普通高等教育“十二五”规划教材

离散数学与算法

主　编　包世堂
副主编　刘　君　任志国　岳秋菊

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材

离散数学与算法

主　编　包世堂
副主编　刘　君　任志国　岳秋菊

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书系统讲解离散数学基础知识和应用方法及实现算法，内容包括数理逻辑、集合论、关系、函数、代数系统和图论及应用，同时给出了各章节相关内容的算法和程序。

本书内容安排合理，由浅入深、循序渐进、通俗易懂，理论和实践紧密结合，突出应用的特点。

本书可作为高等学校数学与计算机相关专业本科生的教材，也可供相关科技人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学与算法 / 包世堂主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2011.1

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5084-8358-0

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①包… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第012670号

书 名	普通高等教育“十二五”规划教材 **离散数学与算法**
作 者	主编 包世堂 副主编 刘君 任志国 岳秋菊
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经 售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市天竺颖华印刷厂
规 格	184mm×260mm 16开本 20.75印张 492千字
版 次	2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	**36.00**元

前言

计算机技术作为当今信息社会信息技术的核心，已经成为知识经济最强有力的技术支持，成为人们在工作、学习和生活中，获取信息、处理信息、运用信息的重要工具。计算机技术的辉煌成就，与其作为理论基础的离散数学密不可分。离散数学不仅是现代数学的一个重要分支，也是计算机科学的基础理论的核心课程。它研究世界事物间的结构和相互关系，是一门必不可少的工具性学科，主要内容包括：数理逻辑、集合论、关系、函数、代数系统、图论及其应用。

本书共分10章，分别是命题逻辑、谓词逻辑、集合的基本概念和运算、关系、函数、代数系统的一般概念、代数系统、环域格和布尔代数、图的基本理论和树，各章节中以实例入手，归纳出离散结构数学模型的建立和求解方法，并给出了具体算法和参考程序，从而实现离散问题的计算机求解。这是本书的一个显著特点。

本书可作为高等学校数学与计算机相关专业本科生的教材，也可供相关科技人员学习参考。

限于编者水平有限，书中错误之处在所难免，敬请读者指正。

编 者

2010年11月

目录

第1章 命 题 逻 辑

一切科学，无论是社会科学还是自然科学，都离不开推理。正确的推理形式应当满足从正确的前提出发，能够得出正确的结果。所以要想保证推出的结论是正确的，除了推理过程正确之外，还要有正确的推理前提。形式推理基本上采用自然语言研究推理，自然语言易懂，但它有二义性，这就给推理造成了困难。为了能够精确表达意思，逻辑推理中引入了一些符号，用这些符号翻译语句来避免自然语言的二义性。

第1节 命题和命题联结词

1.1 命题

命题是推理的基础，也是命题演算系统中参加运算的元素，由此可知命题在逻辑演算中很重要，究竟命题是什么呢？

定义 1.1 在客观上可以判断具有真假意义的陈述语句称为命题。

一个命题只能是真命题或是假命题，不能兼而有之。命题的真或假称为命题的真假值，简称命题的真值。如果一个语句表达的意思为真，就称其为真命题，真命题的真值为真，用 1 或 T（Ture）来表示；如果一个语句表达的意思为假，就称其为假命题，假命题的真值为假，用 0 或 F（False）来表示。集合 {F，T} 称为命题的真值集合。

例 1.1 以下语句，判断哪些是命题。

（1）北京是中华人民共和国的首都。

（2）雪是黑的。

（3）今天天气真好啊！

（4）昨天我们爬长城去了。

（5）明年 10 月 1 日是晴天。

（6）我正在说谎。

（7）请进！

（8）宇宙中有外星人存在。

（9）你好吗？

（10）$x+y<3$。

由命题的定义可以看出，由于疑问句、祈使句、感叹句不是陈述句，当然它们都不是命题。由此可知，上面语句中的（3），（7），（9）均不是命题。（1），（2），（4）语句都是陈述句，也有确定的真值，所以它们是命题。其中语句（1）是真命题，语句（2）是假命

