经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

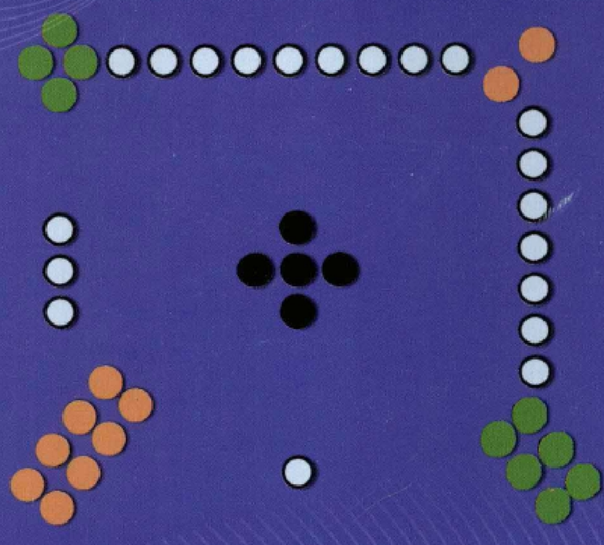
普通高中课程标准

实验教科书

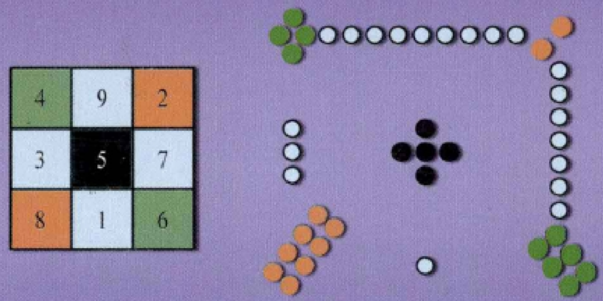
选修系列 3－1

数学史选讲

4	9	2
3	5	7
8	1	6



湖南教育出版社



ISBN 7-5355-4205-0

9 787535 542052 >

G · 4200 定价: 9.00 元

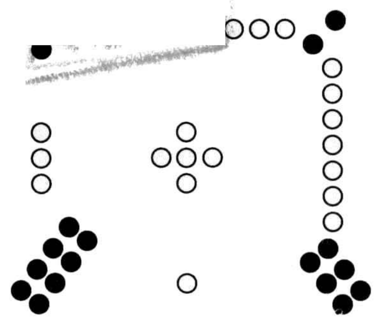
普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 3–1

数学史选讲

4	9	2
3	5	7
8	1	6



湖南教育出版社

普通高中课程标准实验教科书
选修系列 3—1
数学史选讲
责任编辑：孟实华　甘　哲　邹伟华
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司（邵阳）印刷
890×1240　16 开　印张：7.5
2004 年 6 月第 1 版　2005 年 8 月第 3 次印刷
ISBN 7—5355—4205—0/G·4200
定　价：9.00 元
本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换。

主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志

本册主编　王树禾
编　　委　郑志明　孟实华

学习古今数学思想与数学文化

——提升科学文化修养

亲爱的同学们：

数学史选讲课程通过古今数学发展过程中的重要事件、重要人物与重要成果，让同学们了解数学科学的发展规律，体会数学科学对人类文明的极端重要性，加深对数学思想、数学方法与某些重要数学内容的理解，感受数学的文化价值与美学价值，学习数学家们做学问做人的严谨态度、锲而不舍的探索精神和求实批判的思维方式，形成崇尚理性、诚信认真和勤于实践的思想作风.

数学是人类文化的重要内容，在现代文明社会当中，一个不懂数学的人，其生活质量与思维水平一定很低，即使你将来不做数学家，学点数学史，对你将来的人生和事业也会颇有助益.

我们将以无比自豪的心情展示中国古今数学的瑰宝：**勾股定理、《九章算术》、π 的近似值、中国剩余定理、杨辉三角、幻方、天元术**等等，都是当时世界上顶尖的数学成就. 我中华民族善良勤奋、睿智机敏，数学科学乃我之所长. 刘徽、祖冲之、祖暅、一行、秦九韶、杨辉、李冶、朱世杰、华罗庚、陈省身、丘成桐、吴文俊、陈景润等著名数学家，是他们所处时代的世界顶尖数学家之一；今日中国已经发展成世界数学大国，可以指望，21 世纪将是中国数学再度辉煌的时代，人才与成果就出在今日你们这批青少年之中.

古希腊的毕达哥拉斯、欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯是对人类数学事业做出重大成果的“四巨头”，他们创立的“论证数学”与公理系统把数学送入顺利发展的康庄大道，《几何原本》成了数学工作永恒的样板，阿基米德理论与实际相结合的功夫则是数学创造性思想的模范，亚历山大学派的逻辑思维方式是一切自然科学乃至人文科学和社会生活的思想武器，几何三大作图题是数学中会下金蛋的鹅.

