的差、积与商不一定还是单调增加(减少)函数。

例 1.2.5 判定下列函数的单调性:

① $y=-2^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$，因为 $y=x$ 是单调增加的，且 $x>0$，由上面列出的判别方法③，可知 $\frac{1}{x}$ 是单调减少的，由方法⑤可知，$2^{\frac{1}{x}}$ 也是单调减少的，最后得 $y=-2^{\frac{1}{x}}$ 就是单调增加的。

② $y=x$ 是单调增加的，它自乘后，这两个单调增加函数的积为 $y=x^2$，这个函数不再是单调增加函数了。

函数单调性的判断，一般可用上述性质进行判定。对于一些较复杂一点的函数，要判定它的单调性是较困难的，但在今后学过第 4 章之后，对单调性的判定就容易得多了，因此在这里不作深入的探讨，进一步的知识将在第 4 章中再介绍。

1.2.3 函数的周期性

定义 1.2.2 设 T 是一个正数，函数 $y=f(x)$ 若满足下面的两条：

①如果 $x\in D(f)$，则 $x\pm T\in D(f)$；

②对任意 $x\in D(f)$，都有 $f(x\pm T)=f(x)$

就称 $f(x)$ 是一个周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期。

在周期函数的定义中，首先对定义域有特定的要求。例如，$y=\sin x$ 是一个周期函数（在自然定义域中），而对 $y=\sin x\quad x>0$ 就不是一个周期函数了，因为它的定义域不满足条件①。

如果 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期，容易看出 T 的任意一个正整数倍 nT，也是 $f(x)$ 的一个周期。因为

$$f(x)=f(x\pm T)=f[(x\pm T)\pm T]=f(x\pm 2T)=\cdots=f(x\pm nT)$$

因此，任意一个周期函数是没有最大正周期的。一般来说，大多数周期函数都有最小正周期，例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的最小正周期是 2π；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的最小正周期是 π。因此，今后如无特别说明，一般谈及函数的周期时，都是指最小正周期*。例如：通常只说 $y=\sin x$ 的周期是 2π，而不说它的周期是 4π 或 8π 等。这里提到的“周期”就是指最小正周期。

关于函数的周期，有如下的定理：

定理 设周期函数 $f(x)$ 的（最小正）周期为 T，则：

①$f(x+b)$ 也是周期函数，且它的周期也是 T；

②$f(ax)\ (a\neq 0)$ 是周期函数，且它的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$；

③$af(bx+c)+d$ 也是周期函数（$b\neq 0$），且它的周期是 $\dfrac{T}{|b|}$。

证：仅证明②。令 $g(x)=f(ax)$，我们要证明 $g(x)$ 是周期为 $\dfrac{T}{|a|}$ 的周期函数。设 $a>0$，因为 $f(x)$ 的周期为 T，所以 $f(u+T)=f(u)$，用 ax 代 u，得：$f(ax+T)=f(ax)$

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)=g(x)$$

所以，$\dfrac{T}{a}=\dfrac{T}{|a|}$ 是函数 $g(x)$ 的周期。若 $a<0$，$\dfrac{T}{|a|}=\dfrac{T}{-a}$，由 $f(u-T)=f(u)$，用 ax 代 u，得：$f(ax-T)=f(ax)$。

$$g\left(x+\frac{T}{|a|}\right)=g\left(x-\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x-\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax-T)=f(ax)=g(x)$$

所以 $\dfrac{T}{|a|}=\dfrac{T}{-a}$ 是函数 $g(x)=f(ax)$ 的周期。

例 1.2.6 求下列周期函数的周期

①$y=\sin 3x$； ②$y=\cos\pi x$； ③$y=\tan\dfrac{2x+3}{3}$； ④$y=2\sin(3x+5)+6$。

* 也存在没有最小正周期的周期函数，例如：常数函数 $f(x)=c$，它就是一个周期函数，任意一个正实数都是它的周期，因此，它不存在最小正周期。除了常数函数外还存在其他的没有最小正周期的周期函数，不过在实际问题中，这种函数是很少见的。

解：

①因为 $y=f(x)=\sin x$ 的周期是 2π，所以 $y=f(3x)=\sin 3x$ 的周期是$\frac{2\pi}{3}$；

②因为 $y=f(x)=\cos x$ 的周期是 2π，所以 $y=f(\pi x)=\cos\pi x$ 的周期是$\frac{2\pi}{\pi}=2$；

③因为 $y=f(x)=\tan x$ 的周期是 π，所以 $y=f\left(\frac{2}{3}x+1\right)=\tan\frac{2x+3}{3}$ 的周期是 $\left(\pi\Big/\frac{2}{3}\right)=\frac{3\pi}{2}$。

④因为 $y=f(x)=\sin x$ 的周期是 2π，所以 $y=2f(3x+5)=2\sin(3x+5)$ 的周期是$\frac{2\pi}{3}$。

1.2.4　函数的有界性

定义 1.2.3　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义。如果存在一个正数 M，使得对于所有的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或说 $f(x)$ 是 D 上的有界函数；如果 $f(x)$ 在其定义域上有界，就称 $f(x)$ 是有界函数。

例 1.2.7　①$\sin x$ 是有界函数，因为存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant 1$；又如 $\tan x$ 在 $[-\pi/4,\pi/4]$ 是有界函数，而 $\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$是无界函数。

