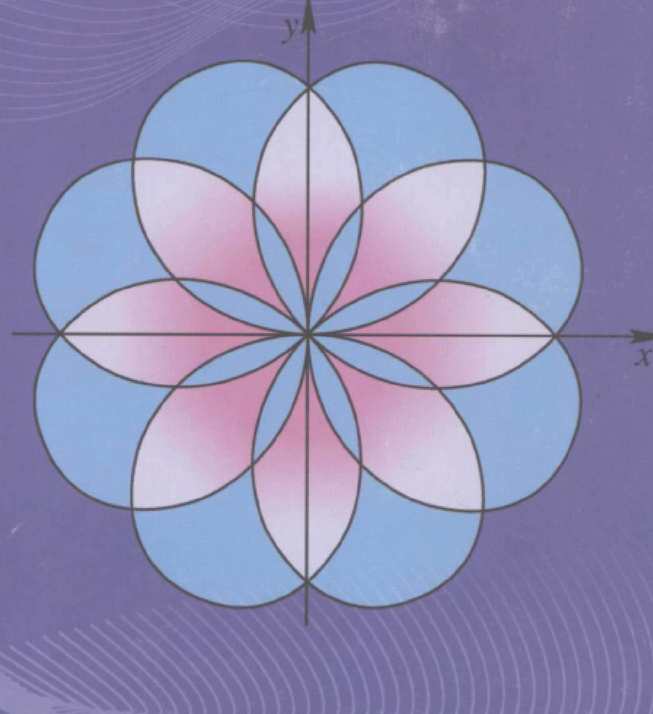
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

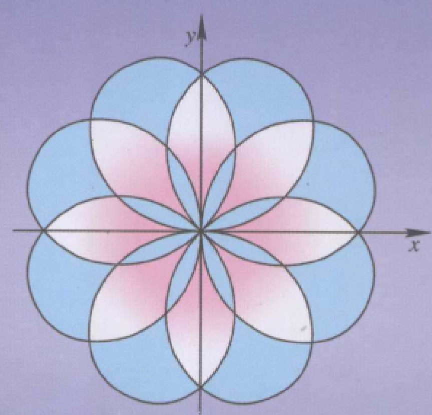
普通高中课程标准
实验教科书

选修系列4－4

坐标系与参数方程



湖南教育出版社



ISBN 7-5355-4606-4

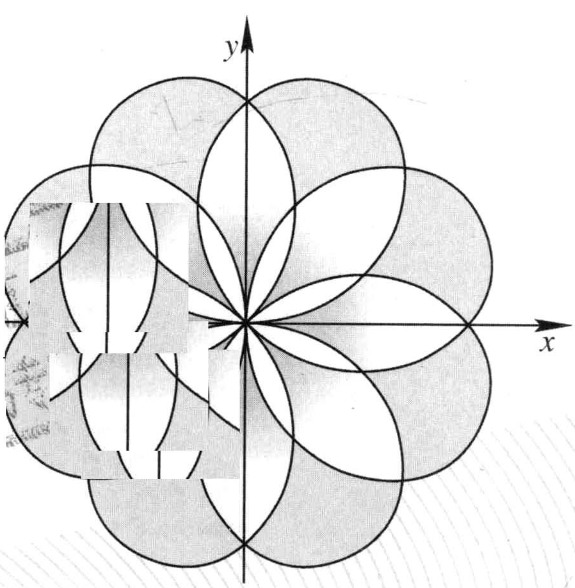
G · 4601 定价:6.30 元

普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 4—4

坐标系与参数方程



主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志
本册主编　朱华伟
编　　委　钱展望　郑志明
　　　　　查建国　孟实华

普通高中课程标准实验教科书
选修 4—5
不等式选讲
责任编辑：孟实华　邹伟华
　　　　　甘　哲　蒋　芳
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 643 号）
网　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司印刷
890×1240　16 开　印张：5　字数：120000
2005 年 8 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7-5355-4604-8/G·4599
定价：6.55 元
本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志
本册主编　王树禾
编　　委　郑志明　查建国
　　　　　蒋星耀　孟实华

