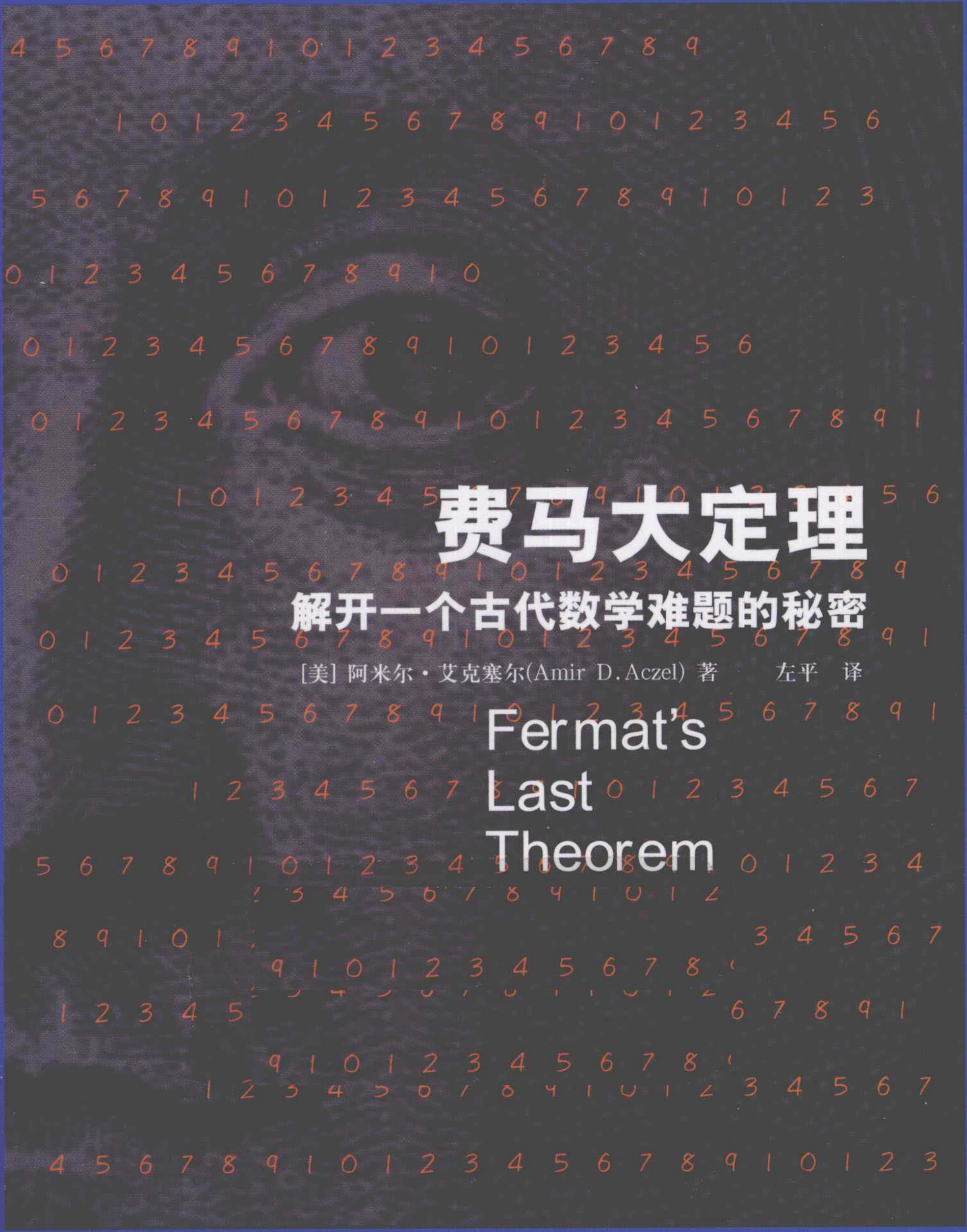
科学图书馆

科学新文献



费马大定理

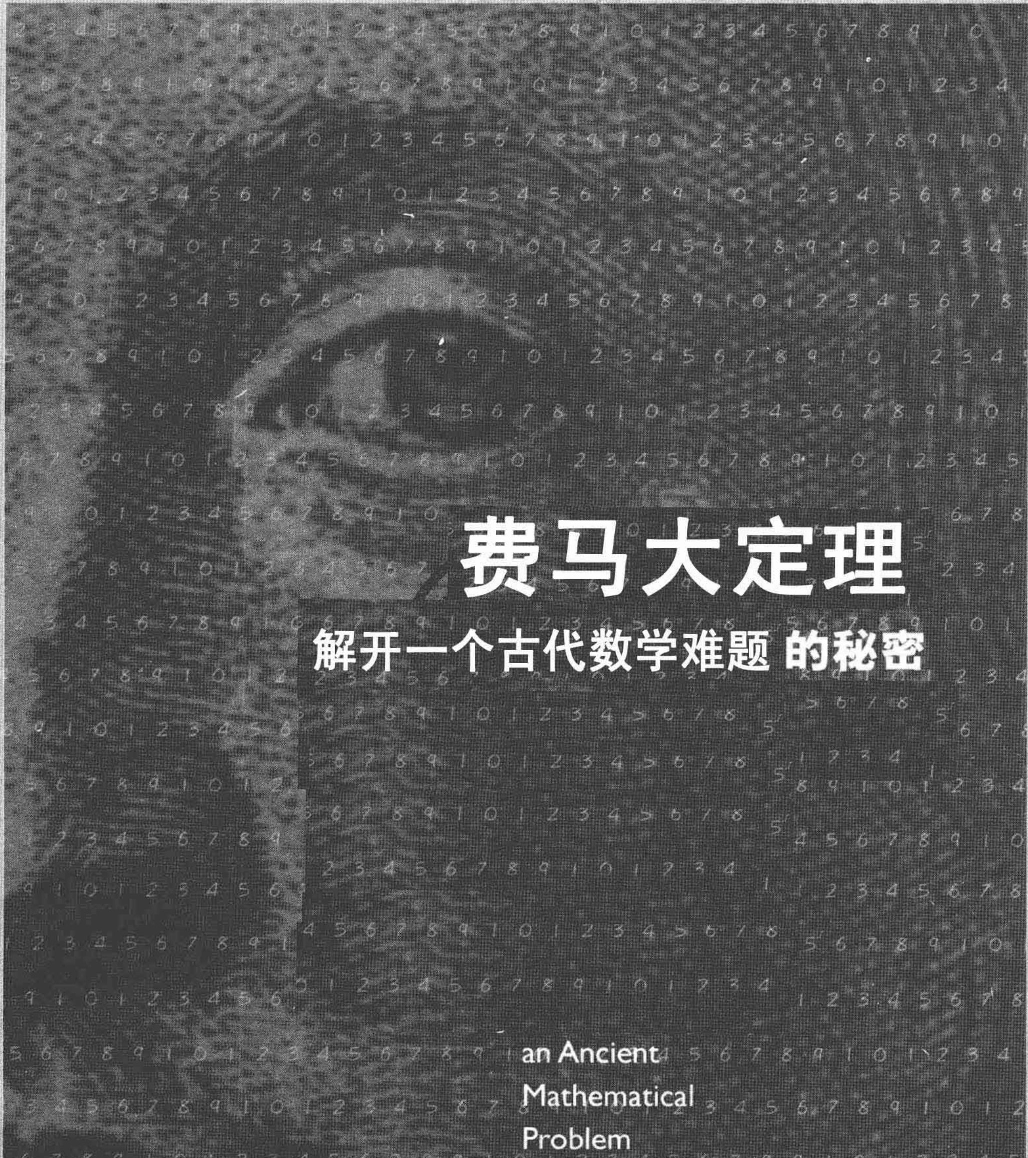
解开一个古代数学难题的秘密

[美] 阿米尔·艾克塞尔(Amir D. Aczel) 著　　左平　译

Fermat's Last Theorem

上海科学技术文献出版社

科学图书馆



费马大定理

解开一个古代数学难题的秘密

an Ancient Mathematical Problem

上海科学技术文献出版社

图书在版编目（CIP）数据

费马大定理：解开一个古代数学难题的秘密/
(美)阿米尔·艾克塞尔著；左平译. --上海:上海
科学技术文献出版社，2011. 1
ISBN 978-7-5439-4649-1

