21 世纪普通高等教育基础课规划教材

工科物理教程

◎ 魏京花 余丽芳 黄伟 等编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

工 科 物 理 教 程

魏京花　余丽芳　黄　伟　马黎君　苏欣纺　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据教育部最新颁布的《理工科类大学物理课程教学基本要求》和国内工科物理教材改革动态，并结合编者多年从事工科物理教学经验编写而成的。本书主要内容有：经典力学、振动与波动、热学、电磁学、波动光学和近代物理六个部分共十三章。每章由教学基本内容、例题、章节要点、习题四部分组成，书后附有习题答案。

本书主要为物理教学课时较少（96 学时及以下）的工科大学物理课程的教材，也可供其他学习物理的社会读者选用。

图书在版编目（CIP）数据

工科物理教程/魏京花等编著．—北京：机械工业出版社，2011.2
21 世纪普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-32535-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①魏… Ⅲ.①物理学-高等学校-教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 251052 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：李永联 责任编辑：李永联 任正一
版式设计：霍永明 责任校对：李锦莉
封面设计：赵颖喆 责任印制：杨 曦
北京京丰印刷厂印刷
2011 年 2 月第 1 版 · 第 1 次印刷
184mm×260mm · 19.25 印张 · 476 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-32535-2
定价：33.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　　言

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式及相互作用和转化规律的科学。它的基本理论渗透在自然科学的各个领域，广泛应用于生产技术，是自然科学和工程技术的基础。物理学是高等学校理工科各专业学生一门重要的必修基础课，它在培养学生现代科学的自然观、宇宙观和辩证唯物主义世界观；培养学生的探索、创新精神和科学思维能力，掌握科学方法等方面，都起到其他课程不可替代的重要作用。

本书内容概括了大学物理学教学的最基本要求。在编写中力求使学生掌握物理学的基本概念和规律，建立较完整的物理思想，同时渗透人文社会科学知识，让学生活用所学知识，加强应用能力，实现知识、能力与素质的协调发展。为了帮助学生掌握各章内容的体系结构与脉络，每章编有章节要点和习题。书末附有物理学常用数据及常用数学公式，以方便学生使用。本书还有少量的阅读材料以拓展知识面。全书讲授约需100学时。

本书主编为魏京花、副主编为余丽芳。全书由魏京花、余丽芳、黄伟、马黎君和苏欣纺五位教师共同完成。第一章、第二章、第六章和第七章由魏京花编写，第三章由马黎君编写，第四章、第五章、第十章和第十一章由余丽芳编写，第八章和第九章由苏欣纺编写，第十二章和第十三章由黄伟编写。第三章、第四章、第五章、第十章、第十一章、第十二章和第十三章由魏京花审稿，第一章、第二章、第六章、第七章、第八章和第九章由余丽芳审稿，全书由魏京花负责统稿和定稿。

师华教授仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵意见。本书在编写过程中参考了近年来出版的部分优秀大学物理教材（见参考文献），同时得到北京市优秀教学团队——北京建筑工程学院大学物理教学团队全体教师的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免会出现缺点和错误，恳请使用本教材的师生和读者不吝提出宝贵意见。