坐标系种种和美丽曲线的数学描述

大自然恩赐我们众多漂亮的图形，人类在生活、生产与科学研究当中又创造了不少美妙的曲线；17 世纪以前，数学家们梦寐以求用代数的方法来描述与定量研讨形形色色的曲线．人真不愧为万物之灵，我们的前人如笛卡儿、费马等杰出数学家，创立解析几何，建立平面与空间的直角坐标系，使得几何学代数化的理想得以实现．坐标系是现代数学活动的舞台，但有的曲线在直角坐标系中不便于解析表达，另类坐标系应运而生，主要有(平面)极坐标系和(空间)柱坐标系与球坐标系．对于给定的几何对象，选择适合于它的坐标系是至关重要的事，选得不好，会使研究工作别扭繁琐；选得好，则使研究工作简洁顺利．

我们已经知道，在直角坐标系当中，用有序的两个实数表示平面上点的位置，用有序的三个实数表示空间点的位置，进而有平面曲线的方程和空间曲线的方程．

除平面直角坐标系与空间直角坐标系之外，是否还有其他坐标系呢？有．本书重点讲授极坐标系，也讲到空间的柱坐标系和球坐标系．采用不同几何意义的参照物，可以建立各种坐标系；不同的坐标系有各自的优缺点，极坐标可以把一些曲线表达得十分简洁，给某些曲线的表达与研究带来诸多方便．

有些平面曲线的方程可以在平面直角坐标系中写成动点的纵坐标 y 是动点横坐标 x 的函数或称曲线的普通方程．但也存在大量的美丽而有用的曲线，它们的方程不便于甚至不可能写成普通方程，可以通过一种叫作参数的中介而写成方程组，如果把这种参数记成 t，则曲线的方程组形如

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t). \end{cases}$$

这种方程组就是曲线的参数方程.

参数方程是描述曲线的重要工具之一，参数方程描写曲线有许多方便之处，我们将采用参数方程来讨论许多有用又有趣的重要曲线.

本课程的重点是极坐标和曲线的参数方程.

通过本课程的学习，不仅使我们尽情感受数学的艺术性，欣赏那些奇妙的曲线及其方程，而且还会强化我们在实践中应用数学的意识和解决问题的能力．希望同学们从各种坐标系与参数方程的建立当中领会发散思维与创新思维的重要性，提高数形结合的观念和技巧，在数学园地上，不仅是欣赏者，而且努力使自己成为耕耘者和收获者.

作 者

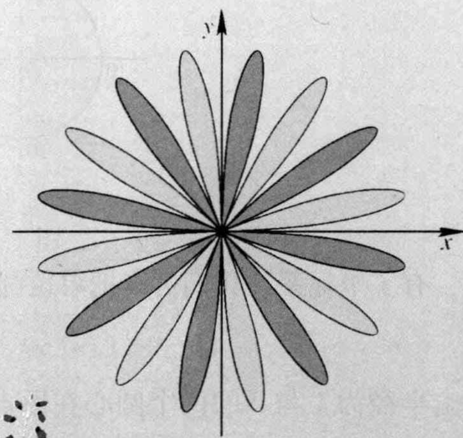
2004 年 12 月

目录

第1章 坐标系

笛卡儿企图通过坐标系给几何引进新方法，他的成就远远超出他的期望．坐标系是数学中的双刃剑，使得几何的目的可以通过代数达到，反过来，给代数以几何解释．坐标系使代数同几何结成伴侣，它们互相吸取新鲜的活力，以快速的步伐走向完善．

——拉格朗日



1.1 坐标系的作用

如何刻画一个图形的位置和形状是几何学的重要内容.

在广袤无垠的平面上，你可以把圆规张开，使其两脚相距 10 cm，画一个圆．但若问这个圆在哪里，你可以指着它说就在这里，“这里”是哪里呢？很不精确．如果我们在此平面上取定以圆规固定的一脚为原点的**平面直角坐标系**（flat square coordinate system），则可用方程

$$x^2+y^2=100 \tag{①}$$

精确地代数地表达出它是一个圆心在坐标原点，半径为 10 cm 的圆，见图 1－1.