I.①费… II ①阿… ②左… III. ①费马最后定理
IV. ①0156

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第255623号

图字：09-2006-784

责任编辑：张 树 李 莺
美术编辑：徐 利

费 马 大 定 理
——解开一个古代数学难题的秘密
[美]阿米尔·艾克塞尔(Amir D. Aczel)著
左 平 译
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市长乐路746号 邮政编码200040)
全 国 新 华 书 店 经 销
江 苏 常 熟 市 人 民 印 刷 厂 印 刷
*
开本740X970 1/16 印张6 字数110 000
2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷
ISBN 978-7-5439-4649-1
定价：20.00元
http://www.sstlp.com

献给我的父亲

序　　言

1993年6月，我的老朋友汤姆·舒尔特从加利福尼亚到波士顿来看我。我们来到阳光明媚的新巴利街，坐在人行道旁的咖啡座上，高耸于杯上的冷饮放在我们面前。汤姆刚离婚，有点沉默寡言。他侧转过头来对着我说："顺便告诉你，费马大定理刚被人证明出来了。"随后汤姆的注意力回到了人行道。我想，这必定又是在开玩笑。20年前，我们都是加利福尼亚大学柏克莱分校数学系的大学生，汤姆和我住同一宿舍。有关费马大定理的一些事情是我们经常谈论的话题。我们还讨论函数、集合、数域和拓扑学。数学系的学生晚上睡眠时间都不多，因为我们的课业很难，这是我们与其他大多数系的学生不同之处。有时我们整夜都在思考数学问题……试图证明某些定理，直至清晨。但费马大定理呢？没有人相信我们这辈子能看到它被证明出来。要证明这个定理非常困难，三百多年来吸引众多的人想要证明它。我们也知道，在试图证明此定理的过程中，产生了一些新的数学分支。但证明此定理的努力一次又一次地失败了。费马大定理渐渐变成了无法解决的象征。我曾经有一次认为，对我来说，意识到不可能证明此定理或许是有利的。几年以后，我已经从柏克莱数学系毕业并正在修读计算科学的硕士学位。我住在国际公寓时，一个自负的数学系学生，不知道我的数学背景，表示可给我提供他的帮助。"我是学纯粹数学的，"他说，"如果你有什么解决不了的数学问题，你尽管问我好了。"说完他就打算离开，但听到我说"嗯，是的。有一个问题，你可能会给我帮助……"他转回身，"好，一定，让我看看是什么问题。"我铺开一餐巾纸——当时我们正在餐厅。我在它上面慢慢写出：

$$x^n + y^n = z^n \qquad \text{当 } n \text{ 大于 2 时没有整数解。}$$

"从昨夜开始，我一直在试图证明这一问题，"我说，向他举起那块餐巾纸。我看到他的脸色变白。"费马大定理，"他哼哼唧唧道。"是的，"我说，"你是学纯粹数学的，你能给我帮助吗？"此后我再未碰到过此人了。

"我是认真的，"汤姆喝完他的冷饮说。"安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)。他上个月在剑桥证明了费马大定理。记住这个名字。今后你会不断地听到它。"那晚，汤姆即乘飞机返回加利福尼亚。后一个月，我已认识到汤姆确实没有跟我开玩笑，并且我追踪了事件的整个过程。怀尔斯最初受到了欢呼，然后发现他的证明里有个漏洞，为

此，证明被撤回一年，接着用一种正确的方法完全解决了问题。但随着进一步的了解，我认为汤姆还是错了。我不应只注意安德鲁·怀尔斯一个名字，或单独他一个人。我，以及整个世界，应该知道费马大定理的证明远远不只是一个数学家的工作成果。当怀尔斯得到那么多赞扬时，这荣耀同时也属于其他很多人：肯·里贝特（Ken Ribet），巴厘·梅修尔（Barry Mazur），志村五郎（Goro Shimura），谷山丰（Yutaka Taniyama），杰哈德·弗雷（Gerhard Frey）等等。这本书讲述了一个完整的解决费马大定理的故事，其中包括荧幕背后和相机镜头及闪光灯外不为人知的趣闻轶事。同时，这也是一个含有欺骗、阴谋和背叛的故事。

> “或许我能借助进入黑暗大楼内的经验，最好地描述我如何做数学研究。你进入第一间房屋，但它里面一片漆黑，伸手不见五指。你磕碰家具，不时被周围的东西绊倒。逐渐地，你能感觉并知道每一样东西，每一件家具都在哪里。并且最后，在6个月或更长些时间后，你能找到灯的开关并把灯点亮。突然，屋内大放光明并且你可看清你准确的位置。然后你再进入下一间黑房……”
>
> 这是安德鲁·怀尔斯教授描述他七年来如何搜寻数学圣灵的故事。