题，语句（4）不知道它的真值，但它的真值是唯一的。语句（5）的真值是唯一的，虽然真值现在还不知道，但到明年 10 月 1 日就知道了，所以（5）是命题。对于语句（8）的真值是唯一的，只是目前无法判断其真假，但就其本质而言，随着科学技术的发展，其真值会知道的，所以它是命题。语句（10）不是命题，因为它没有确定的真值。当 $x=1$，$y=2$ 时 $1+2<3$ 不正确，而当 $x=1$，$y=1$ 时 $1+1<3$ 正确。语句（6）虽是陈述句，但它表述的意义自相矛盾，它即具有真值又具有假值，通常称这种语句为悖论。因为如果他确实是在说谎，那么“我在说谎”便是真，于是就会得出，如果他是说谎，那么他是讲真话；另一方面，如果他确实说的是真话，那么“我正在说谎”便是假，于是会得出，如果他是讲真话，那么他是说谎。从以上分析只能得出结论——他必须既不说谎又不讲真话，这显然是矛盾的。这样的陈述句称为悖论，不是命题。又如“理发师专门为不为自己理发的人理发。”也是一个悖论。

根据以上的分析可以看出，判断一个句子是否为命题，首先要看它是否为陈述句，然后再看它的真值是否是唯一确定的。当然真值是否唯一与是否知道它的真值是两个概念。

从命题真值的取值上也可以这样理解，命题是非真必假的陈述语句。

例题 1.1 中所举的 5 个命题均比较简单，而且语句也是无法分解成更简单的句子了，称这样的命题为简单命题或原子命题。本书用大写的英文字母 P，Q，R，…表示简单命题，或用带有下标的英文字母 P_1，P_2，P_3，…表示简单命题，将表示命题的符号放在该命题的前面，称为命题符号化。如例 1.2。

例 1.2　P：北京是中华人民共和国的首都。

　　Q：雪是黑的。

则 P 是真命题，Q 是假命题。

对于简单命题来说，它的真值是确定的，因而又称为命题常项或命题常元。上面的 P，Q 都是命题常项。

在例 1.1 中，（10）不是命题，但当给定 x 与 y 的值后，它的真值也就定下来了，这种真值可以变化的简单陈述语句称为命题变项或命题变元。也用 P，Q，R，…，P_1，P_2，P_3，…表示命题变元，例如 P，它表示的是命题变元还是命题常元，一般由上下文确定，需要注意的是命题变元不是命题。在这里把表示命题变元和命题常元的符号称作标识符。但一个标识符并不具体代表一个命题，而是表示在该符号所在的位置上可以用某一确定的命题去代替他。这种替代，通常叫指派。由于在命题逻辑里，一般并不关心命题的语义，只关心其真值。所以，对一个标识符的指派，实际上就是给它一个 T 或 F 的真值。

例 1.1 中所举之例均是简单命题，不能再分成更小的语句。例如语句“如果今天雨停了，我就去学校。”，它表达的意思是确定的，故而该语句也是命题。它和前面所举之例相比，它由两个基本语句组成，即“今天雨停了”和“我去学校”，显然这两个都是命题，而这两个命题已是有某种关系，不能表示成两个单独命题，我们称之为复合命题。

定义 1.2　由两个或两个以上的简单命题通过逻辑联结词和圆括号适当组成的命题称

为复合命题。

复合命题可以理解为它的部分是命题，或能再分解成更简单命题的命题。

在汉语中象“如果……，就……”的逻辑联结词还很多，比如“不仅……，而且”，“要么……，要么……”等等。“我不是学生”这样的命题不能简单理解成原子命题，因为它是否定句，也可以表示为“并非我是学生”，它的部分“我是学生”是一个简单命题，所以“我不是学生”是复合命题。注意逻辑联结词在复合命题中的作用。

例 1.3　下面命题哪些是简单命题，哪些是复合命题。如果是复合命题说出是由哪些简单命题组成：

（1）我是党员。

（2）我不但喜欢唐诗，而且喜欢宋词。

（3）如果你去，我则不去。

（4）明天去北京。

解　（1）是简单命题，即只有一个主语和一个谓语，不能再进行分解。

（2）是复合命题，由两个简单命题 P 和 Q 组成，其中

P：我喜欢唐诗。

Q：我喜欢宋词。

（3）是复合命题，由两个简单命题 R 和 S 组成，其中

R：你去。

S：我去。

为什么说命题 S 代指“我去”，而不是“我不去”，原因很简单，因为“我不去”又是一个复合命题，它是否定和“我去”两者复合而成。所以在对命题的符号化过程中，一定注意复合命题的分解。