编　者

目　　录

前言

第一章　质点运动学 …… 1

第一节　位置矢量和位移 …… 1

第二节　速度与加速度 …… 3

第三节　直线运动 …… 6

第四节　平面曲线运动 …… 8

第五节　相对运动 …… 12

本章要点 …… 14

习题一 …… 15

第二章　质点动力学 …… 19

第一节　牛顿运动定律 …… 19

第二节　动量　动量守恒定律 …… 23

第三节　质点的角动量定理　角动量守恒定律 …… 28

第四节　动能　动能定理 …… 31

第五节　势能　机械能转化及守恒定律 …… 36

阅读材料 1　火箭与宇宙速度 …… 41

本章要点 …… 44

习题二 …… 45

第三章　刚体的定轴转动 …… 49

第一节　刚体定轴转动的运动学 …… 49

第二节　刚体定轴转动的动力学 …… 51

阅读材料 2　行星与人造地球卫星 …… 62

本章要点 …… 64

习题三 …… 65

第四章　机械振动 …… 68

第一节　简谐振动的基本概念和规律 …… 68

第二节　旋转矢量 …… 72

第三节　简谐振动的能量 …… 74

第四节　阻尼振动　受迫振动和共振 …… 74

第五节　简谐振动的合成 …… 77

阅读材料 3　非线性振动简介 …… 80

本章要点 …… 81

习题四 …… 82

第五章　机械波 …… 84

第一节　机械波的产生及其特征量 …… 84

第二节　平面简谐波 …… 86

第三节　波的能量 …… 88

第四节　波的传播 …… 90

第五节　波的叠加　驻波 …… 92

第六节　多普勒效应 …… 95

阅读材料 4　声波　声强级 …… 96

本章要点 …… 98

习题五 …… 99

第六章　气体动理论 …… 102

第一节　平衡状态　理想气体状态方程 …… 102

第二节　理想气体的压强公式与温度公式 …… 105

第三节　能量按自由度均分定理　理想气体的内能 …… 109

第四节　分子速率分布与平均自由程 …… 113

本章要点 …… 118

习题六 …… 118

第七章　热力学基础 …… 122

第一节　体积功　热量　内能 …… 122

第二节　热力学第一定律及其应用 …… 124

第三节　循环过程 …… 128

第四节　卡诺循环 …… 132

第五节　热力学第二定律 …… 135

第六节　熵与熵增原理 …… 137

本章要点 …… 138

习题七 …… 139

第八章　静电场 …… 143

第一节　电现象的基本概念 …… 143

第二节　库仑定律　电场强度 …… 144

第三节　电场强度通量　高斯定理 …… 149

第四节　电势能　电势 …… 156

第五节　静电场中的导体和电介质 …… 162

第六节　电容　电容器　静电场的能量 …… 169

本章要点 …… 173

习题八 …… 175

第九章　稳恒磁场 …… 182

第一节　磁场　磁感应强度 …………………… 182
第二节　毕奥-萨伐尔定律 …………………… 183
第三节　磁场的高斯定理和安培环路定理 …………………… 186
第四节　磁场对运动电荷和载流导线的作用 …………………… 191
第五节　磁场中的磁介质 …………………… 197
本章要点 …………………… 201
习题九 …………………… 202
第十章　电磁感应　电磁场 …………………… 209
第一节　电磁感应现象　楞次定律 …………………… 209
第二节　电动势　法拉第电磁感应定律 …………………… 210
第三节　动生电动势　感生电动势 …………………… 213
第四节　自感和互感 …………………… 215
第五节　磁场的能量 …………………… 218
第六节　位移电流　麦克斯韦方程组 …………………… 219
阅读材料5　电磁感应定律在生活中实际应用 …………………… 222
本章要点 …………………… 223
习题十 …………………… 224
第十一章　波动光学 …………………… 229
第一节　光的干涉 …………………… 229
第二节　光的衍射 …………………… 239
第三节　光的偏振 …………………… 246
本章要点 …………………… 251
习题十一 …………………… 253
第十二章　狭义相对论 …………………… 258
第一节　伽利略变换　经典力学的时空观 …………………… 258
第二节　狭义相对论基本原理　洛伦兹变换 …………………… 259
第三节　狭义相对论的时空观 …………………… 262
第四节　狭义相对论动力学基础 …………………… 266
本章要点 …………………… 269
习题十二 …………………… 270
第十三章　量子物理基础 …………………… 273
第一节　光电效应　爱因斯坦方程 …………………… 273
第二节　光的波粒二象性 …………………… 276
第三节　玻尔氢原子理论 …………………… 277
第四节　德布罗意波 …………………… 282
第五节　海森伯不确定关系式 …………………… 284
本章要点 …………………… 286
习题十三 …………………… 287
附录 …………………… 290
附录A　国际单位制（SI） …………………… 290
附录B　常用物理常量 …………………… 291
附录C　常用数学公式 …………………… 291
习题答案 …………………… 294
参考文献 …………………… 302

第一章 质点运动学

物体之间或同一物体各部分之间相对位置的变动称为机械运动（简称为运动）。机械运动是自然界中最简单、最普遍的一种运动形式，物理学中把研究机械运动的规律及其应用的学科称为力学。

质点是力学中的理想模型之一，是为了研究问题的方便，突出主要矛盾，忽视次要矛盾而抽象出来的理想模型，它是有质量而无线度的物体。任何物体都有一定的大小，但当其线度对所讨论的问题影响很小，且物体内部运动状态差别可忽略时，可把物体看做质点。描述质点运动状态变化的物理量有：位置矢量、位移、速度和加速度等。本章主要研究这四个物理量之间的相互关系及如何用它们来描述物体的机械运动。研究物体位置随时间的变化或运动轨道问题而不涉及物体发生运动变化原因的学科称为运动学。

第一节 位置矢量和位移

一、参考系与坐标系

物体的机械运动是指它的位置随时间的改变。位置总是相对的，即任何物体的位置总是相对于其他物体或物体系来确定的。这个其他的物体或物体系就叫做确定运动物体位置的参考系，简而言之：被选做参考的物体或物体系称为参考系。