目　录

第 一 章

1993 年 6 月 23 日的黎明前，普林斯顿大学的约翰·康韦(John Conway)教授来到校园里那座黑暗中的数学大楼。他打开前门并急忙走进他的办公室。自他的同事安德鲁·怀尔斯出发去英国后的这几星期里，不同寻常的传闻持续不断，已充满世界数学界。约翰·康韦感到要发生重要事情。但确切的是什么事情，他没有概念。他打开他的计算机，坐下并盯视着屏幕。早晨 5：53，一条简明的电子信息越过大西洋闪现出来："怀尔斯证明了 F. L. T.(费马大定理)"

1. 剑桥，英国，1993 年 6 月

1993 年 6 月下旬，安德鲁·怀尔斯教授飞到英国。他回到了剑桥大学，这里是 20 年前他还是大学生时学习的地方。怀尔斯以前在剑桥的博士论文的导师，约翰·科茨(John Coates)教授正在组织一次有关依瓦沙瓦(Iwasawa)理论的研讨会，该理论是数论中的独特部分，怀尔斯所写的论文恰恰是有关此领域的，因而对此理论知之甚详。科茨此时问他以前的学生，是否愿意在会议上就你选择的论题做一简短的 1 小时的演讲。令他和其他会议的组织者感到极其惊讶的是，害羞的以前厌恶对公众讲话的怀尔斯竟然要求，是否能给他 3 个小时的演讲时间。

当 40 岁的怀尔斯到达剑桥时，他看起来是一位典型的数学家：袖子随便挽起的白色衬衫，厚厚的角质架眼镜，不太规整的稀疏头发。生于剑桥的他，这次归来是某种特殊的回家——实现他童年之梦。为追求这一梦想，安德鲁·怀尔斯关在自己的顶楼里已面壁七年。但他希望，这种牺牲，这种长期孤军奋战的时日，不久将会结束。他期盼能有更多时间与妻女在一起，而在这七年里他只有极少时间能看到她们。他经常失约

家庭午餐，或忘了下午茶，晚饭也很少在家吃。但现在，荣耀将归于他一人。

剑桥的艾萨克·牛顿数学科学研究所近来才开放，这是因为怀尔斯教授要来这里发表他的3小时演讲。这研究所是一座宏伟的大楼，坐落在围绕剑桥大学的景观区内，环境优美。演讲厅外的宽广区域里，有装饰着绒布的舒适坐椅，方便促进学者和科学家之间的非正式思想交流，提高学术和知识。

从世界各地来参加这次特别会议的数学家，虽然怀尔斯大多数都认识，但他此时不与他们接触。当同事们对他安排的演讲之长表示奇怪时，怀尔斯只是说你们应该来听我的演讲，你们会发现这是值得的。如此这般地保持神秘，甚至对于数学家们也是非比寻常的！当通常一个数学家单独在为证明某定理而工作，并且一般地说世界上大多数与他们有交往者都还不知道详情时，数学家们经常会彼此分享研究成果。数学结果以预印稿的形式在它们的作者之间自由传阅。这些预印稿给作者们带来了外部的评论，从而使论文在发表前得到改善。但怀尔斯没有散发预印稿，也没有预先讨论他的工作。怀尔斯演讲的题目是“模形式、椭圆曲线和伽罗瓦表示”，但此题目对演讲将引向何处没给出一点暗示，甚至在这些领域里的专家也猜不出来。传言随着时间的流逝而快速增长。

第一天，怀尔斯用讲述一些强力和未曾预料到的数学结果酬谢了二十多位听他演讲的数学家——并且提醒他们还有两次演讲。接着将会得到什么呢？每一个人都清楚，答案就在怀尔斯的演讲中。悬念随着充满期待的数学家的大批拥入而不断增加。

第二天，怀尔斯的介绍增多了。他带来了200页的讲稿，包括公式和推导，原始思想和漫长而抽象的定理证明。厅内所有空余地方都挤满了人。每一个人都在耐心地听。演讲将导向何处？怀尔斯没有给出一点暗示。他沉着地不断在黑板上写着，一直写了一天，然后他就匆匆离开了。