有了坐标系，不仅使几何图形的位置得以精确描绘，而且可以使曲线的形象用代数方程来表达.

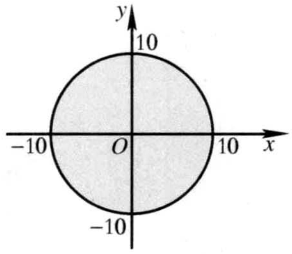


图 1－1

有了坐标系，我们可以把单位圆内的点组成的集合 D_1 简洁地写成

$$D_1=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\};$$

把由半径为 1 与 2 的两个圆心在原点的同心圆围成的环形内部的点组成的点集 D_2 简洁地写成

$$D_2=\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2<4\}.$$

有了坐标系，才能写出曲线等几何图形的代数表达式，进而通过对这个代数方程的研究，得出该曲线的几何性质．例如我们写一个方程

$$y=x^2+4x+5, \tag{②}$$

正因为有了坐标系，我们说这个方程②代表一条抛物线（见图 1－2），

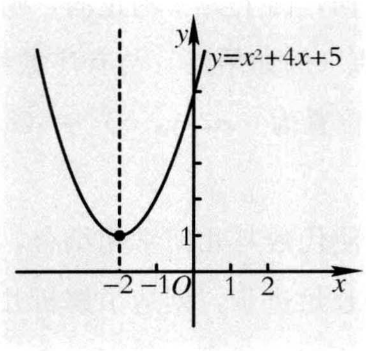


图 1-2

而且，由代数的恒等变形得

$$y=x^2+4x+5$$
$$=(x+2)^2+1,$$

从而知 $x_0=-2$ 时，y 最小，最小值是 $y_0=1$，即此抛物线最低点在 $(-2, 1)$，对称轴为 $x=-2$，抛物线开口向上等几何性质．上述几何性质，是有了坐标系之后，借助代数的方法得到的，反过来，这种在坐标系中代数地对几何的研究，又反馈给代数，使我们凭借图 1-2这种坐标系中的图象与 x 轴无交点，推断方程

$$x^2+4x+5=0$$

无实数根等代数结论．

有了坐标系，实现了几何代数化和代数几何化，使代数与几何双双受益．

坐标系是刻画点的位置与其变化的参照物．我们知道，一条直线上的点的位置可以用一个实数来标志，例如在 x 轴上，我们容易指出 $x=1$ 这个点在何处；在平面上的点的位置要用两个有序实数 α，β 组成的有序数组 (α, β) 来确定；空间中的点则需用三个有序实数 α，β，γ 组成的有序数组 (α, β, γ) 来确定．

例如问一架直升飞机的位置现在在哪里，我们发现它在东经 120°，北纬 45°，距地面 1 000 km，可以用三个数组成的有序数组 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{4}, 1\ 000\right)$ 把直升飞机的位置确定．

又例如问你家吊在天花板上的灯泡位置在哪里，我们测出它距地板 2 m，距东墙 2 m，距南墙 2.5 m，约定用有序三数组 (2.5，2，2) 来标志灯的位置，以地板上的东南角 O 为原点，向北为 x 轴

正向，向西为 y 轴正向，向上为 z 轴正向，则建立了空间直角坐标系 $Oxyz$；空间中的点（例如吊灯）与有序数组（x，y，z）一一对应，例如上面的吊灯位置为（x，y，z）=（2.5，2，2），（2.5，2，2）就是吊灯的坐标.

有了坐标系，才使代数与几何学相结合，使这两门重要学科都受益，从而双双获得长足进步，创造了解析几何等现代几何学；有了坐标系才能通过解析表达式深入研究函数，进而促进了微积分等现代数学的创生与发展.

我们必须掌握各种坐标系对点的位置的表述规则，进而科学地研究各种曲线等几何对象的数学性质，通过坐标系中函数图象直观地与数学地分析，得出各种函数的重要性质.

1.2 平面直角坐标系中的伸缩变换

$y=\sin x$ 平行于 x 轴压缩或拉伸后，振幅不变，但其周期会发生变化.

