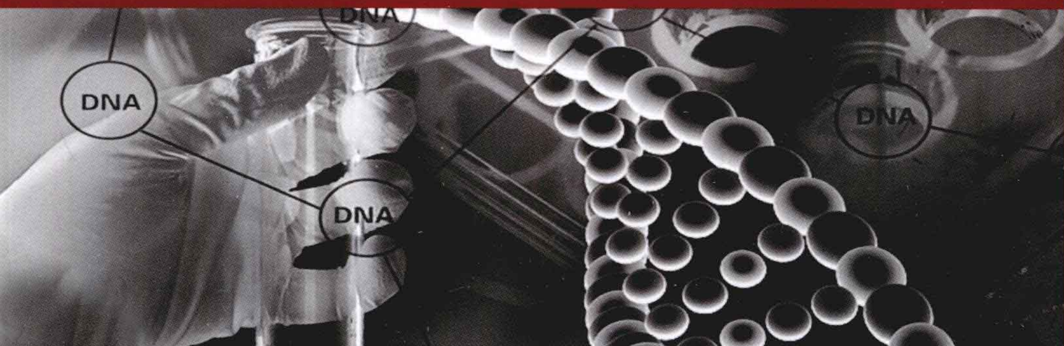
SHENGWUYIXUE
XINXI YU TUXIANGCHULI

生物医学信息与图像处理

◎郭业才　著



科学出版社

生物医学信息与图像处理

生物医学信息与图像处理

郭业才　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书着重介绍了模糊数学在生物医学中的应用方法及以小波理论与神经网络为主要工具的生物医学图像处理技术。内容涉及生物医学信息与图像处理基础理论；模糊数学方法在疾病诊断、中医辨证、青少年个体体质与视力评价、疾病预测、足迹识别等中的应用；以小波变换和脉冲耦合神经网络(PCNN)为工具并结合形态学的超声医学图像去噪算法；基于自适应低通滤波的超声医学图像增强算法及基于小波变换和线型中值滤波的指纹图像增强算法；利用小波多尺度分析和神经网络理论的指纹图像分割与压缩算法，利用整数提升小波和 PCNN 的医学图像分割与压缩算法；根据医学细胞图像边缘灰度级梯度较大、细胞噪声点多的特性，结合形态学与蚁群算法的医学细胞边缘检测算法。

本书内容系统、新颖，适合生物医学工程领域的科技工作者研读，也可作为高等学校相关专业研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

生物医学信息与图像处理/郭业才著. —北京：科学出版社，2010
ISBN 978-7-03-029761-7

Ⅰ. ①生… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①生物医学工程－图像处理 Ⅳ. ①R318.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 246395 号

责任编辑：杨瑰玉 /责任校对：王望容
责任印制：彭 超 /封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉中科兴业印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 12 月第 一 版 开本：B5(720×1 000)
2010 年 12 月第一次印刷 印张：13 3/4
印数：1—2 000 字数：300 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

生物医学信息与图像处理是将生物学、医学、信息科学、计算机技术相融合的交叉边缘学科。它是生物医学工程学科的一个分支，包括生物医学信息处理技术、生物医学图像处理与分析等，是生物医学工程领域中发展最迅速的学科方向之一，也是计算机技术发展的一个新的增长点。其中，生物医学信息学指生物医学信息的获取、处理、存储、分发、分析与解释等内容，以信息学、信息管理和信息技术为依托，综合运用数学、计算机科学、生物学和医学等工具，以阐明和理解大量数据所包含的生物医学意义，用于生物信息识别、医学决策和管理等。生物医学图像处理技术是利用计算机的软、硬件将图像数字化后进行采集、显示、存储和传输，以及将二维图像加工、将二维图像转化为三维图像，对动态图像进行编辑处理，涉及图像分析、识别、分割、解释、分类以及三维重建与显示等方面，目的是增强或提取图像的特征信息，对图像中感兴趣的特定区域进行标定和测量，获取它们的客观信息，从而进行辅助诊断或指导医生进行治疗。基于此背景，作者根据生物医学信息和生物医学图像的特征，以模糊数学、统计学、小波理论和神经网络为工具，结合数学形态学、遗传算法及蚁群算法等优化手段，开展了模糊数学在生物医学信息处理中的应用研究及生物医学图像去噪、增强、分割、压缩与边缘检测等图像处理技术研究。研究成果的大多数均在国内外学术期刊和国际会议上发表，本书正是这一工作的一个小结。

