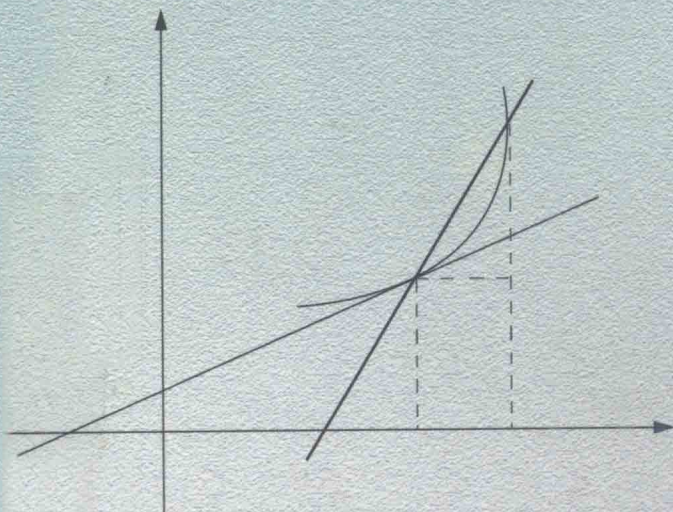


经济数学基础（一）

微 积 分

疑难解析

主 编 谢延波
副主编 刘 满



吉林人民出版社

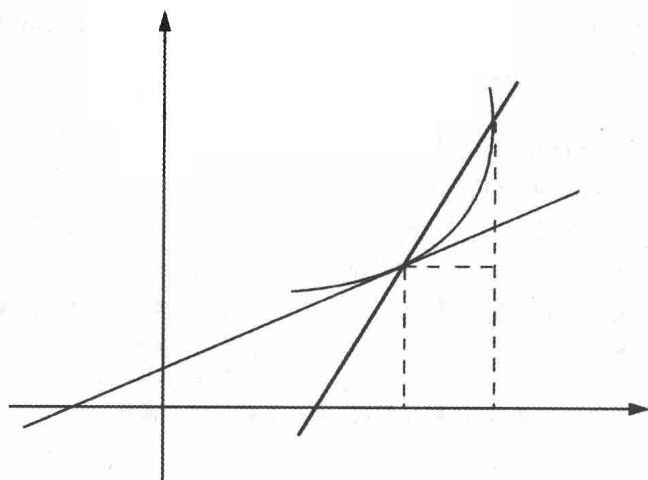
经济数学基础（一）

微 积 分

疑难解析

主 编 谢延波

副主编 刘 满



吉林人民出版社

微积分疑难解析 WEIJIFENYINANJIEXI

主 编:谢延波 副 主 编:刘 满

责任编辑:贺 萍 封面设计:张沐沉 责任校对:谢延波

吉林人民出版社出版 发行(长春市人民大街 4646 号 邮政编码:130021)

电 话:0431 - 5649674

印 刷:长春方圆印业有限公司

开 本:850mm × 1168mm 1 / 32

印 张:11.75 字数:300 千字

标准书号:ISBN 7 - 206 - 03309 - 1 / G · 1406

版 次:2004 年 6 月第 1 版 印 次:2004 年 6 月第 1 次印刷

印 数:1 - 3 000 册 定 价:18.80 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

前 言

随着我国社会主义经济建设的发展,经济数学方法的研究和应用日益受到广泛重视。作为经济应用数学基础主要课程之一的《微积分》是财经、管理专业的必修课。但该课程的某些内容,如概念理解、运算技巧等方面对某些初学者有一定的困难,因此我们编写了这本书。它可以对初学者起到学习辅导作用,也可以给报考研究生的读者作为基本参考书。

本书以中国人民大学出版社出版,赵树嫄主编的《经济应用数学基础(一)微积分》为主要教科书,同时也兼顾了其它类似教材内容。

本书每章分五个部分。

第一部分为内容提要,概括了主要概念、定理、公式等基本内容。

第二部分为《微积分》中(A)、(B)两类题的选解,对其中大部分习题(包括所有较难解带*号题)给出了解答。但希望初学者能先独立思考,自己解答,然后再与题解对照。其中尚未完成部分留给读者自己独立完成,因为任何参考书只能起到帮助学习而不能起到代替学习的作用。