接下来的一天，1993年6月23日，星期三，是怀尔斯演讲的最后一天。当他走近演讲厅时，怀尔斯发现必须推挤人群才能进入。在入口处外面聚集了许多站立的人群，屋内则超负荷挤满了人。很多人还带着相机。当怀尔斯再次在黑板上写着似乎是没完没了的公式和定理时，紧张气氛加剧了。“怀尔斯的介绍只可能有一个顶峰，只可能有一个结果”，事后加利福尼亚大学的肯·里贝特教授在柏克莱告诉我说。怀尔斯正在完成他对谜样的，复杂的一个数学猜想，即谷山-志村猜想的证明的最后几行。然后他最后突然增加一行，写出了几个世纪的古老方程，肯·里贝特七年前已经证明，这应是此猜想的必然结果。“那么这就证明了费马大定理，”他说，几乎是随之而来的，又说，“我想我就在此结束。”

在整个大厅内出现了瞬间的惊愕和沉寂。然后爆发出听众发自内心的鼓掌欢呼。

相机闪光显现出人们都站起来向喜形于色的怀尔斯祝贺。几分钟内,电子邮件和传真飞遍世界各地。这个长期困扰人们的最费脑子的数学问题看起来已经解决了。

"不曾料到的是,第二天我们被世界出版机构所发的洪水淹没了,"约翰·科茨教授回忆说。科茨组织了这次会议,但他一点也没想到会议会成为最伟大数学成就之一的落地场所。世界报刊的头条都在欢呼这出乎意料的突破。"终于,可以大声呼喊,Eureka!(找到了!)几个世纪的古老数学秘密"这是 1993 年 6 月 24 日《纽约时报》的头版上所宣布的。《华盛顿邮报》在一篇重要文章里称怀尔斯为"数学巨龙的斩杀者",并且是新故事中所描述的解决了向人们挑战已超过 350 年之久,最难以攻克的数学问题的人。只过了一夜,这个安静和不为人知的安德鲁·怀尔斯变成一个了不起的人。

2. 皮埃尔·德·费马

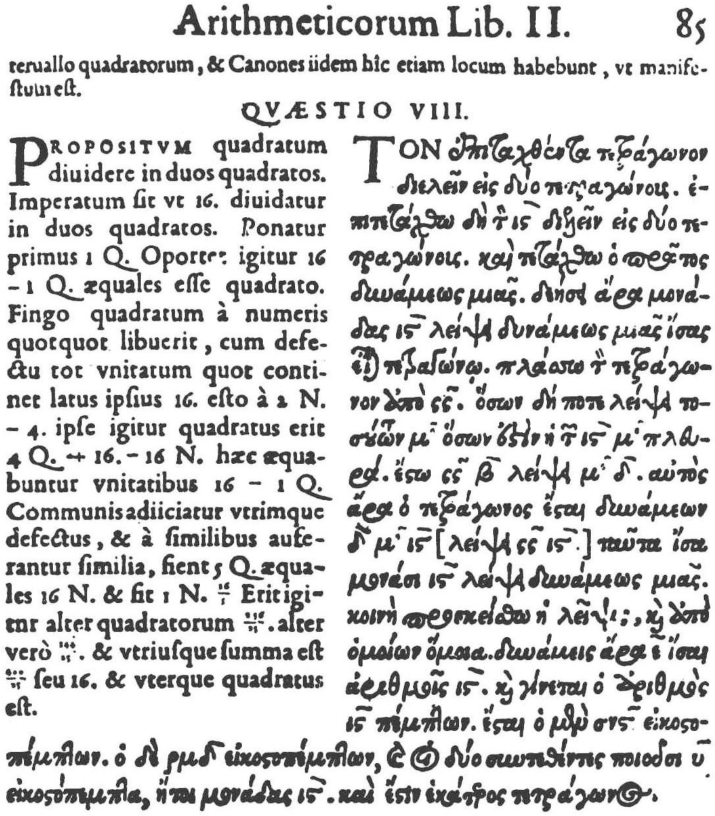
皮埃尔·德·费马是 17 世纪法国的一位律师,也是一位业余数学家。技术上称他是"业余的",是因为他有一份日常的律师职业,权威的数学史学家 E·T·贝尔在他 20 世纪早期所写的著作里,恰当地称费马为"业余数学家之王"。贝尔相信费马取得的成就比他同时代的大多数"职业"数学家的更重要。贝尔认为费马是 17 世纪最丰富多产的数学家,而 17 世纪是见证了某些最伟大数学头脑如何工作的一个世纪。[1]