本书着重介绍了模糊数学在生物医学中的应用方法及以小波理论为主要工具的生物医学图像处理技术，希望通过本书的介绍能对读者起到一定的启发作用。本书内容安排如下：第 1 章概述了生物医学信息与图像处理基础理论，涵盖模糊数学的基本理论与方法原理、小波变换基本理论、神经网络与脉冲耦合神经网络(PCNN)的基本原理；第 2 章论述了模糊数学方法在疾病诊断、中医辨证、青少年个体体质与视力评价、疾病预测、足迹识别等中的应用；第 3 章以小波变换和

PCNN为工具并结合形态学，提出了超声医学图像去噪算法；第 4 章提出了基于自适应低通滤波的超声医学图像增强算法与基于小波变换和线型中值滤波的指纹图像增强算法；第 5 章以指纹图像的有效分割为目标，针对局部方差算法缺陷，利用小波多尺度分析和神经网络理论，提出了指纹图像的分割与压缩算法，并根据医学图像的特点和其在辅助诊断中的作用，利用整数提升小波和 PCNN 理论，提出了医学图像的分割与压缩算法；第 6 章根据医学细胞图像边缘灰度级梯度较大、细胞图像噪声点多的特性，结合形态学能够有效去噪、提取图像特征点的优点，提出了先用改进形态学进行图像去噪和边缘加强，再用蚁群算法进行边缘检测的医学细胞图像边缘检测算法。

本书在写作过程中，参阅了该领域相关专著及科研成果，我的研究生王绍波、段宇平和王帅等为本书所取得的成果做了大量工作，本书的成果获得了全国博士学位论文作者专项资金(200753)、江苏省自然科学基金(BK2009410)、江苏省高等学校自然科学基金(08KJB510010)、江苏省“六大人才高峰”培养对象资金(2008026)、南京信息工程大学校级科研机构创新团队启动资金(JG0803，TD0810)等项目的资助；科学出版社给予了大力支持。在此，一并表示诚挚的谢意。

虽然作者反复地斟酌及仔细校对，但限于作者的水平，书中难免会出现一些错误和不妥之处，诚请专家和读者给予批评指正。

郭业才

2010 年 9 月于南京信息工程大学

目录

第 1 章　生物医学信息与图像处理基础

【内容导视】 本章是后续各章内容的基础，主要涉及三个方面：① 模糊数学基础理论，包括模糊集的概念与运算、隶属函数与因素权重集的确定方法及模糊数学方法原理；② 小波变换基本理论，主要有连续小波变换与离散小波变换的概念、多分辨分析方法及图像的小波分解与重构；③ 神经网络基本理论，包括神经网络结构、模型与学习过程，脉冲耦合神经网络的基本原理与性能分析。

本书是以模糊数学、小波变换理论与神经网络理论为工具，对生物医学信息与图像进行分析与处理的，所以下面将介绍这三个方面的基本理论，为后续内容的讨论奠定基础。

1.1　模糊数学基础理论

1965 年美国自动控制专家 Zadeh 提出了模糊集合的概念，引入隶属函数来描述差异的中间过渡，这是精确性对模糊性的一种逼近方法，从而产生了模糊数学。

模糊数学是用定量方法研究和处理具有模糊现象的数学，这种模糊性具有“不分明”和“边界不清”之意。不分明性是指客观事物差异的中间过渡不分明；边界不清是指边界划分的不清晰性，如“高个子与矮个子”、“胖子与瘦子”、“美与丑”、“有矿与无矿”等，都是难以明确划界的。经典数学是建立在集合论基础之上的，在经典集合论中，一个对象对应于一个确定的集合，要么属于，要么不属于，两者必居其一，且仅居其一，绝不模棱两可，边界明确。所以，对于有模糊现象和模糊概念的问题，是无法用经典数学方法解决的。