第三部分是综合题解,这部分题与《微积分》习题顺序相对应,为使读者开阔眼界,提高综合解题的能力,这部分内容选择了具有概念性强,计算技巧灵活的例题,既有基本题,也有一定难度的综合题,希望读者能举一反三,触类旁通。

第四部分为练习题,在每章之后配有习题供读者练习,读者通过解题可以进行基本训练,增强解题能力,并检验自己对所学知识的掌握程度。

第五部分为答案。

本书旨在帮助读者加深对“微积分”基本概念的理解;掌握“微积分”的解题方法和技巧,增强分析问题、解决问题以及应试能力,希望能成为您的良师益友。

由于水平有限,书中难免有疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

2004 年 6 月

目 录

第一章 函数

内容提要	(1)
习题一选解	(1)
综合题解一	(20)
同步练习题一	(24)
答案	(25)

第二章 极限与连续

内容提要	(26)
习题二选解	(29)
综合题解二	(48)
同步练习题二	(57)
答案	(61)

第三章 导数与微分

内容提要	(63)
习题三选解	(64)
综合题解三	(86)
同步练习题三	(97)
答案	(100)

第四章 中值定理, 导数的应用

内容提要·····	(102)
习题四选解·····	(103)
综合题解四·····	(134)
同步练习题四·····	(148)
答案·····	(151)

第五章 不定积分

内容提要·····	(153)
习题五选解·····	(155)
综合题解五·····	(176)
同步练习题五·····	(187)
答案·····	(190)

第六章 定积分

内容提要·····	(192)
习题六选解·····	(195)
综合题解六·····	(223)
同步练习题六·····	(239)
答案·····	(244)

第七章 无穷级数

内容提要·····	(246)
习题七选解·····	(251)
综合题解七·····	(268)
同步练习题七·····	(282)

答案.....	(285)
---------	-------

第八章 多元函数

内容提要.....	(287)
习题八选解.....	(292)
综合题解八.....	(317)
同步练习题八.....	(330)
答案.....	(334)

第九章 微分方程与差分方程简介

内容提要.....	(337)
习题九选解.....	(339)
综合题解九.....	(355)
同步练习题九.....	(363)
答案.....	(365)

第一章 函 数

内容提要

1. 集合:具有某种共同性质的一些对象的全体.

2. 区间:两个实数之间的全体实数.

3. 邻域: x_0 和 δ 为两个实数, $\delta > 0$, 则满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的全体实数称为点 x_0 的 δ 邻域, x_0 为邻域中心, δ 为邻域半径.

4. 函数:设 x, y 是两个变量, D 是给定的数集, 如果对任一 $x \in D$, 变量 y 按一定的法则总有确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记 $y = f(x)$, D : 定义域, f : 对应关系

(1) 几何特性:单调性, 有界性, 奇偶性, 周期性等.

(2) 反函数:设函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别为 D 与 W , 如果对任一 $y \in W$, 总有 $x \in D$ 与之对应, 则 x 为 y 的函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$ (或 $x = \varphi(y)$). 习惯记法: $y = f^{-1}(x)$, 为 $y = f(x)$ 的反函数.

(3) 复合函数:设 $y = f(u)$ 的定义域为 D , $u = \varphi(x)$ 的定义域是 X , 值域为 U , 若 $U \subseteq D$, 则 $y = f[\varphi(x)]$, 为 x 的复合函数.

(4) 初等函数:由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次函数的复合构成的可用一个式子表示的函数为初等函数.

习题一选解

(A)

1. 按下列要求举例:

- (1) 一个有限集合; (2) 一个无限集合;
 (3) 一个空集; (4) 一个集合是另一个集合的子集

解: (1) 一个有限集合: 如 $A = \{x \mid x^2 = 4\}$

或 $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(2) 一个无限集合: 如 $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^n}, n \text{ 为正整数} \right\}$,

或 $A = \{\text{全体实数}\}$

(3) 一个空集: 如 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = -2, x, y \in R\}$

(4) 一个集合是另一个集合的子集:

$A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 5, 6\}$, 则有 $A \subset B$, 即 A 是 B 的子集, 或 $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$

$B = \{x \mid |x| \leq 5\}$, 则有 $A \subset B$, 即 A 是 B 的子集.