伸缩变换我们其实已经不止一次地遇到过，例如 $y=\sin 2x$ 的图象就是把 $y=\sin x$ 的图象平行于 x 轴压缩成原来的一半形成的，见图 1－3.

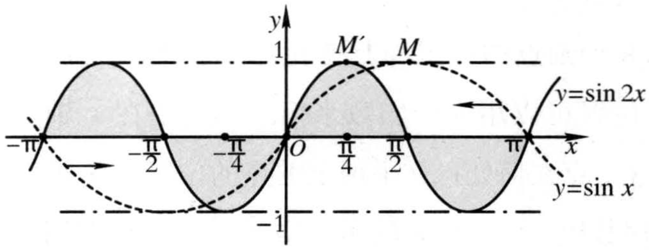


图 1－3

其中实线是 $y=\sin 2x$ 的图象，虚线是$y=\sin x$的图象.

曲线 $y=\sin 2x$ 上的任意一点 M'（x'，y'），都是曲线 $y=\sin x$ 上唯一的一个相应的点 M（x，y）沿 x 轴平移变成的，x'，y'与 x，y 之间满足关系式

伸缩变换是 xOy 平面到自身的一一对应的映射，把 xOy 平面上的每个点（x，y）变成与之对应的点（x'，y'）.

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x, \\ y'=y. \end{cases} \qquad ①$$

例如 $y=\sin 2x$ 上的点 $M'\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$ 是 $y=\sin x$ 上的点 $M\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$ 变换而成的.

考虑函数 $y=2\sin x$，它的图象则是由 $y=\sin x$ 的图象平行于 y 轴拉伸 2 倍变成的，见图 1－4.

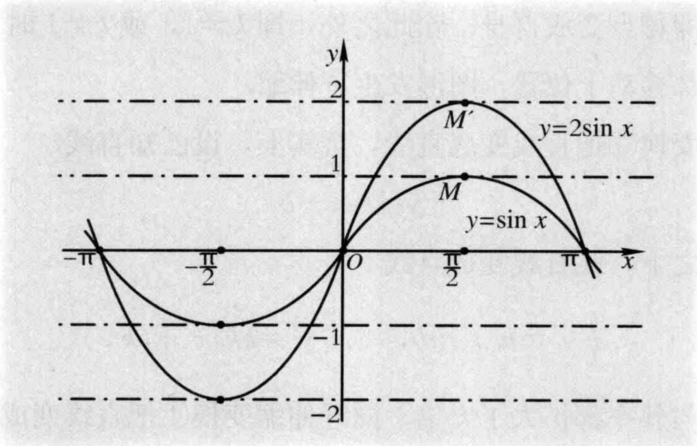


图 1－4

> $y=\sin x$ 平行于 y 轴拉伸或压缩后，其周期不变，但振幅会发生变化.

曲线 $y=2\sin x$ 上的任意一点 M'（x'，y'）都是曲线 $y=\sin x$ 上唯一的一个相应的点 M（x，y）沿 y 轴平移变成的，x'，y' 与 x，y 之间满足关系式

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y. \end{cases} \quad ②$$

一般地，变换公式

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=ky,\ (k>0) \end{cases} \quad ③$$

把 xOy 平面上的点（x，y）变换成 xOy 平面上的一点（x'，y'），这种变换称为平行于 y 轴的**伸缩变换**（lengthen and shorten alternate）. 当 $k>1$ 时是拉伸过程，$0<k<1$ 时是压缩过程，所以名符其实称为伸缩变换.

相似地，变换公式

$$\begin{cases} x'=lx,\ (l>0), \\ y'=y, \end{cases} \quad ④$$

有时称伸缩变换为"压缩变换"，把拉伸视为广义的压缩. ③也称为向着 x 轴压缩变换，④也称为向着 y 轴的压缩变换.

把 xOy 平面上的点（x，y）变换成 xOy 平面上的一点（x'，y'），这种变换称为平行于 x 轴的伸缩变换，当 $l>1$ 时是拉伸过程，$0<l<1$ 时是压缩过程.