1.1.1　模糊集合论

1. 模糊集合与运算

(1) 模糊集合概念。论域 $X=\{x\}$ 上的模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 由隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]$ 来表征，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$的大小反映 x 对于模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度。$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$的值接近于 1，表示 x 隶属于$\underset{\sim}{A}$ 的程度很高；$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$的值接近于 0，表示 x 隶属于$\underset{\sim}{A}$ 的程度

很低。

对于模糊集合 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in X$,且 $\forall x \in X$,则有下列关系:

相等: $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

包含: $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leqslant \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

空集: $\underset{\sim}{A} = \varnothing \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$

全集: $\underset{\sim}{A} = \Omega \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$

并集: $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = \vee [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$

交集: $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = \wedge [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$

补集: $\bar{\underset{\sim}{A}} \Leftrightarrow \mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

式中,⇔表示“对应于”。

分解定理:设 $\underset{\sim}{A}$ 为论域 $X = \{x\}$ 上的一个模糊集合,其隶属函数为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0, 1]$, A_λ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集,则 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \bigvee_{\lambda \in [0, 1]} (\lambda \wedge \mu_{A_\lambda})$ 是 A_λ 的特征函数。

(2) 模糊集合的运算性质。模糊集合与普通集合一样,满足自反律、反对称律、传递律、幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、复归律、对偶律。

(3) 模糊集合的代数运算。代数积: $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的代数积记为 $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}$,则 $\mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$。

代数和: $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的代数和记为 $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$,则

$$\mu_{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}}(x) = \begin{cases} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x), & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \leqslant 1 \\ 1, & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) > 1 \end{cases}$$

环和: $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的环和记为 $\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}$,则 $\mu_{\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$。

(4) 模糊集合的运算符号(简称为算子符号),如表 1.1 所示[1]。

表 1.1 算子符号

算子名称	简记符		运算关系式
Zadeh (最大、最小)	$\vee$	$\wedge$	$\begin{cases} a \vee b = \max(a, b) \\ a \wedge b = \min(a, b) \end{cases}$
乘积、最大	$\cdot$	$\vee$	$\begin{cases} a \cdot b = ab \\ a \vee b = \max(a, b) \end{cases}$
最大、乘积	$\vee$	$\cdot$	$\begin{cases} a \vee b = \max(a, b) \\ a \cdot b = ab \end{cases}$

续表

算子名称	简记符		运算关系式
截和、积	$\hat{+}$	$\cdot$	$\begin{cases} a\hat{+}b=a+b-ab \\ a\cdot b=ab \end{cases}$
Einstein	$\overset{+}{\varepsilon}$	$\dot{\varepsilon}$	$\begin{cases} a\overset{+}{\varepsilon}b=\dfrac{a+b}{1-ab} \\ a\dot{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)} \end{cases}$
Bezdk-Harris	$[+]$	$[\cdot]$	$\begin{cases} a[+]b=\min(a+b,\ 1) \\ a[\cdot]b=\max(0,\ a+b-1) \end{cases}$
Hamacher	$\overset{+}{\gamma}$	$\dot{\gamma}$	$\begin{cases} a\overset{+}{\gamma}b=\dfrac{a\hat{+}b-(1-\gamma)ab}{\gamma+(1-\gamma)(1-ab)} & (\gamma\in[0,\ +\infty)) \\ a\dot{\gamma}b=\dfrac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a\hat{+}b)} & (\gamma\in[0,\ +\infty)) \end{cases}$
Yager	$\overset{\vee}{\gamma}$	$\overset{\wedge}{\gamma}$	$\begin{cases} a\overset{\vee}{\gamma}b=\min(1,\ (a^v+b^v)^{1/v}) \quad (v\in[1,+\infty)) \\ a\overset{\wedge}{\gamma}b=1-\min(1,\ [(1-a)^v+(1-b)^v)^{1/v}) \end{cases}$
Schweizer-Sklark	$\breve{\varepsilon}$	$\widehat{\varepsilon}$	$a\breve{\varepsilon}b=\begin{cases} 1-(a^{-p}+b^{-p}-1)^{-1/p} & p>1 \\ a\hat{+}b & p=0 \\ 1-(a^{-p}+b^{-p})^{-1/p} & p<0,\ a^{-p}+b^{-p}\geqslant 1 \\ 1 & p<0,\ a^{-p}+b^{-p}<1 \end{cases}$ $a\widehat{\varepsilon}b=\begin{cases} (a^{-p}+b^{-p}-1)^{-1/p} & p>0 \\ ab & p=0 \\ (a^{-p}+b^{-p}-)^{-1/p} & p<0,\ a^{-p}+b^{-p}>1 \\ 0 & p<0,\ a^{-p}+b^{-p}\leqslant 1 \end{cases}$