2. 用集合的描述法表示下列集合:

- (1) 大于 5 的所有实数集合;
 (2) 大于 20 的正整数集合;
 (3) 圆 $x^2 + y^2 = 25$ 内部一切点的集合,

解: (1) $A = \{x \mid x > 5, x \in R\}$

(2) $A = \{x \mid x > 20, x \text{ 为正整数}\}$

(3) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25, x, y \in R\}$

4. 下列集合哪些是空集:

$$A = \{x \mid x + 1 = 0\}$$

$$C = \{x \mid x > 1, \text{且 } x < 0\}$$

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \text{且 } x + y = 3, x, y \text{ 均为实数}\}$$

解: $A = \{x \mid x + 1 = 0\} = \{x \mid x = -1\}$,

$\therefore A$ 不是空集

$C = \{x \mid x > 1, \text{且 } x < 0\}$ 是空集,

$\therefore x$ 不能同时大于 1, 小于 0

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \text{且 } x + y = 3, x, y \in R\}$$

$$\text{而 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}, (y-3)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 - 3y + 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 1 = -7 < 0, \text{ 而 } x, y \text{ 均为实数}$$

$\therefore y^2 - 3y + 4 = 0$ 无解, 即 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x + y = 3$ 无交点

$\therefore E$ 为空集

6. 如果 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, 下列各种写法, 哪些是对的? 哪些不对?

$$1 \in A \quad 0 \in B \quad \{1\} \in A \quad 1 \subset A \quad \{1\} \subset A$$

$$0 \subset A \quad \{0\} \subset A \quad \{0'\} \subset B \quad A = B \quad A \supset B$$

$$\varnothing \subset A \quad A \subset A$$

解: 正确的有: $1 \in A, 0 \in B, \{1\} \subset A, \{0\} \subset A, A \supset B, \varnothing \subset A, A \subset A$;

错误的有: $\{1\} \in A, 1 \subset A, 0 \subset A, \{0'\} \subset B, A = B$

8. 如果 A 表示会英语的人的集合, B 表示会日语的人的集合, 那么 $A', B', A - B, (A \cup B)', (A \cap B)'$ 各表示什么样的人的集合.

解: A' 表示不会英语的人的集合;

B' 表示不会日语的人的集合;

$A - B$ 表示只会英语人的集合;

由 $A \cup B$ 表示会英语或日语人的集合,

$\therefore (A \cup B)'$ 表示不会英语也不会日语人的集合,

由 $A \cap B$ 表示即会英语又会日语的集合,

$\therefore (A \cap B)'$ 表示除了即会英语也会日语的人, 其它人的集合.

$$10. \text{ 如果 } A = \{(x, y) \mid x - y + 2 \geq 0\}$$

$$B = \{(x, y) \mid 2x + 3y - 6 \geq 0\}$$

$$C = \{(x, y) \mid x - 4 \leq 0\}$$

在坐标平面上标出 $A \cap B \cap C$ 的区域

解:图 1-1 中三直线相交成三角形,即为 $A \cap B \cap C$.

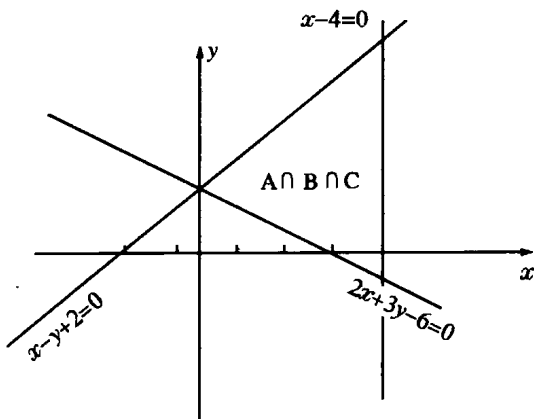


图 1-1

14. 已知 $A = \{a, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, b\}$, 若 $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, 求 a 和 b .