笛卡儿和费马创立的解析几何是欧洲文艺复兴之后应运而生的第一项重大数学成果(第二项是微积分)，如果不是他们引入坐标、变量和几何对象的代数表达方式，实现了梦寐以求的数形结合，哪里会有今日的现代数学？解析几何是初等数学与高等数学接壤处的里程碑.

牛顿、莱布尼兹、欧拉、柯西、外尔斯特拉斯等大数学家创立和完善了的微积分是人类科学史上最伟大的创举，它对科学、文化、工程、经济等诸多领域的不可替代的作用，无论怎样高估，也不会过分. 行星和卫星的运动规律是什么？航天器的运动会不会稳定？已知速度如何求每时每刻的路程？或者相反，已知路程如何求每时每刻的速度？等等，这些非常需要有一种一劳永逸地解决办法的问题，被微积分从理论上和算法上有章可循地精确解决了.

康托的无穷集合展示了诸如整体是否一定会大于部分，矩形面积上的点是否比其一条边上的点多等等这些似乎不成问题的问题的非平凡的答案，他的理论结果好似有悖常理，但却严格证明是数学上精彩正确的结论. 而一个类似理发师悖论的罗素悖论促使集合论必须建立自己的公理系统，以免除数学危机.

一次、二次、三次、四次方程都有代数解法，五次或更高次方程呢？他们的根有几个？根与系数关系如何？为什么高于四次的方程一般而言不再有代数解法？欧拉、高斯、韦达、阿贝尔和伽罗瓦解答了这些深刻的问题.

华罗庚证明对几乎所有的偶数，哥德巴赫猜想成立，陈景润证明了“1＋2”，“1＋1”将于何年由何国的何人给出证明呢？数学中有不可判其真亦不可判其假的命题吗？

《原本》中的第五公设看来不太像不证自明，人们欲证明它，几百年却不能得手，于是高斯、波尔约和罗巴切夫斯基等提出三角形内角和小于 π 的公理系统，创立了非欧几何，尽管当初人们觉得不可思议，但非欧几何在逻辑上是严密的，在物理上是有用的，显示了数学公理化的威力.

我国当代数学家吴文俊院士对机器证明有重大突破，发展出一套用计算机证明几何定理的崭新理论与方法，成为20世纪末数学领域

的一朵奇葩. 中国数学家在机器证明方面处于世界最前列.

本课程通过上述各方面的数学大事的介绍与分析和数学史上大数学家做人做学问风采的展示，应该可以提高同学们的思想境界，树立读书做人的明确方向.

祝同学们在数学史的学习过程中成长、成熟、成功，做一个有思想、有抱负、有才能的有为青少年.

作 者

2004 年 5 月

目 录

第1章

中国古今数学的瑰宝

洛书河图，九章十经，勾股天元，

祖率幻方，牟合方盖，大衍求一，

杨辉三角，四元玉鉴；数学瑰宝，

屈指难数，算法绝招，独树一帜.

刘祖祖僧，秦杨李朱，机敏奇才，

后继有人；数学科学，华夏所长，

廿一世纪，重振辉煌.

刘徽（中国魏晋，3 世纪）

祖冲之（中国南北朝，427—500）

1.1 勾股定理

中国古代有 10 部著名的数学著作，它们是《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《辑古算经》、《数术记遗》和《夏侯阳算经》，其中以《周髀算经》为最早，成书于公元前 2 世纪左右，作者是谁尚待考证．“髀”是股骨，周髀是周朝测量日光影长的标杆，长 8 尺．《周髀算经》上记载，大约公元前 11 世纪左右，周朝宰相周公问大夫商高曰：“夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？”商高答曰：“勾广三，股修四，经隅五．”宰相是问没有台阶可以登天，没有尺子可以丈量大地，如何算出天高地广呢？商高告诉这位大臣说按勾三股四弦五的比例计算，见图 1-1．《周髀算经》上还记载了周公的后代荣方与陈子的对话，荣方与陈子是公元前 7 世纪到公元前 6 世纪的人．陈子说：“求斜至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并以开方除之，得斜至日．”这段话不就是现代我们所说的一般勾股定理（直角三角形斜边之长等于两直角边平方和的算术平方根）吗！由上面的文献资料可以判定，中国约在公元前 11 世纪就已经发现了勾股定理，此定理亦称商高定理．