（4）是简单命题。在代数式 $x+y$ 中，x 和 y 称为运算对象，$+$ 称为运算符，$x+y$ 称为运算结果。在命题演算中，也有同样的术语，联结词就是命题演算中的运算符，称为逻辑运算符或逻辑联结词。逻辑联结词和复合命题密切相关。为了能够将逻辑推理转变成类似于数学演算进行研究，那么就要涉及如何将命题逻辑符号化。

P　　Q	$P \wedge Q$

1.2　命题联结词

上一节提到可以将简单命题通过某些联结词和括号适当组成的新的命题，便是复合命题，其实联结词在这里起到了一种“复合”运算，简单命题可以视作参加运算元素，联结词便是运算符，那么复合命题就是这种运算的结果。有必要强调的是以下为了能够运用数学演算方法进行推理，必须对这些联结词也要进行符号化。

有必要再次强调的是以下标识符都作为命题变元使用。因此，在对一个符号表达式中的每一个标识符指派前，它不可能有真值，因此这种表达式不是一个命题，称为命题公式。对一个命题公式中的每一个标识符均指派一个命题真值后，原来的命题公式成为复合命题。这时，它有一个确定的真值。

通常情况，把对一个命题公式中的每一个变元均指派一个真值的做法，称作对命题公式的一次指派。因此，说仅当对命题公式作了指派之后，命题公式才是一个复合命题。

下面给出 5 个常用的逻辑联结词的定义和符号表示。

定义 1.3 设 P 是一个命题，则 P 的否定是一个新的命题，记作"$\neg P$"，读作"非 P"，符号"$\neg$"称作否定联结词。其真值规定为：$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假，$\neg P$ 为假当且仅当 P 为真。

表 1-1 否定的真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

命题 P 与其否定$\neg P$ 的关系如表 1-1 所示，它指明如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符（即逻辑联结词）的命题的真值。称为真值表。

例 1.4 设命题 P：济南是山东的省会。

那么$\neg P$ 表示的命题是：

$\neg P$：济南不是山东的省会。

或者

$\neg P$：并非济南是山东的省会。

例 1.5 设命题 Q：我去过海南。

那么$\neg Q$ 表示的命题是：

$\neg Q$：我没有去过海南。

或者

$\neg Q$：并非我去过海南。

虽然以上例子中的两种自然语言的语句形式上有所不同，但他们的真值完全相同。读者从此也可以看出符号化的语言是如何消除自然语言的二义性的。

定义 1.4 设有两个命题 P，Q，则 P，Q 的合取是一个新的命题，记为"$P\wedge Q$"，读作"P 且 Q"或者"P 与 Q"，符号"$\wedge$"称作合取联结词。其真值规定为：$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P，Q 同时为真，其他情况均为假。合取的定义也可用真值表1-2表示。

例 1.6 构造以下二语句的合取。

P：我喜欢唐诗。

Q：我喜欢宋词。

解 $P\wedge Q$：我喜欢唐诗和宋词。

或 $P\wedge Q$：我既喜欢唐诗，又喜欢宋词。

例 1.7 分析以下命题中的联结词。

G：小张与小王都是三好学生。

R：小张与小王是表兄弟。

解 对于命题 G，我们可以引入两个原子命题：

P：小张是三好学生。

Q：小王是三好学生。

表 1-2 合取的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

于是，G 就可表示成 $P \wedge Q$。

可是对语句 R 而言，其中的“与”是两个名词“小张”和“小王”的联结词。而命题逻辑中的“与”仅仅是一种语句间的联结词，因此它不能用于名词的联结。实际上，语句 R 在命题逻辑中是原子命题，其中不含有逻辑联结词“与”。

再强调一下，原子命题在命题逻辑演算中是最小单位，不可再细分。

定义 1.5　设有两个命题 P，Q，则 P，Q 的析取是一个新的命题，记为“$P \vee Q$”，读作“P 或 Q”，符号“$\vee$”称作析取联结词。其真值规定为：$P \vee Q$ 为假当且仅当 P，Q 同时为假，其他情况均为真。析取的定义也可用真值表 1－3 表示。