例如，当确定交通车辆的位置时，我们用固定在地面上的一些物体，如房子或路牌作为参考系，这样的参考系通常称为地面参考系。在物理实验中，确定某一物体的位置时，我们就用固定在实验室内的物体，如周围的墙壁或固定的实验桌作为参考系，这样的参考系称为实验室参考系。

经验告诉我们，相对于不同的参考系，同一物体的同一运动会表现为不同的运动形式。例如，一自由落体的运动，在地面参考系中观察时，它是竖直向下的直线运动，如果在近旁驶过的车厢内观察，即以一行进的车厢为参考系，则该物体将作曲线运动。物体的运动形式随参考系的不同而不同，这个事实就是运动的相对性。由于运动的相对性，当我们确定一个物体的运动时就必须指明是相对于哪个参考系来说的。宇宙中的所有物体都处于永不停止的运动中，这就是与之相对应的运动的绝对性。

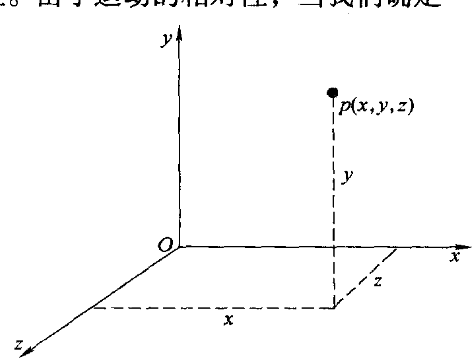

图 1-1 质点的位置表示

当确定了参考系后，为了确切地、定量地说明一个质点相对于此参考系的位置，需要在此参考系上固结一个坐标系。最常见的是笛卡儿坐标系，但有时为了研究问题的方便，还选用极坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系等。对于笛卡儿坐标系而言，称一固结点为坐标原点，记作 O，从坐标原点沿三个相互垂直的方向引三条固

定的且有刻度和方向的直线作为坐标轴，通常记作 x、y、z 轴，如图 1-1 所示。于是，在这样的坐标系中，一个质点在任意时刻的位置将会准确给出，如 P 点就可以用坐标 $P(x, y, z)$ 来表示。

二、位置矢量（运动方程）

由于运动是与时间有关的，在不同的时刻，质点的位置不同，也就是说位置是随时间而变化的，用数学函数的形式来表示，即

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1-1}$$

这样的一组函数称为质点的运动方程。

将质点的运动方程消去时间参数 t，得到与坐标相关的方程称为质点的轨道方程，在坐标系中可画出相应的轨道曲线。

为了确定质点在空间的位置，我们可以使用位置矢量这一更简洁、更清楚的概念。图 1-2 中质点 P 的位置可以用笛卡儿坐标系中的三个坐标 x、y、z 确定，如果从原点 O 向 P 作有向线段 $\boldsymbol{r}$，显然，有向线段 $\boldsymbol{r}$ 与 P 点的位置 (x,y,z) 有一一对应的关系，因此可以借用从参考点 O 到 P 的有向线段 $\boldsymbol{r}$ 来表示 P 点的位置，我们称 $\boldsymbol{r}$ 为 P 点的位置矢量，若以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 轴的单位矢量，则在笛卡儿坐标系中 P 点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

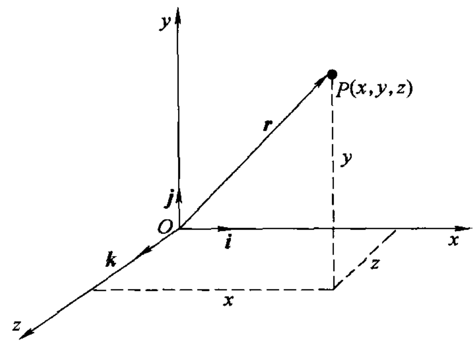

图 1-2　位置矢量

式（1-1）中各函数表示质点位置的各坐标值随时间的变化情况，可以看做是质点沿各个坐标轴的分运动表达式。质点的实际运动由式（1-1）中的三个函数的总体式（1-2）表示。同时，式（1-2）也表明：质点的实际运动是各分运动的矢量和，这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系称为运动叠加原理。

在国际单位制（SI）中，位置矢量的量纲单位为米（m），大小和方向分别用其模和方向余弦来表示，即

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

如：若质点 P 的位置为（2，3，4），则它的位置矢量为 $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

质点 P 的位置矢量大小为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}\mathrm{m} = \sqrt{29}\mathrm{m}$$

质点 P 的位置矢量的方向余弦为

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i}) = \frac{2}{\sqrt{29}},\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j}) = \frac{3}{\sqrt{29}},\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