②函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 是一个有界函数，因为，可取 $M=1$，对任意实数 x，都有

$$|f(x)|=\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$$

所以，$f(x)$ 是有界函数。

一般来说，函数 $f(x)$ 的值域 $R(f)$ 能被包含在某个有限区间，$f(x)$ 就是有界函数，否则就是无界函数。用定义判断一个函数是否为有界函数，除了一些简单的函数外，一般都很困难。今后，当学了连续与函数间断点的概念后，再来判断函数的有界性将简单得多！因此，在这里也不展开深入的讨论。

习题 1.2

1. 判断函数 $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ 与函数 $g(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$ 的奇偶性。

2. 求下列函数的周期

　①$y=\cos(3x+2)$

　②$y=\cos\frac{\pi x}{2}$

　③$y=3\tan(3x+2)+5$

3. 判断函数 $y=\frac{1}{x}+\ln(1-x)$ 的单调性。

4. 判断下列函数的有界性(不需证明)

①$y=\dfrac{2}{x^2-4x+7}$　　②$y=3\sin(1-2x)+2$

③$y=\ln(2-x)$　　④$y=\ln(1+2x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$

5. 在 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,函数 $f(x)=2x^2+e^{x^2}$ 是(　　)。

(A)奇函数　　(B)偶函数　　(C)有界函数　　(D)无界函数

6. $f(x)=e^{\cos x}$ 不是(　　)。

(A)偶函数　　(B)单调函数　　(C)有界函数　　(D)周期函数

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是偶函数,并且已知当 $x\in[0,\pi]$ 时 $f(x)=\sin x+1$,则当 $x\in[-\pi,0]$ 时 $f(x)=$(　　)。

(A)$\sin x+1$　　(B)$1-\sin x$　　(C)$\sin x-1$　　(D)$-1-\sin x$

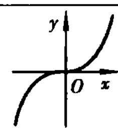
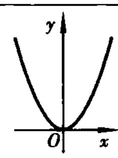
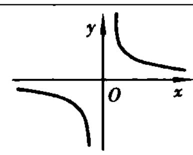
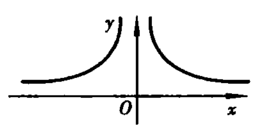
1.3　基本初等函数

在中学里学过的函数中有:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。这些函数是经常遇到的几类最简单函数,并且许多函数都是由它们通过加、减、乘、除四则运算和有限次函数复合表示出来的,因此这几类函数称为基本初等函数。为了便于查阅,现将它简单介绍如下:

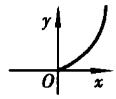
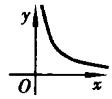
1.3.1　幂函数 $y=x^\alpha$

当 α 取不同的值时,要注意幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域和函数图像的状态,具体见表 1.3.1:

表 1.3.1　幂函数基本性质

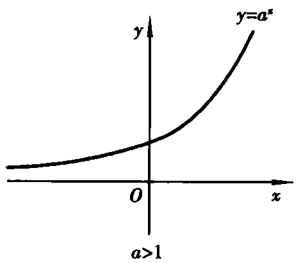
α	定义域	单调性	函数图像
正奇数	$(-\infty,+\infty)$	单调增加	
正偶数	$(-\infty,+\infty)$	在 $(-\infty,0)$ 内单调减少,在 $(0,+\infty)$ 单调增加	
负奇数	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调减少	
负偶数	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	在 $(-\infty,0)$ 内单调增加,在 $(0,+\infty)$ 单调减少	

续表

α	定义域	单调性	函数图像
正数	$[0,+\infty)$	单调增加	
负数	$(0,+\infty)$	单调减少	

1.3.2 **指数函数** $y=a^x(a>0,a\neq1)$

指数函数$y=a^x$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$,当$x=0$时,$y=1$,即函数的曲线通过$(0,1)$点。当$a>1$时,$y=a^x$是单调增加函数;当$0<a<1$时,$y=a^x$是单调减少函数。函数图像如下:



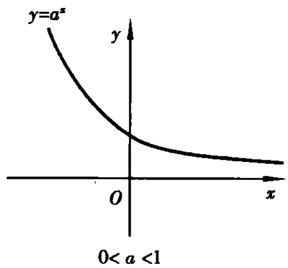


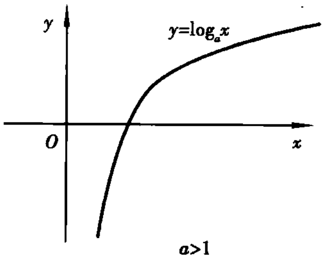
图 1.3.1 指数函数图像

指数函数的主要性质有两条:

①$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; ②$(a^x)^y=a^{xy}$。

1.3.3 **对数函数** $y=\log_a x$

对数函数的定义为:$y=\log_a x$,当且仅当$a^y=x$。它是指数函数的反函数,定义域为$(0,+\infty)$,当$x=1$时$y=0$,因此函数曲线通过点$(1,0)$;当$a>1$时,对数函数$y=\log_a x$是单调增加函数,当$0<a<1$时,它是单调减少函数。函数图像如下:



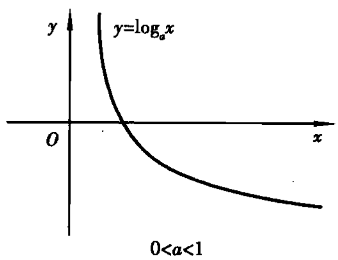


图 1.3.2 对数函数图像

对数函数有如下性质:

①$y=\log_a x\Leftrightarrow a^y=x$(定义);

②$\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$(注意:$\log_a x\cdot\log_a y\neq\log_a(x+y)$);