2. 模糊关系及其性质

模糊关系在模糊数学中是很重要的概念。模糊关系理论是许多应用原理和方法的基础。

在笛卡尔乘积 $X\times Y \triangleq \{(x,\ y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$ 中的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，是 $X\times Y$ 中的模糊集，$\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,\ y)\in[0,\ 1]$。式中“$\triangleq$”表示“定义为”，下同。

一般情况下，$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_I \triangleq \{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_I)\mid x_1\in X_1,\ x_2\in X_2,\ \cdots,\ x_I\in X_I\}$ 的 I 项模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，是 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_I$ 的模糊集，$\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_I)\in[0,\ 1]$。

模糊关系中的相等、包含、并、交、补、合成的规定如下：

相等关系：$\underset{\sim}{R}_1=\underset{\sim}{R}_2 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x,\ y)=\mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x,\ y)$，$\forall x,\ y\in X$

包含关系：$\underset{\sim}{R}_1 \subseteq \underset{\sim}{R}_2 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, y) \leqslant \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x, y), \forall x, y \in X$

并集关系：$\underset{\sim}{R}_1 \cup \underset{\sim}{R}_2 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, y) \vee \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x, y) = \max\left[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x, y)\right], \forall x, y \in X$

交集关系：$\underset{\sim}{R}_1 \cap \underset{\sim}{R}_2 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x, y) = \min\left[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(x, y)\right], \forall x, y \in X$

补集关系：$\bar{\underset{\sim}{R}} \Leftrightarrow \mu_{\bar{\underset{\sim}{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y), \forall x, y \in X$

合成关系：$\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2 \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}_1 \circ \underset{\sim}{R}_2}(x, y) = \bigvee_{Z}\left[\mu_{\underset{\sim}{R}_1}(x, z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}_2}(z, y)\right], \forall x, y, z \in X$

恒等关系：$I \Leftrightarrow \mu_I(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}, \forall x, y \in X$

全称关系：$E \Leftrightarrow \mu_E(x, y) = 1, \forall x, y \in X$

模糊关系满足自反性与反自反性、对称性与反对称性、传递性等。

自反性与反自反性：$\underset{\sim}{R}$ 是 X 中的模糊关系，对 $\forall x, y \in X$，若 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = 1$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 具有自反性，其相应的矩阵满足：$I \leqslant \underset{\sim}{R}$；若 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, x) = 0$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 具有反自反性，即 $\underset{\sim}{R}$ 的对角线元素全为零。

对称性与反对称性：$\underset{\sim}{R}$ 是 X 中的模糊关系，对 $\forall x, y \in X$，若 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, x)$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 具有对称性，其相应的矩阵满足：$\underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{R}$；若 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, x) = 0$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 具有反对称性，其相应的矩阵满足 $\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}^T \leqslant I$。

传递性：$\underset{\sim}{R}$ 是 X 中的模糊关系，对 $\forall (x, y), (y, z), (x, z) \in X \times X$，若均有 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, z) \geqslant \bigvee_{y}\left[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, z)\right]$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 具有传递性，其相应矩阵满足：$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \leqslant \underset{\sim}{R}$ 或 $\underset{\sim}{R}^2 \leqslant \underset{\sim}{R}$。

若 $\underset{\sim}{R}$ 满足自反性和对称性，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊相容关系。如果 $\underset{\sim}{R}$ 满足自反性、对称性和传递性，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊等价关系。

若 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_I)$ 中的一个自反、对称关系，则称 $\underset{\sim}{R}^{I-1}$ 必为模糊等价关系。对于模糊等价关系 $\underset{\sim}{R}$ 一定满足条件

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, x) = 1;\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, x);\ \underset{\sim}{R}^2 = \underset{\sim}{R}$$