费马的最令人惊叹的成就之一,是他在艾萨克·牛顿出生前 13 年,发展了微积分学的主要概念。牛顿和同时代人莱布尼兹一起被看做创立了含有运动、加速度、力和轨道的数学理论,以及其他应用数学的连续变化的概念。这些人们称之为微积分学。

费马对古希腊的数学著作十分入迷。可能他的微积分概念是来自古希腊数学家阿基米得和欧多克斯的经典著作,阿基米得和欧多克斯是分别生活在公元前的 3 和 4 世纪的人物。费马把所有空闲时间都用来研究这些古代著作——这些著作在他那时代已翻译成拉丁文。他的全职工作是重要的律师,但他的爱好——他的兴趣——是试图推广古代的工作和在那些被埋藏的数学发现里寻找新的美妙定理。"我已经找到了大量极漂亮的定理",他有一次说。这些定理都摘记在他的古书翻译本的空白地方。

费马的父亲多米尼克·费马(Dominique Fermat)是皮革商人,多米尼克还是波梦特-洛马镇的第二执政官,他娶出身于议会法官家庭的克莱尔·德·隆为妻。费马生于 1601 年 8 月(8 月 20 日在波梦特-洛马受洗礼),成长后其双亲一心要培养他为一地方执政官。他年轻时入图卢兹的学校学习,30 岁时在此城被任命为地方官员。同年,1631 年,他与他母亲的侄女路易斯·隆结婚。皮埃尔与路易斯有 3 个儿子和 2 个

女儿。儿子之一的克来梦·塞缪尔(Clement Samuel),成为他父亲科学工作的整理者并且在他父亲去世后出版了其著作。事实上,正是这些留传了下来的出版物,使我们知道了他著名的大定理。克来梦·塞缪尔·德·费马意识到潦草地写在空白处的此定理的重要性,特意把它加到了再版的古书的翻译本中。



Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 – 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. – 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. – 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 – 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δέησει ἄρα μονάδας ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ ιϛ μ° πλευρά. ἔστω ςς β λείψει μ° δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μ° ιϛ [λείψει ςς ιϛ] ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

杜克大学特别收集的图书资料

皮埃尔·德·费马的"大定理"再次登载在丢番图的算术的一个版本上,该版本也是由费马的儿子克来梦设法出版的。而带有费马手写笔记的丢番图的原始复制本却一直没有找到。

费马的生活常常被描写为平静、稳定和没有什么变化。他体面和诚实地工作着,并在1648年被提升至图卢兹地方议会议员的重要职位,直至1665年他去世,共担任了17年。考虑到费马要为王朝做大量工作,要忠诚的服务,要奉献生活的全部时间,很多历史学家都非常迷惑,他哪有时间和精力做第一流的数学研究——和写出那么多卷的数学著作。一法国专家指出,费马的官方工作对于他的数学研究实际上是有利

的，因为为了避免行贿和其他腐败行为的诱惑，法国议会议员被要求把非官方的社交活动减少到最低程度。因此费马必须限制他的社交活动，但肯定又需要在繁重工作之余有一种消遣，而数学可能就提供了他所需要的休息。微积分的思想远不是费马仅有的成就。费马还给我们带来了数论。数论中的一个重要元素是素数的概念。

3. 素数

数 2 和 3 是素数。数 4 不是素数，因为它是 2 与 2 的乘积：$2\times 2 = 4$。数 5 是素数。数 6 不是素数，因为像 4 一样它也是两个数的乘积：$2\times 3 = 6$。7 是素数，8 不是 $(2\times 2\times 2 = 8)$，9 不是，并且 10 不是 $(2\times 5 = 10)$。但 11 再次是素数，因为不存在那样一些整数(不同于 11 自身和 1)，把它们相乘等于 11。并且我们继续这种方法：12 不是，13 是，14 不是，15 不是，16 不是，17 是素数，如此等等。这里没有明显的结构规律，使能看出后面任何一个数不是素数，或不是任何更复杂的乘积形式。素数概念从远古起就使人们深感迷惑。素数是数论中的一个基本元素，并且由于它缺少易于看出的结构规律，使得数论似乎是一个非统一的领域，数论中的问题是孤立的，难以解决的，数论也没有与其他数学领域有明显关联。巴厘·梅修尔说："数论可毫不费力地产生无数个问题，这些问题周围笼罩着清新和甜香的空气，迷人的花朵，还有……数论周围也聚集了很多小虫，等待着伺机叮咬那些受花朵诱惑者，而一旦被叮咬，他们就会激动起来，去为数论做超常的努力！"[2]