在伸缩变换过程中，原点是不动点，即原点（0，0）变成原点（0，0）；当 $k=1$，$l=1$ 时，公式③与④表达的伸缩变换下每点都是不动点，即每点变成自身；除此之外，即 $k\neq 1$，或 $k\neq 1$ 时，除原点外，每点都移动了位置，图形发生了伸缩.

伸缩变换把平行直线变成平行直线.

伸缩变换③把直线变成直线，事实上，设已知直线

$$y=k_0x+b$$

在变换③之下，此直线变成直线

$$\frac{1}{k}y'=k_0x'+b, \qquad y'=kk_0x'+bk.$$

截距与斜率都扩大了 k 倍. 同理伸缩变换④把直线变成直线.

例 1 今有正方形 $ABCD$，A，B，C，D 的坐标分别是（2，2），（−2，2），（−2，−2），（2，−2），问在伸缩变换 $x'=x$，$y'=\frac{1}{2}y$，与 $x'=\frac{1}{2}x$，$y'=y$ 的作用下，正方形 $ABCD$ 分别变成什么图形？

解 按变换

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=\dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

计算，$A(x, y)=(2, 2)$ 变成 $A'(x', y')=(2, 1)$，$B(x, y)=(-2, 2)$ 变成 $B'(x', y')=(-2, 1)$，$C(x, y)=C(-2, -2)$ 变成 $C'(x', y')=(-2, -1)$，$D(x, y)=(2, -2)$ 变成 $D'(x', y')=(2, -1)$，由于直线变成直线，正方形 $ABCD$ 变成矩形 $A'B'C'D'$，见图1－5.

同理，在变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x, \\ y'=y \end{cases}$$

作用下，正方形 $ABCD$ 变成矩形 $A''B''C''D''$.

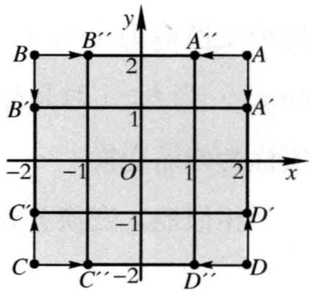


图 1－5

见图 1－5．所得图形是正方形“压扁”了一半形成的，面积是原来正方形的一半.

例 2 在伸缩变换

$$\begin{cases} x'=2x, \\ y'=y \end{cases}$$

与伸缩变换

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=2y \end{cases}$$

作用下，单位圆变成什么图形？

解 在 $x'=2x$，$y'=y$ 的作用下，单位圆 $x^2+y^2=1$ 变成

$$\left(\frac{1}{2}x'\right)^2+(y')^2=1,$$

$$\frac{x'^2}{2^2}+\frac{y'^2}{1}=1.$$

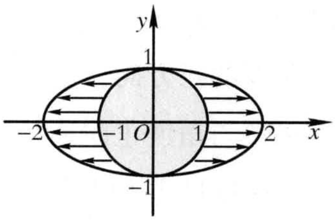


图 1－6

变成的图形是长半轴为 2，短半轴为 1 的椭圆，见图 1－6．

在 $x'=x$，$y'=2y$ 的作用下，单位圆变成椭圆

$$(x')^2+\frac{(y')^2}{2^2}=1.$$

见图 1－7．

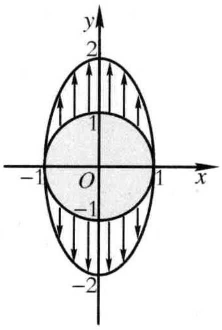


图 1－7

因为伸缩变换把直线变成直线，所以伸缩变换把多边形变成边数一致的多边形；伸缩变换不能实现曲线段与直线段的互变，例如它不能把圆变成正方形.

伸缩变换把圆变成圆或椭圆.

由于伸缩变换是可逆的，其逆变换也是伸缩变换，所以伸缩变换把椭圆变成圆或椭圆.