设 $\underset{\sim}{R} = (r_{ij})$，若 $t(\underset{\sim}{R})$ 满足

(1) $(t(\underset{\sim}{R}))^2 \leqslant t(\underset{\sim}{R})$；

(2) $t(\underset{\sim}{R}) \geqslant \underset{\sim}{R}$，$(t(\underset{\sim}{R}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{R}^i)$；

(3) 假若 $\underset{\sim}{R}_1$ 满足(1)和(2)，必有 $\underset{\sim}{R}_1 \geqslant t(\underset{\sim}{R})$，则称 $t(\underset{\sim}{R})$ 为传递闭包。

将模糊相容关系矩阵改造为模糊等价关系，可采用平方法求相容关系的传递闭包：

$$\underset{\sim}{R} \rightarrow \underset{\sim}{R}^2 \rightarrow (\underset{\sim}{R}^2)^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \underset{\sim}{R}^{2^k} = \underset{\sim}{R}^*$$

模糊关系合成的性质：

(1) 结合律：$(\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R}) \circ \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{Q} \circ (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S}) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\mu_{(\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{R})\circ\underset{\sim}{S}}(x,w) &= \bigvee_z \left\{ \bigvee_y \left[\mu_{\underset{\sim}{Q}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, z) \right] \wedge \mu_{\underset{\sim}{S}}(z,w) \right\} \\ &= \bigvee_y \left\{ \mu_{\underset{\sim}{Q}}(x, y) \wedge \bigvee_z \left[\mu_{\underset{\sim}{R}}(y, z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{S}}(z,w) \right] \right\} \\ &= \mu_{\underset{\sim}{Q}\circ(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S})}(x,w)\end{aligned}$$

推论　$\underset{\sim}{R}^m \circ \underset{\sim}{R}^n = \underset{\sim}{R}^{m+n}$

(2) $0 \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R} \circ 0 = 0$

$I \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R} \circ I = \underset{\sim}{R}$

式中，0 为零关系 $\Leftrightarrow \mu_0(x, y) = 0$；

I 为恒等关系 $\Leftrightarrow \mu_I(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$

(3) $\underset{\sim}{Q} \subseteq \underset{\sim}{R} \Rightarrow \underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{S} \subseteq \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S}$(或 $\underset{\sim}{Q} \subseteq \underset{\sim}{R} \Rightarrow \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{Q} \subseteq \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{R}$)

$\underset{\sim}{Q} \subseteq \underset{\sim}{R} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}^n \subseteq \underset{\sim}{R}^n$

(4) 对 $\cup$ 分配：

$$(\underset{\sim}{Q} \cup \underset{\sim}{R}) \circ \underset{\sim}{S} = (\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{S}) \cup (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S})$$

$$\underset{\sim}{S} \circ (\underset{\sim}{Q} \cup \underset{\sim}{R}) = (\underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{Q}) \cup (\underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{R})$$

(5) $(\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R})_\lambda = \underset{\sim}{Q}_\lambda \circ \underset{\sim}{R}_\lambda$

推论　$(\underset{\sim}{R}^n)_\lambda = (\underset{\sim}{R}_\lambda)^n$，　$\lambda \in [0, 1]$

式中，$\underset{\sim}{R}$ 为模糊关系方阵。

(6) $(\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R})^{\mathrm{T}} = \underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}} \circ \underset{\sim}{Q}^{\mathrm{T}}$

推论　$(\underset{\sim}{R}^n)^{\mathrm{T}} = (\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}})^n$

1.1.2　确定隶属函数方法

对于应用问题，首先需要建立模糊集的隶属函数。下面介绍确定隶属函数的一些方法以及要注意的事项。

1. 专家调查法

专家调查法，又称德尔菲法[2]。其特点是集中专家的经验与意识，并通过反馈

不断修改，直到得到比较满意的结果。

设论域 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_I\}$，$\underset{\sim}{A}$ 是 X 中待确定其隶属函数的模糊集。步骤如下：

步骤 1：给出 $\underset{\sim}{A}$ 的影响因素及详细资料，请多位专家独立地对给定的 $x\in X$ 给出隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的估计值 m。

步骤 2：选定 M 位专家，设第 m 位专家第 l 次给出的估计值为 $m_{lm}(l=1, 2, \cdots, L, m=1, 2, \cdots, M)$，则