解: 由 $A \cap B = \{a, 3, b\} = \{1, 2, 3\}$

$\therefore A$ 和 B 中必包含 1, 2, 3 三个元素,

$\therefore a = 1, b = 2$.

15. 调查了某地区 100 个公社, 其中 70 个公社小麦亩产量在 250 公斤以上, 以集合 A 表示这些公社; 40 个公社棉花亩产量在 60 公斤以上, 以集合 B 表示这些公社; 小麦亩产在 250 公斤以上而棉花亩产在 60 公斤以下的有 55 个公社. 试用集合关系表示下列各类公社, 并计算出各类型公社的数目:

(1) 麦、棉两项亩产量均达到上述指标的公社;

(2) 小麦亩产量未达到 250 公斤以上而棉花亩产量在 60 公斤以上的公社;

(3) 麦、棉中至少有一项达到上述指标的公社;

(4) 麦、棉两项均未达到上述指标的公社.

解: (1) $A \cap B = 70 - 55 = 15$.

$$(2) A' \cap B = 40 - 15 = 25.$$

$$(3) A \cup B = 70 + 40 - 15 = 95$$

$$(4) (A \cup B)' = 100 - 95 = 5$$

17. 用第8题的集合 A 与集合 B , 验证摩根律

解: A : 会英语的人的集合 B : 会日语的人的集合

(1) $\because (A \cup B)'$ 表示不会英语也不会日语的人的集合

$\therefore A' \cap B'$ 也表示不会英语也不会日语的人的集合

$$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$$

(2) $\because (A \cap B)'$ 表示不是即会英语又会日语的人的集合

$A' \cup B'$ 表示不会英语或不会日语的人集合, 即除会英、日两种语言之外的人的集合

$$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$$

18. 用集合运算律证明: $X \cup (X \cap Y)' \cup Y = U$

$$\begin{aligned} \text{证: 左} &= X \cup (X \cap Y)' \cup Y = X \cup (X' \cup Y') \cup Y \\ &= (X \cup X') \cup (Y' \cup Y) = U \cup U = U \end{aligned}$$

20. 如果 $X = Y = \{3, 0, 2\}$, 求 $X \times Y$.

$$\begin{aligned} \text{解: } X \times Y &= \{3, 0, 2\} \times \{3, 0, 2\} = \{(3, 3), (0, 3), (2, 3), \\ &\quad (3, 0), (0, 0), (2, 0), (3, 2), (0, 2), (2, 2)\} \end{aligned}$$

22. 设集合 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$, 求 $X \times Y \times Z$.

$$\begin{aligned} \text{解: } X \times Y \times Z &= \{x_1, x_2, x_3\} \times \{y_1, y_2\} \times \{z_1, z_2\} \\ &= \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_1, z_1), (x_3, y_1, z_1), (x_1, y_2, z_1), \\ &\quad (x_2, y_2, z_1), (x_3, y_2, z_1), (x_1, y_1, z_2), (x_2, y_1, z_2), (x_3, y_1, z_2), \\ &\quad (x_1, y_2, z_2), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_2, z_2)\} \end{aligned}$$

24. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

$$(1) |x| \leq 3 \quad (2) |x - 2| \leq 1$$

$$(3) |x - a| < \varepsilon, (a \text{ 为常数}, \varepsilon > 0)$$

$$(4) |x| \geq 5 \quad (5) |x + 1| > 2$$

$$\text{解: (1) } |x| \leq 3$$

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

$$(2) \mid x - 2 \mid \leq 1$$

$$\{x \mid 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]$$

$$(3) \mid x - a \mid < \epsilon$$

$$\{x \mid a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$$

$$(5) \mid x + 1 \mid > 2$$

$$\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 1\} = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

26. $y = \lg(-x^2)$ 是不是函数关系?为什么?

解:不是

$\because$ 无论 x 为什么实数, $-x^2 < 0$, $\lg_a x$ 的定义域为 $x > 0$,

$\therefore -x^2$ 不在定义域内, 又定义域不能是空集.

$\therefore$ 不是函数关系.