4. 写在空白处的著名评注

费马被数字的魔力迷住了。他发现了数字的美妙和意义。他提出了数论中的一些定理，其中之一是，任何形如 $2^{2^n}+1$ 的数是素数。后来，发现它是错误的，因为找到了一个不是素数的这种形式的数。

费马珍爱的古拉丁文课本的翻译本是一本叫做算术的书，它是生活在公元三世纪亚历山大时期的古代数学家丢番图所写。大约在 1637 年，费马在此丢番图译本的空白处，邻近把一个平方数分开写成两个平方数的问题的地方，写道：

> 另一方面，不可能将一个立方数表示成两个立方数之和，或将一个四次幂表示成两个四次幂之和；或者一般的，不可能将高于二次的任意次幂表示成两个同次幂之和。我已经发现了一个对此命题的绝妙证明，可惜空白的地

方不够大，不足以把它写下来。

这一段神秘的陈述促使好几代的数学家都忙于试图提供那个费马已然掌握的“绝妙证明”。这个陈述讲的是，一个整数的平方可写成两个其他整数的平方之和[例如，5的平方25，等于4的平方(16)与3的平方(9)之和]，但对于立方或任意更高次幂，同样的事情却是不可能的，这看起来很简单，似乎是懵人的。所有费马的其他定理在1800年初或已得到证明或被否定。但这个看似简单的命题却仍未解决，并因而被叫做“费马大(或最后)定理”。确实是解决不了吗？甚至在我们现在这个世纪里，计算机也加入到检验此定理是否正确的努力中。计算机可以用来检验数很大时定理是否正确，但却不可能对一切数做检验。定理可以对上亿个数做检验，但仍有无穷多个数和无穷多个指数有待核查。要确立费马大定理，需要一个数学的证明。1800年法国和德国的科学协会曾悬赏巨金奖励任何能提出这个证明的人，并且每年都有上千的数学家和业余者，包括一些逞能者，向数学杂志和审查委员会寄“证明”——但最终都归于徒劳。

5. 1993年7—8月——一个隐含的漏洞

当6月的那个星期三怀尔斯步下讲台时，数学家们是谨慎乐观的。350年的古老秘密看来已最终解决。怀尔斯长长的证明里，使用了复杂的数学概念和费马那个时代甚至20世纪前期都不知道的数学理论，而这些理论需要专家加以确认。此证明被送交给一些第一流的数学家。也许怀尔斯7年孤军奋战的隐居生活会得到最后的回报。乐观情绪仅存在了很短的时间。一星期内，发现了怀尔斯证明里的一个逻辑上的漏洞。他试图填补它，但这个缝隙未能简单地消去。安德鲁·怀尔斯的一位亲密的朋友，普林斯顿数学家彼德·萨纳克看到他每天都在为他在两个月前于剑桥告诉世界的证明而烦恼。“事情仿佛安德鲁打算把一块超大地毯铺在房内地板上，”萨纳克解释道。“他把地毯打开，但铺满房间后它受到一面墙的阻碍而翘起，所以他走到那头把它拉下来……然后地毯又在另一地方拱起来。他不能决定地毯的大小尺寸究竟怎样才适合此房间。”怀尔斯回到自己的小屋。来自《纽约时报》和其他媒体的记者们不再打扰他，让他去完成自己的任务。随着时光的流逝，数学家们和一般公众开始怀疑费马大定理是否肯定正确。与费马的“空白太小而写不下的一个绝妙证明”似的，怀尔斯的要使世界相信的美妙证明也变得同样渺茫。

第 二 章

6. 约公元前 2000 年,底格里斯河与幼发拉底河之间

费马大定理的故事比费马本人要年代久远得很多。它甚至比费马试图推广其结果的丢番图的工作还要古老。这个看起来简单又很深奥的定理的源头跟人类文明自身一样古老。这些源头植根在古巴比伦底格里斯河与幼发拉底河之间(今天的伊拉克境内),肥沃的新月牙地区内发展起来的青铜器时代文化中。当费马大定理还是一个在科学、工程和数学——甚至在它数学里的隐身处的数论中没有应用的抽象命题时,这个定理的源头已能在公元前 2000 年的美索不达米亚人民的日常生活中找到。