三、位移矢量

从运动质点初始时刻所在位置指向运动质点任意时刻所在位置的有向线段称为在对应时间内的位移矢量（简称位移）。如图1-3所示，质点P沿图中曲线运动，t时刻位于P_1点，$t+\Delta t$时刻位于P_2点。P_1，P_2两点的位置矢量分别为$\boldsymbol{r}(t)$和$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，在时间$\Delta t$内质点的空间位置变化可用矢量$\Delta\boldsymbol{r}$来表示，其关系式为

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\Delta\boldsymbol{r} \qquad (1\text{-}3)$$

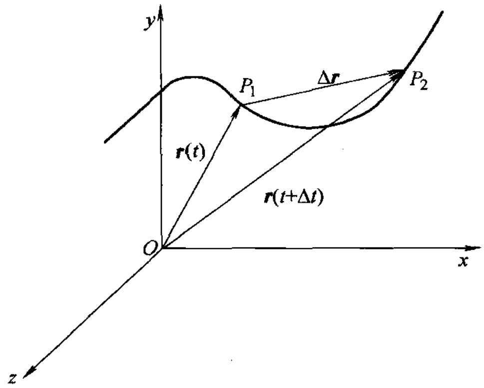

图1-3　位移矢量

$\Delta\boldsymbol{r}$是描述质点空间位置变化的物理量，它同时也表示了质点位置变化的距离和方向。

位移不同于位置矢量。在质点运动过程中，位置矢量表示某时刻质点的位置，它描述该时刻质点相对于坐标原点的位置状态，是描述状态的物理量。位移则表示某段时间内质点位置的变化，它描述该段时间内质点状态的变化，是与运动过程相对应的物理量。

位移也不同于路程。质点从P_1运动到P_2所经历的路程Δs是图1-3中从P_1到P_2的一段曲线长，路程是标量，恒取正值。在一般情况下，路程Δs与位移的大小$|\Delta\boldsymbol{r}|$（图1-3中P_1和P_2之间的弦长）并不相等。只有当质点作单向的直线运动时，路程和位移的大小才是相等的。此外，在时间间隔$\Delta t\to 0$的极限情况下，P_2无限靠近P_1，弦P_1P_2与曲线P_1P_2的长度无限接近，这时，路程$\mathrm{d}s$与位移的大小$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$才相等，即

$$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$$

在笛卡儿坐标系中，位移$\Delta\boldsymbol{r}$的表达式为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

如：若P_1点的位置矢量为$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$P_2$点的位置矢量为$\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$，则$P_1$与$P_2$间的位移为$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$。

第二节　速度与加速度

一、速度

质点的位置随着时间变化产生了位移，而位移一般也是随时间变化的，那么位移$\Delta\boldsymbol{r}$和产生这段位移所用的时间Δt之间有怎样的关系呢？$\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$又是一个怎样的物理量呢？从物理意义上来看，它描述的是质点位置变化的快慢和位置变化的方向。由于它对应的是时间间隔而不是某一时刻或位置，所以我们称其为在Δt时间内的平均速度，以$\bar{\boldsymbol{v}}$表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}4)$$

平均速度是矢量，它的方向就是相应位移的方向，如图1-4所示。

实际上当 Δt 趋近于零时，式（1-4）的极限就是质点位置矢量对时间的变化率，将其定义为质点在 t 时刻的瞬时速度（简称速度），以$\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-5}$$

速度的方向就是 Δt 趋近于零时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向，如图 1-4 所示。当 Δt 趋近于零时，P_1 点向 P 点趋近，而 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向最后将与质点运动轨道在 P 点的切线方向一致。因此，质点在时刻 t 的速度方向沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线指向运动的前方。可见它能够反映某一时刻或某一位置时质点的运动快慢和运动方向。这就是速度与平均速度的区别所在。

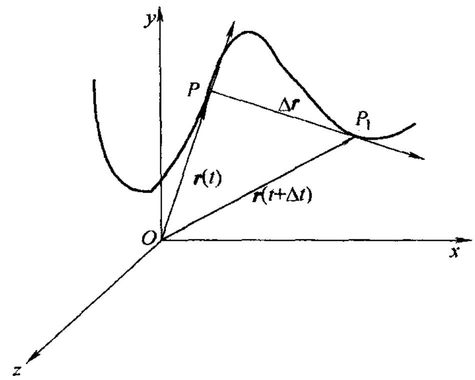

图 1-4　平均速度与速度

速度的大小定义为速率，以 v 表示，即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} \tag{1-5a}$$

以 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经历的路程。当 Δt 趋近于零时，由于 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 和 Δs 将趋于相同，因此可以得到

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-5b}$$

这就是说速度的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率（即速率）。因此，以后对速率和速度的大小不再区别。

注意：位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr 是有区别的，一般来讲

$$v=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

若将式（1-2）代入式（1-5），由于三个坐标轴上的单位矢量都不随时间变化，所以有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-5c}$$