用勾股定理来测天之高地之广是不能实现的，但数学上的道理成立．

“开方除之”就是求算术平方根．

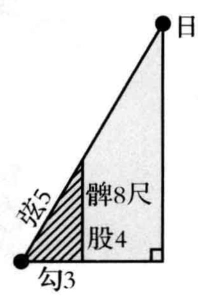


图 1-1

我国古代数学家有寓理于算的学术作风，注重算法，不侧重证明，勾股定理直到公元 3 世纪三国时代才由东吴的数学家赵爽给出证明，赵爽对《周髀算经》研究颇深入，他为《周髀算经》作序说：“爽以暗蔽，才学浅昧，负薪余日，聊观周髀，不能自料，则访贤者．”又说：“若诚能重累思之，则达至微之理．”赵爽经过反复（重累）思考，终于给如图 1-2 所示的勾股定理的一个精美绝伦的证明，这个证明简直就是一篇无字论文．数学史家称赵爽的证法“精深简括，诚算氏之最也”．事实上，正方形 $ABCD$ 的面积 c^2 是 4 个“朱实”（红色直角三角形）

与一个“黄实”（黄色正方形）之和；把$\triangle ADN$与$\triangle ABE$分别割下补到$\triangle CDH$与$\triangle BCG$处，正方形$BEFG$与正方形$DHFN$的面积分别为b^2与a^2，于是得证勾股定理$c^2=a^2+b^2$.

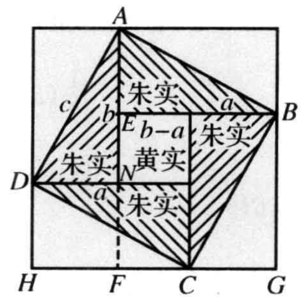


图 1-2

在中国发现勾股定理约 500 年之后，古希腊的毕达哥拉斯学派发现了勾股定理，据传他们的证明如图 1-3 所示. 由于$\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{I}'$，$\triangle \mathrm{II} \cong \triangle \mathrm{II}'$，$\triangle \mathrm{III} \cong \triangle \mathrm{III}'$，$\triangle \mathrm{IV} \cong \triangle \mathrm{IV}'$，于是$c^2=a^2+b^2$. 传说他们发现此定理时，杀了一百头牛摆万人宴庆贺，且称勾股定理为“百牛定理”或毕达哥拉斯定理. 大数学家欧几里得（Euclid，约前 330—前 275）给勾股定理一个称为“新娘的椅子”的证明，见图 1-4. 此证明载于《原本》第一卷（第 47 定理）. 不难看出，

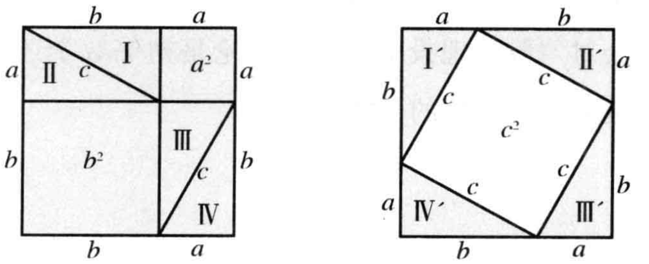


图 1-3

毕达哥拉斯学派的证明显然不如赵爽的证明简练漂亮.

$$AC^2=b^2=2\triangle JAB$$
$$=2\triangle ACD$$
$$=\text{长方形 } ADKL,$$
$$BC^2=a^2=\text{长方形 } BEKL,$$

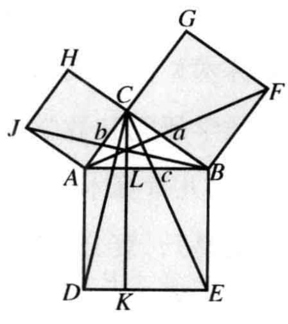


图 1-4

于是 $$AC^2+BC^2=\text{长方形 } ADKL+\text{长方形 } BEKL$$
$$=\text{正方形 } ABED$$
$$=AB^2.$$

1876 年，美国第 20 届总统加菲尔德（Garfield，1831—1881）给出勾股定理另一个简洁的证明，如图 1-5 所示. 事实上，梯形面积为

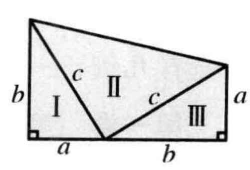


图 1-5

$\triangle Ⅰ+\triangle Ⅱ+\triangle Ⅲ$，于是

$$\frac{1}{2}(a+b)\times(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab,$$

所以
$$c^2=a^2+b^2$$

到目前为止，各国数学家对勾股定理给出了370多种证明，大都用“面积法”来证，我国赵爽的证明是最巧妙的证法之一.

面积法是几何中的一种绝招.