28. 确定下列函数定义域

$$(5) y = 1 - e^{1-x^2} \quad (6) y = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{\mid x \mid - 1}}$$

$$(7) y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}} \quad (8) y = \frac{\arccos \frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

解:(5) 对 x 取任意实数, 函数均有意义

$\therefore x \in R$ 为 $y = 1 - e^{1-x^2}$ 的定义域

$$(6) \text{ 由 } \begin{cases} 3-x > 0 \\ \mid x \mid - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

$\therefore 1 < x < 3$, 或 $x < -1$ 为函数的定义域

$$(7) \begin{cases} \lg \frac{5x-x^2}{4} \geq 0 \\ \frac{5x-x^2}{4} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \\ (5-x)x > 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 5x-x^2-4 \geq 0 \\ 0 < x < 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-4)(x-1) \leq 0 \\ 0 < x < 5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 < x < 5 \end{cases}$$

$\therefore 1 \leq x \leq 4$ 为函数的定义域

$$(8) \because \begin{cases} -1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1 \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7 \leq 2x-1 \leq 7 \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ x < -2 \text{ 或 } x > 3 \end{cases} \quad \text{即 } -3 \leq x < -2 \text{ 或 } 3 < x \leq 4 \text{ 为函数定义域}$$

29. 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(0)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(x+1)$.

$$\text{解: } f(0) = 0 - 0 + 2 = 2.$$

$$f(\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x})^2 - 3(\frac{1}{x}) + 2 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = x^2 - x.$$

30. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

$$\text{解: } f[f(x)] = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

32. 如果 $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$, 证明: $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{aligned} \text{证明: } f(-x) &= \frac{e^{-(-x)} - 1}{e^{-(-x)} + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} \\ &= \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{e^{-x} - 1}{1 + e^{-x}} = -f(x) \end{aligned}$$

34. 如果 $f(x) = a^x$, 证明:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y), \frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y)$$

证明: 由 $f(x) = a^x$

$$\therefore f(x)f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$$

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = f(x-y)$$

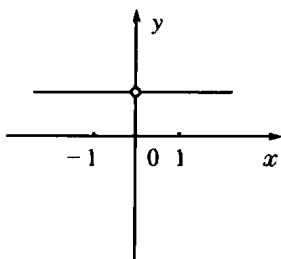


图 1-2

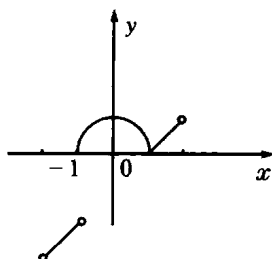


图 1-3

36. 确定下列函数的定义域并作出函数的图形

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ x-1 & 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

解: (1) x 取任何实数, y 都有相应的对应值, $\therefore x \in R$

如图 1-2

$$(2) |x| \leq 1 \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{又 } 1 < |x| < 2, \therefore \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

$\therefore -2 < x < 2$ 为 $f(x)$ 的定义域, 如图 1-3

$$38. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } f(x-1), f(x^2-1)$$

$$\text{解: } f(x-1) = \begin{cases} 1 & x-1 < 0 \\ 0 & x-1 = 0 \\ 1 & x-1 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(x-1) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f(x^2-1) = \begin{cases} 1 & x^2-1 < 1 \\ 0 & x^2-1 = 1 \\ 1 & x^2-1 > 1 \end{cases}$$

$$\therefore f(x^2-1) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ 1 & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

$$39. \text{ 设 } \varphi(x+1) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \leq 2 \end{cases}, \text{ 求 } \varphi(x).$$

$$\text{解: } \varphi(x+1) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\therefore \varphi(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 2(x-1) & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

42. 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱, 试将圆柱的体积表示为其高的函数, 并确定此函数的定义域.

解: 设圆柱的高为 h , 底半径为 R

$$\therefore R = \sqrt{r^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$\therefore V = \pi R^2 h = \pi h \left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

定义域为 $0 < h < 2r$.

44. 拟建一个容积为 V 的长方体水池, 设它的底为正方形, 如果池底所用材料单位面积的造价是四周单位面积造价的 2 倍, 试将总造价表示成底边长的函数, 并确定此函数的定义域.

解: 设总造价为 P , 底边长为 a , 高为 h , 容积为 V , 面积为 S , 则