从式（1-5c）可以看出：质点的速度 v 是各分速度的矢量和，这一关系式是式（1-2）的直接结果，也是由空间几何性质所决定，这一关系式称为速度叠加原理（一般地讲，各分速度不一定相互垂直）。

由式（1-5c）知各分速度相互垂直，所以 v 的大小和方向由下式决定：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}},\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}},\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

在国际单位制（SI）中，速度的单位为 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$。

二、加速度

当质点的运动速度随时间改变时，常常要搞清速度的变化情况，速度的变化情况常以另

一个称为加速度的物理量来表示。若以$\boldsymbol{v}(t)$和$\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$分别表示质点在$t$时刻和$t+\Delta t$时刻的速度，如图1-5所示，则在$\Delta t$时间内的平均加速度$\overline{\boldsymbol{a}}$由下式来定义：

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-6}$$

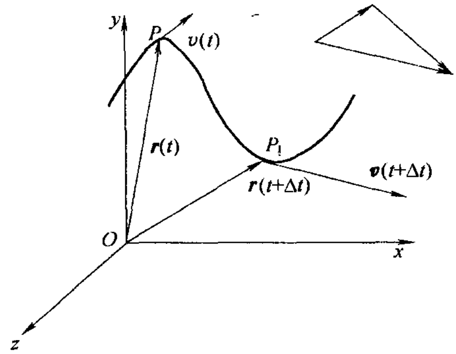

图1-5　平均加速度矢量

当Δt趋近于零时，此平均加速度的极限，即速度对时间的变化率，称为质点在t时刻的瞬时加速度（简称加速度），以$\boldsymbol{a}$表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

加速度也是矢量，由于它是速度对时间的变化率，所以不管是速度的大小发生变化，还是速度的方向发生变化，都有不为零的加速度存在。利用式（1-5），则

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-7a}$$

将式（1-5c）代入式（1-7a）可得加速度的分量表示式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-7b}$$

加速度的大小和方向分别为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

在国际单位制（SI）中，加速度的单位为$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

在定义速度和加速度时，都用到了求极限的方法。这种做法，在物理学各部分经常出现。求极限是人类对物质和运动作定量描述时在准确程度上的一次重大飞跃。实际上极限的概念是牛顿在17世纪对物体的运动作定量研究时提出的，可见微积分学的创立是与对物体运动的定量研究分不开的。微积分学是数学的一个重要分支，也是研究物理学不可缺少的重要工具。

例1-1　已知一质点的运动方程为$x=2t$，$y=18-2t^2$，其中x，y以m计，t以s计。求：（1）质点的轨道方程并画出其轨道曲线；（2）质点的位置矢量；（3）质点的速度；（4）前2s内的平均速度；（5）质点的加速度。

解　（1）将质点的运动方程消去时间参数t，得质点轨道方程为$y=18-\frac{x^2}{2}$，质点的轨道曲线如图1-6所示。

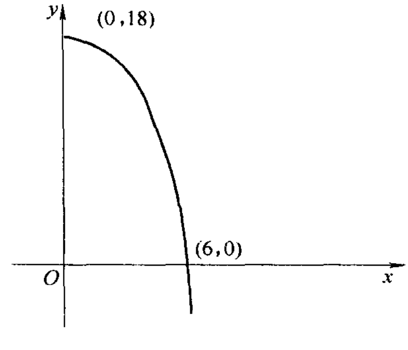

图1-6　质点的轨迹曲线

（2）质点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(18-2t^2)\boldsymbol{j}$$

（3）质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

（4）前2s内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}(2) - \boldsymbol{r}(0)}{2-0} = \frac{1}{2}\{[2\times 2\boldsymbol{i} + (18 - 2\times 2^2)\boldsymbol{j}] - 18\boldsymbol{j}\}$$
$$= 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

（5）质点的加速度为 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -4\boldsymbol{j}$（$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$）

例 1-2　如图 1-7 所示，A、B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上滑行。若物体 A 以确定的速率 v 沿 x 轴正向滑行，α 为杆与 y 轴的夹角，当 $\alpha = \pi/6$ 时，物体 B 沿 y 轴滑行的速度是多少?