由于勾股定理在几何学中的重要性，中国古代数学中流传“几何即勾股”的说法. 事实上，如果从数学当中选若干最重要的定理，大多数数学家会对勾股定理投下一票，不论是初等数学还是高等数学，勾股定理是绝对不可或缺的公式.

1.2　《九章算术》

《九章算术》是一部算术习题集，也是应用数学的开山之作.

《九章算术》是我国古代最优秀的数学经典之作，是中国古代数学成就的集中体现，是数学历史文献中的佼佼者，大约是汉代人的作品，作者是何人尚待考证，后经刘徽、祖冲之、杨辉等人作注.《九章算术》已译成俄、德、日、英等多种文字在世界各国发行，对世界的数学研究和数学教育，产生过可观的推动作用.

《九章算术》分为方田（计算田亩面积）、粟米（各种谷物如何折合交易）、衰分（物价、俸禄、纳税等分配比例）、少广（有关长度问题）、商功（土木工程中的体积）、均输（平均处理劳务费用等事务）、盈不足（盈亏问题）、方程（用方程解应用题）和勾股（用勾股定理解应用问题），共九卷，号称“九章”. 全书共246道算术应用题，每题的已知都是具体数量，但其中蕴含了深刻有趣的数理内容，下面从中选择几例，一睹九章风采.

第31题今译：

有一块圆形田地，周长30步（每步5尺），直径10步，问这块地多少亩？（亩：原来使用的一种计量土地的单位，现已不用.）

第一卷　第31题　今有圆田，周三十步，经十步，问为田几何？

即已知周长为30步（一步五尺），直径十步，求圆面积. 由此题看出，秦汉时代(当时我国的圆周率的值为$\pi\approx3$）已会求圆面积$S=\pi r^2$.

第二卷　第 76 题　今有出钱五百七十六，买竹七十八个，欲其大小率之，问各几何？

“欲其大小率之”，即按大小两种来计价．设大竹每根 x_1 元，共 y_1 根，小竹每根 x_2 元，共 y_2 根，则应满足下列四元二次不定方程组

$$\begin{cases} x_1y_1+x_2y_2=576, \\ y_1+y_2=78. \end{cases}$$

当时我国古代数学家并不一般地讨论上述不定方程的解，他们有绝招：576÷78 商 7 余 30，每根竹付 7 元钱少给了卖主 30 元钱，从竹子堆里挑出大一点的竹子 30 根说：这 30 根大竹每根按 8 元钱卖，剩下的按每根 7 元钱卖；用这种简便的讨价还价的办法巧妙地得出上述不定方程的解为 $x_1=8$，$y_1=30$，$x_2=7$，$y_2=78-30=48$，由此可见我国古代数学家讲究算法技巧，具体问题具体分析，妥善而精确地加以解决的灵巧绝技．当然，这种具体处理的方式不利于一般理论（例如本题涉及的不定方程理论）的建立．

第三卷　第 88 题　今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？

“日自倍”即下一日是上一日的 2 倍，这是一个等比数列的题目．

第四卷　第 123 题　今有积一百八十六万八百六十七尺，问为立方几何？

此题求 $\sqrt[3]{1\,860\,867}$，说明我国秦汉时代已进行开 3 次方运算．

第五卷　第 153 题　今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺，问积及米几何？

“委米依垣内角”指把收获的粮食在墙角处堆成了一个 $\frac{1}{4}$ 圆锥形米堆，已知圆锥的高和下底周长的 $\frac{1}{4}$，求此米堆的体积．我国秦汉时代已掌握了立体几何中的许多立体体积的计算方法．

第六卷　第 172 题　今有客马日行三百里，客去忘持衣，日已三分之一，主人乃觉，持衣追及，与之而还，至家，视日四分之三，问主人马不停，日行几何？

第 76 题今译：
花 576 块钱买了竹竿 78 根，竹竿按大小两种来定价，问每根大竹竿和每根小竹竿各几块钱？买的大竹竿和小竹竿各几根？

中国古代数学以算法（术曰）取胜，但理论探讨和一般化的算法不多．

第 88 题今译：
有一位女子擅长织布，5 天织了 5 尺布，已知她次日织的布是前一天的 2 倍，求她每天所织的布各几尺．

我国秦汉时代已知等比数列求和：$5=S=a_1\frac{1-2^5}{1-2}$，得 $a_1, a_2=2a_1, \cdots, a_5=2a_4$．

第 123 题今译：
已知立方体体积为 1 860 867 尺^3，求此立方体的棱长．

第 153 题今译：
墙角有一堆米，米堆底的外部周长 8 尺，米堆高 5 尺，求这堆米的体积．

第 172 题今译：
清晨，客人骑马告别，已知客人的马每日行 300 里；过了 $\frac{1}{3}$ 天，