1.3 极坐标系

为确定平面上点的位置，平面直角坐标系不是唯一的平面坐标系，有时，用一种叫作极坐标（polar coordinate）的平面坐标来描述点的位置和某种轨迹更为方便．例如甲问乙：张庄在哪里？乙答：在从我们站的这里向东北 5 km 的地方．乙回答的就是张庄的极坐标．

在平面内取定一点 O，O 点叫作极点；从 O 起引一条射线 Ox，这条从极点起的射线 Ox 叫作极轴；选定长度单位（例如 km)，再选定角度的正方向（逆时针转角为正向），这种取定了极点、极轴、长度单位与角度正向的坐标系统叫作极坐标系．对于平面上的一个点 M，连接极点 O 与 M，线段 OM 之长 ρ 叫作 M 点的极径（或矢径、或向径），极轴 Ox 为始边按逆时针转到 OM 的角 θ 叫作 M 点的极角，有序数对 (ρ, θ) 叫作 M 点的极坐标．例如上面的张庄其极坐标为 $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$，见图 1－8．

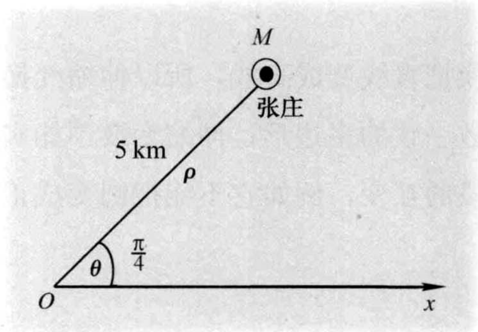


图 1－8

当 M 在极点 O 时，它的极径 $\rho=0$，极角 θ 可以取任何实数．

在极坐标中，若无特殊声明，ρ 是非负实数，$\rho\in[0, +\infty)$，$\theta\in(-\infty, +\infty)$．

当 $\rho>0$，$\theta\in[0, 2\pi)$时，平面上的点与极坐标一一对应．

极坐标有诸多长处，下面我们会重点来讨论，但它也有它的缺点，例如它并不像平面直角坐标系那样，能建立与平面上的点的一一对应．事实上，对给定的 ρ 与 θ，由极坐标（ρ，θ）可以唯一地确定一个点 M，但是反过来，平面上给定一点，却可以写出这个点的无数多个极坐标．根据点的极坐标（ρ，θ）的定义，对于给定的点，它的极径 ρ 是唯一确定的，但极角却可以有无穷多种，如果我们写出了它的极坐标（ρ，θ），则（ρ，$\theta+2n\pi$）也是这个点的极坐标，其中 n 是任意整数．当 $n>0$ 时，$\theta+2n\pi$ 表示从该点起绕极点 O 逆时针转动了 n 圈又回到原处，$n<0$ 时，$\theta+2n\pi$ 表示从该点起绕极点 O 顺时针转动了 n 圈又回到原处．

一些环绕一点旋转的点的轨迹用极坐标方程来表示一般会比较简便．

在极坐标系中，许多曲线的方程变得十分简洁，而且几何形象也表达得十分明确．所谓曲线 L 的极坐标方程是指 L 上的动点的极坐标的极径与极角满足的方程 $\rho=f(\theta)$ 或 $F(\rho,\theta)=0$．

（1）过极点直线的极坐标方程．

在平面直角坐标系中，过原点 O 的直线方程形如

$$y=kx,$$

其中 k 是实数，叫作斜率．$k=\tan\theta$，θ 是此直线与 Ox 轴的夹角，这个角是多大，一般从 k 上不易看出来，需要计算 $\arctan k$．但在极坐标中，我们取 Ox 轴正半轴为极轴，则过极点 O 的射线方程写成

$$\theta=\theta_0\ (\theta_0\in[0,2\pi)).$$

如果我们允许极径取负值，约定 $M(\rho,\theta)$ 关于极点对称点 M' 的极坐标写成 $M'(-\rho,\theta)$．于是过原点与 x 轴夹角为 θ_0 的直线 l 的极坐标方程为

$$l:\theta=\theta_0. \quad ①$$

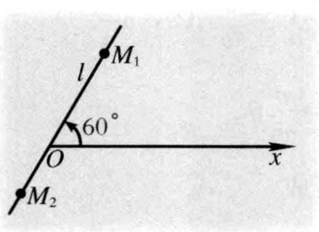


图 1－9