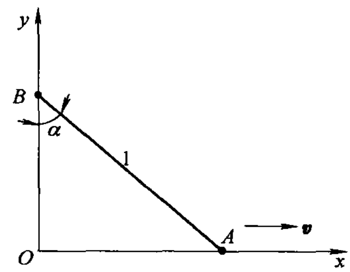

图 1-7

解　根据题意，得　$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} = v\boldsymbol{i}$　　$\boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$

因为　　$x^2(t) + y^2(t) = l^2$

所以　　$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$

故

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -v\tan\alpha\boldsymbol{j}$$

当 $\alpha = \pi/6$ 时，

$$\boldsymbol{v}_B = -v\tan\frac{\pi}{6}\boldsymbol{j} = -\frac{\sqrt{3}}{3}v\boldsymbol{j}$$

第三节　直线运动

质点在一条确定的直线上的运动称为直线运动。作直线运动的质点，其位置以坐标 x 来表示，如图 1-8 所示。一般来说，研究质点的直线运动，总是以该直线作为坐标轴来讨论的。

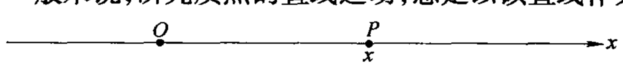

图 1-8　直线运动

于是，质点 P 的位置矢量为　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}$

质点 P 的位移为　$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i}$

质点 P 的速度为　$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$

质点 P 的加速度为　$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$

由于质点在 Ox 直线上运动，上述矢量中的每一个矢量只能取两个方向：或者与 x 轴的正向相同，或者与 x 轴的负向相同。例如，在质点速度的方向与 Ox 轴的正向相同时，$v=\frac{dx}{dt}>0$，相反时，$v=\frac{dx}{dt}<0$；当加速度的方向与 Ox 轴的正向相同时，$a=\frac{d^2x}{dt^2}>0$，相反时，$a=\frac{d^2x}{dt^2}<0$。由此可见，沿一直线运动时的矢量 $\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的方向，可以用相应的代数量 x、Δx、v 和 a 的正负符号来表示。即，这些代数量的绝对值表示其大小，正负号表示其方向。如果 v 和 a 同号，则质点作加速直线运动；如果 v 和 a 异号，则质点作减速直线运动。

假定质点沿 x 轴作匀加速直线运动，加速度 a 不随时间变化，初位置为 x_0，初速度为 v_0，则 $a=\frac{dv}{dt}$，所以 $dv=adt$

对上式两边取定积分，可得

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t adt;\ v=v_0+at \tag{1-8}$$

又因为

$$\frac{dx}{dt}=v_0+at$$

所以

$$dx=(v_0+at)dt$$

对上式两边再取定积分，可得

$$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t(v_0+at)dt;\ x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1-9}$$

消去式（1-8）和式（1-9）中的时间参数可得

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0) \tag{1-10}$$

式(1-8)、式(1-9)和式(1-10)正是在中学课程中学过的匀变速直线运动公式。

可见，如果知道了质点的运动方程，我们就可以根据速度和加速度的定义用求导数的方法求出质点在任何时刻（或任何位置）时的速度和加速度。然而在许多实际问题中，往往先知道质点的加速度，而且要求在此基础上求出质点在各时刻的速度和位置。求解此类问题可采用积分法。

例 1-3　一质点沿 x 轴正向运动，其加速度为 $a=kt$，若采用国际单位制（SI），则式中常数 k 的量纲是什么？当 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=x_0$，试求质点的速度和质点的运动方程。

解　因为 $a=kt$，所以 $k=\frac{a}{t}$。故 $\dim k=\frac{\dim a}{\dim t}=\frac{L\cdot T^{-2}}{T}=L\cdot T^{-3}$。

又因为 $a=\frac{dv}{dt}=kt$，所以有 $dv=ktdt$

求定积分有

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t ktdt,\ v=v_0+\frac{1}{2}kt^2$$

而

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{1}{2}kt^2$$

所以有

$$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t\left(v_0+\frac{1}{2}kt^2\right)dt$$

得
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6}kt^3$$

第四节　平面曲线运动

质点在确定的平面内作曲线运动，称为平面曲线运动。常见的实例有抛体运动和圆周运动。

一、抛体运动

从地面上某点向空中抛出一物体，它在空中的运动称为抛体运动。物体被抛出之后，若忽略风力及空气阻力的影响，它的运动轨迹总是被限制在通过抛射点的抛出方向和竖直方向所确定的平面内，因此描述这种运动，就可以把抛出点作为坐标原点，把水平方向和竖直方向分别作为 x 轴和 y 轴，如图 1-9 所示。若从抛出时刻开始计时，则 $t=0$ 时，物体的初位置在原点，即(0,0)，以 v_0 表示物体的初速度，以 θ 角表示抛射角，即初速度与 x 轴的夹角，则 v_0 沿 x 轴和 y 轴的分量分别为