从公元前 2000 年到公元前 600 年的美索不达米亚河谷的时代,被认为是巴比伦人的时代。这个时代看到了显著的人类文明的发展,包括文字书写,车轮的使用,和金属制造。一种沟渠的系统被用于灌溉两条河流之间的广阔平原。随着肥沃的巴比伦河谷里人类文明的繁荣,传承了这些果实的古代人民知道了贸易,并且建立起像巴比伦和亚伯拉罕诞生地那样繁华的城市。甚至更早些,在公元前四百年前,一种书写的原始形式已经同时在美索不达米亚和尼罗河谷地区发展起来。在美索不达米亚,有丰富的黏土,人们用尖针在软黏土管上刻印一些楔形记号。然后把这些管子放在炉上烘焙或移到太阳下日晒使之凝固。这种书写的形式叫做楔形文字,它源自意为楔形的拉丁字 cuneus。楔形文字构成了世界上见到的第一个书写系统。巴比伦和古埃及的贸易和建筑需要精密的测量。青铜器时代社会的早期科学家已知道估计一个圆的周长和直径的比,他们所得的数已接近我们今天所知的 p_i。建筑起巨大的合乎圣经的通天塔 Ziggurat,以及建立古代世界七大奇迹之一的空中悬挂花园的人民需要一种计算

面积和体积的方法。

7. 数的平方意味着财富

一个略微成形的基于六十的数的系统发展起来了，并且巴比伦的工程和建筑人员已经能计算在他们日常的专业生活中需要的一些量。数的平方自然地在生活中出现了。数的平方被看做表示着财富。一个农夫的前程是有赖于他能够生产的庄稼总量的。这些庄稼的量转而又依赖于农夫能利用的土地面积。面积是那块地的长和宽的乘积，并且这就是产生平方的地方。一块地如果长和宽都是 a，那么就有面积 a 的平方。因此，从这个意义上说，一个平方量是财富。

巴比伦人需要知道，这样的一个整数的平方怎样才能分解为其他的整数的平方。一个有 25 个平方单位面积的地块的农夫要把它换为两块方地：测量出一块是 16 个平方单位以及另一块是 9 个平方单位。所以，一块五单位乘五单位的方地等于两块方地：一块是四乘四，而另一块是三乘三。这是为解决实际问题而得到的重要结果。今天，我们把它写成一个方程的形式：$5^2 = 3^2 + 4^2$。并且，像这里的 3，4 和 5 这样，满足这个关系式的任何 3 个整数，被叫做毕达哥拉斯三数组——虽然巴比伦人知道它们的时间，比著名的古希腊数学家，并以他的名字命名该数组的毕达哥拉斯要早 1 000 年。我们所知的这些都来自标示日期为大约公元前 1900 年的一不寻常的黏土平板上。

8. 黏土平板文书“*Plimptom 322*”

巴比伦人热爱迷恋黏土管。丰富的黏土和他们具有的楔形文字书写技术使他们创造了很多黏土平板文书。由于黏土平板的经久耐用，有不少平板留存至今。仅从古尼堡（Nippur）的某一个地方就重新发现了超过 50 000 盘平板，它们中的某些现在被收集在耶鲁、哥伦比亚博物馆和宾夕法尼亚大学里。许多这样的平板放在博物馆的地库里，积聚了大量尘土，无人阅读也无人翻译。

有一个已翻译的平板很引人们注意。这个在哥伦比亚大学博物馆的管子叫做 *Plimptom 322*。平板上共包含 15 个三元数组。每一个数组都有这样一个性质，第一个数是平方数并且是另两个平方数的和——这平板上含有 15 个毕达哥拉斯三元数组。[3] 早些给出的数 $25 = 16 + 9$，形成一个毕达哥拉斯三元数组。在 *Plimptom 322* 上的另一个毕达哥拉斯三元数组是 $169 = 144 + 25(13^2 = 12^2 + 5^2)$。并非所有的学者都认为古巴比伦人对这些数感兴趣。一种观点认为他们只是对实际目的有兴趣，并且事