隶属度的平均值

$$\bar{m}_l=\frac{1}{M}\sum_{m}^{M}m_{ml} \tag{1.1.1}$$

隶属度的离差

$$d_l=\frac{1}{M}\sum_{m}^{M}\mid m_{ml}-\bar{m}_l\mid^2 \tag{1.1.2}$$

步骤 3：修正第 l 次估计值。将第 l 次所得数据不记名地送交各专家，并由其给出新的估计值 m'_{lm}。共进行了 L 次重复实验。

步骤 4：设定离差标准 $\varepsilon>0$，直至离差小于或等于 ε。

步骤 5：再将离差小于或等于 $\varepsilon>0$ 时的 $\bar{m}_l$ 值和 d_l，送交各位专家，请他们给出最终估计值 $m_1, m_2, \cdots, m_m, \cdots, m_M$，其中 m_m 是第 m 位专家给出的最终估计值。同时，要求各位专家给出对自己估计的把握程度 $e_1, e_2, \cdots, e_m, \cdots, e_M$，其中 $e_m\in[0, 1]$。当 $e_m=1$，表示该专家很有把握；当 $0<e_m<1$ 时，表示该专家有充分的把握；当 $e_m=0$ 时，表示该专家根本无把握。

步骤 6：最终估计值与把握度的加权平均化处理。请各位专家根据自己学术地位采用加权处理，即

$$\bar{m}=\frac{1}{M}\sum_{m}^{M}w_m m_m \tag{1.1.3}$$

$$\bar{e}=\frac{1}{M}\sum_{m}^{M}w_m e_m \tag{1.1.4}$$

式中，$w_m>0$ 为加权因子，$\sum_{m=1}^{M}w_m=1$。称 $\bar{m}$ 为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 在把握度 $\bar{e}$ 之下的估计值。当 $w_m=1$ 时，就是平均化处理。

2. 模糊统计法[1, 2]

模糊统计法是利用集值统计估计模糊集的隶属函数的方法，这种方法是用确

定性的手段研究不确定性的问题，通过统计频数来确定隶属度。与概率统计属于两种不同的数学模型。

(1) 随机试验法：在每次试验中，事件 A 发生或不发生必须是确定的。在各次试验中，A 是确定的。在 N 次试验中，事件 A 发生出现的次数为 k，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{N} \tag{1.1.5}$$

随着 N 增大，事件 A 的概率呈现稳定性。用事件 A 的稳定概率作为事件 A 的隶属度。

(2) 模糊统计法：模糊统计法有四要素。

1) 论域 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_I\}$；

2) 固定元素 $x_0 \in X$；

3) 论域 X 上的一个可变动普通集合 A 是模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的弹性疆域，作为对模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 所作的一个确定的划分；

4) 环境条件：划分过程中全部客观及心理的因素。

模糊统计法的要求是：在每次试验中，A 必须是一个取定的普通集合。而且 $x_0 \in X$ 是固定的，A 则是由被试者根据自己主观意见取定的，即被试者对 A 的确定，不能施加任何人为的外界影响。

模糊统计法的具体过程为：

1) 作 N 次试验，然后计算 $x_0 \in X$ 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属频率，即

$$f(x_0) \triangleq x_0 \text{ 对 } \underset{\sim}{A} \text{ 的隶属频率} = \frac{x_0 \in A \text{ 的次数}}{N}$$

随着 N 增大，隶属频率也会呈现稳定性，频率稳定值叫做 x_0 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，即

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0)=\lim_{N\to\infty} f(x_0)$$

2) 对论域 X 上的每个元素所得的隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)(x \in X)$，按其递增的顺序进行排列，得 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的分布；

3) 连续画出 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，得隶属度曲线；

4) 若能对隶属曲线进行拟合，就可得隶属函数。

在实际应用中，常用二相统计法和多相统计法。

I. 二相统计：设 X 是论域，$\underset{\sim}{A}$ 是论域 X 上的模糊集，通过模糊统计求出隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，$x \in X$。

可以采用德尔菲法[2]，不过这里只是让每个专家根据 $\underset{\sim}{A}$ 的含义每次给出一个