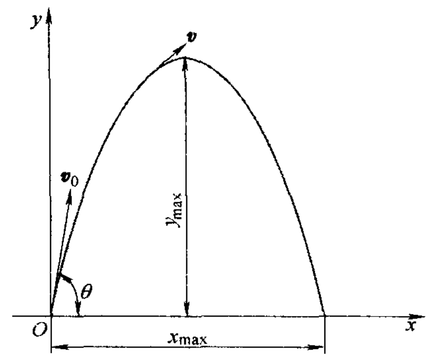

图 1-9　抛体运动

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_{0y} = v_0\sin\theta \end{cases}$$

物体在空中的加速度分别为

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

式中负号表示加速度的方向与 y 轴的方向相反。利用这些条件，可以方便地得出物体在空中任意时刻的速度为

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - gt \end{cases} \tag{1-11}$$

也可以得出物体在空中任意时刻的位置坐标为

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\theta)t \\ y = (v_0\sin\theta)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1-12}$$

式（1-11）和式（1-12）就是在中学已熟知的抛体运动的有关公式。由这两式也可以求出物体在空中飞行回落到抛出点高度时所用的时间为

$$T = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

飞行中的最大高度（即高出抛射点的最大距离）为

$$y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

飞行的射程（即回落到与抛出点的高度相同时所经过的水平距离）为

$$x_{\max}=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}$$

由上面的公式可以看出：

若 $\theta=0$，则 $y_{\max}=0$，此时为平抛运动；

若 $\theta=\frac{\pi}{4}$，则 $x_{\max}=\frac{v_0^2}{g}$，此时射程最大；

若 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则 $x_{\max}=0$，此时为竖直抛体运动。

消去式（1-12）中的时间参数后可以得到抛体运动的轨迹方程为

$$y=x\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

对于一定的 v_0 和 θ，这一方程表示一条通过原点的二次曲线。这一曲线就是数学上的"抛物线"。

必须特别注意，以上关于抛体运动的公式，都是在忽略空气阻力的情况下得出的。只有在初速较小的情况下，它们的计算结果才比较符合实际。实际中子弹和炮弹在空中飞行的规律和上述公式的计算结果有很大的差别。子弹和炮弹的飞行规律在军事技术中由专门的学科"弹道学"进行研究。对于射程和射高极大的抛射体，如洲际导弹，弹头在大部分时间内都在大气层以外的空间飞行，所受的空气阻力是很小的。但是由于在这样大的范围内飞行，重力加速度的大小和方向都有明显的变化，因而以上公式也不能适用。

二、圆周运动

在确定的平面上质点的运动轨迹为圆周的运动称为圆周运动。下面从加速度的定义出发，进一步分析质点作圆周运动时的加速度。如图 1-10 所示，设 t 时刻质点位于 P 点，其速度为 $\boldsymbol{v}_P$；$t+\Delta t$ 时刻质点位于 Q 点，其速度为 $\boldsymbol{v}_Q$，则在 Δt 这一段时间内，速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_Q-\boldsymbol{v}_P$。平移矢量 $\boldsymbol{v}_P$ 和 $\boldsymbol{v}_Q$ 于 C 点，并在由矢量 $\boldsymbol{v}_P$，$\boldsymbol{v}_Q$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}$ 组成的三角形 CPQ 中取 CP' 的长度等于 CP 的长度，那么速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 就可以分解为两个矢量 $\Delta\boldsymbol{v}_n$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ 之和，即 $\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}_n+\Delta\boldsymbol{v}_\tau$。所以加速度

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}$$

令
$$\boldsymbol{a}_n=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t},\quad \boldsymbol{a}_\tau=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}$$

则
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_\tau$$

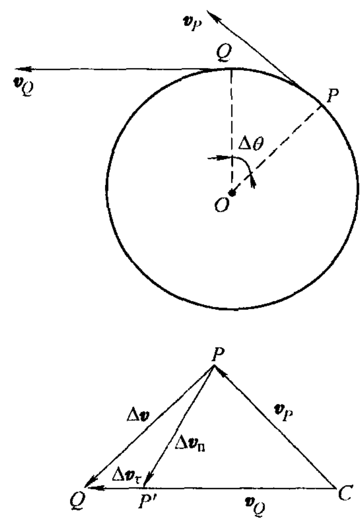

图 1-10 圆周运动

下面我们再来分析 $\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小、方向和物理意义：

当 $\Delta t\to0$ 时，Q 点无限趋近于 P 点，OQ 与 OP 之间的夹角 $\Delta\theta\to0$。$\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ 的极限方向与 $\boldsymbol{v}_P$ 相同，是 P 点处圆周的切线方向；$\Delta\boldsymbol{v}_n$ 的极限方向与 $\boldsymbol{v}_P$ 垂直，沿半径指向圆心。可见质点在 P 点处的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的两个分量 $\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_\tau$ 恰好分别指向圆周上 P 点处的法向和切向这两个特殊方向。顾名思义，我们将 P 点处的 $\boldsymbol{a}_n$ 称为该点处的法向加速度（对于圆周运动即为向心加速度），将 P 点处的 $\boldsymbol{a}_\tau$ 称为该点处的切向加速度。

平移$\boldsymbol{v}_P$和$\boldsymbol{v}_Q$矢量于 C 点，由图 1-10 可以看出，$|\Delta \boldsymbol{v}_\tau|$ 是速度大小的增量（即速率的增量 Δv），于是切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小为

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{v}_\tau|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

又因为$\triangle OPQ \backsim \triangle CPP'$，所以

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{v_\mathrm{P}} = \frac{\overline{PQ}}{R}$$

故法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 的大小为

$$a_\mathrm{n} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{\Delta t} = \frac{v_P}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{PQ}}{\Delta t} = \frac{v_P^2}{R}$$

由于 P 点是圆周上的任意一点，所以质点在圆周上的法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 的大小为

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R}$$

式中，v 为对应点的速度大小（即速率）。

通过上面的分析和研究我们发现：切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与质点运动的速度改变相联系，法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 与质点运动的方向改变相联系。于是将其归纳为

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{n} + \boldsymbol{a}_\tau \\ a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{R},\ a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_\mathrm{n}^2 + a_\tau^2} \\ \tan(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \dfrac{a_\mathrm{n}}{a_\tau} \end{cases} \tag{1-13}$$

质点作圆周运动，还通常用角量来描述，如图 1-11 所示。

质点作圆周运动时，在某一时刻 t 位于 P 点，质点的位置可由其半径 OP 与过圆心 O 的参考线 Ox 的夹角 θ 唯一地确定，θ 角称为质点的角位置，角位置不断地随时间变化，它是时间的函数，即 $\theta = \theta(t)$。它被称为质点作圆周运动时的角量运动方程。

在时刻 $t + \Delta t$，质点运动到达 P'点时其角位置为 $\theta + \Delta\theta$，在 Δt 时间内，质点转过的角度 $\Delta\theta$ 称为角位移。质点沿圆周运动的绕行方向不同，角位移的转向也不同。一般情况下，规定质点沿逆时针方向绕行时角位移取正值，质点沿顺时针方向绕行时角位移取负值。

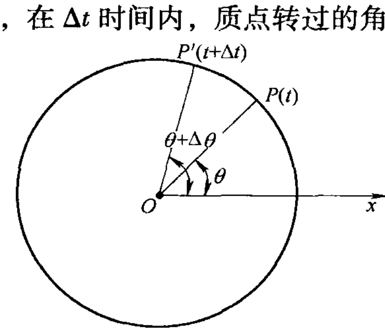

图 1-11　角量描述

角位移 $\Delta\theta$ 与对应时间之比 $\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$称为 Δt 时间内的平均角速度。当 $\Delta t \to 0$ 时，平均角速度的极限称为质点在 t 时刻对应的瞬时角速度（简称角速度），即

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-14}$$

同理，质点的角加速度为

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-15}$$

在国际单位制（SI）中，角位置、角位移的单位为弧度（rad），角速度的单位为弧度每秒（$\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$），角加速度的单位为弧度每二次方秒（$\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$）。另外，目前工程上还在继续使用每分绕行的转数（$\mathrm{r\cdot min^{-1}}$）来表示转速：

$$1\,\mathrm{r\cdot min^{-1}}=\frac{\pi}{30}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

质点作圆周运动时，如果角速度 ω 不随时间变化，即角加速度 α 为零，则质点作匀速圆周运动；如果角加速度 α 不随时间变化且不等于零，则质点作匀加速圆周运动。对于匀加速圆周运动而言，可以用与研究匀变速直线运动类似的办法得到

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2\\ \omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)\end{cases}$$

如图 1-11 所示，因为质点在圆周上所经历的路程（即弧长）为 $\Delta s=R\Delta\theta$

两边同除以质点运动所经历的时间 Δt，得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

令 $\Delta t\to 0$，两边取极限，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\quad 即\quad v=R\omega$$

所以给等式 $v=R\omega$ 两边对时间求一阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\quad 即\quad a_\tau=R\alpha$$

对于法向加速度，有

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

综上所述，对于圆周运动其线量和角量之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}v&=R\omega\\ a_\tau&=R\alpha\\ a_n&=R\omega^2\end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

例 1-4　一人骑摩托车跳越一个大矿坑，他以与水平成 22.5°夹角的初速度 $65\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 从西边起跳，准确地落在坑的东边。已知东边比西边低 70m，忽略空气阻力，且取 $g=10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，问：（1）矿坑有多宽，他飞越的时间有多长？（2）他在东边落地时的速度多大？速度与水平面的夹角多大？