例 1.8　设有两个命题 P 和 Q，构造 P 和 Q 的析取。

P：我喜欢唱歌。

Q：我喜欢绘画。

则 P 和 Q 的析取式 $P \vee Q$。

$P \vee Q$：我喜欢唱歌或绘画。

表 1－3　析取的真值表

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

例 1.9　设有两个命题 P 和 Q

P：火车 pm4：30 开。

Q：火车 pm5：30 开。

那么命题“火车 pm4：30 或 pm5：30 开”能否表示为 $P \vee Q$ 的析取式呢？

要想回答这个问题，必须从析取联结词的定义或从其真值表出发。首先从定义出发，如果命题 P 和 Q 同时为假，显然是不符合题意的，即这列火车肯定是要么 pm4：30 开，要么 pm5：30 开，不会不开。从真值表出发，如果命题 P 和 Q 同时为真，这也是不可能的，一列火车的发车时间是唯一的。所以该命题不能表示成 $P \vee Q$ 的析取式。为了更好的理解此问题，再看一例：

例 1.10　设有两个命题 U 和 V：

U：我在图书馆 pm3：00。

V：pm3：00 我在教室。

这个命题是否能够表示成 $U \vee V$ 的析取式呢？假如用 $U \vee V$ 的析取式表示“pm3：00 我在图书馆或教室”是可以的，那么考察其是否满足析取的真值表。当 U 和 V 两者都为假时，$U \vee V$ 的真值符合真值表，当两者其中之一为真，其真值也符合真值表，但两者同时为真，就不符合真值表了，因为一个人不能同一时间在不同的地方，此时的真值应当是假。

自然语言中的“或”字表示两种意思，即“可兼或”和“不可兼或”。析取式中的“或”表示“可兼或”，后面所举两例均是“不可兼或”，故而不能用析取式表示，将在后面详细介绍“不可兼或”联结词。

定义 1.6　设有两个命题 P，Q，若由“若 P 则 Q”组成的复合命题，其真值为假当且仅当 P 为真 Q 为假，则复合命题“若 P 则 Q”称作 P 和 Q 的条件式，读作“若 P 则 Q”，记作“$P \rightarrow Q$”，符号“$\rightarrow$”是条件联结词。$P \rightarrow Q$ 所表述的关系就是 P 是 Q 的充分条件，或者 Q 是 P 的必要条件。自然语言中表示此意的就是因果关系，P 为前因，Q 为后果。描述此意的联结词也比较多，例如：“如果……，那么……”，“只要……，就……”

等等。$P \rightarrow Q$ 的真值规定为：$P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真 Q 为假，其他情况均为真。条件联结词的定义也可用真值表 1-4 表示。

表 1-4　条件的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

例 1.11　设有两个命题 P 和 Q：

P：他认真复习外语。

Q：他可以通过外语四级。

那么

$P \rightarrow Q$：如果他认真复习外语，就可以通过外语四级。

通过真值表，可以发现当前提条件 P 为假时，无论后果 Q 如何，$P \rightarrow Q$ 都为真，称为善意真值。也就是说当前提条件为假时，结果就不重要了。那么举个例子来说明此意，“如果下雨，则道路泥泞。”如果下雨了，道路泥泞则是肯定的，所以命题为真；如果下雨了，而道路不泥泞，这显然违背了该命题的原意，即复合命题真值为假；如果没有下雨，道路是否泥泞就不可而知了，但没有违背命题的原意，那么复合命题也就为真了。理解这一点对理解条件联结词是比较重要的，为什么条件联结词的真值表是这样的，也就没有问题了。

条件联结词有两种表示意思：其一就是内容联结，两个命题之间有条件关系或因果关系；其二是形式联结，两个命题之间没有条件关系或因果关系，只是通过条件联结词将两个命题联结在一起，没有考虑内容上的联结。比如“如果太阳从东面升起，则 $4+2=6$。”从其形式上只是表示条件联结，就其内容而言，无实质性关系。

在自然语言里，有多种措辞与 $P \rightarrow Q$ 对应：

(1) P 是 Q 的充分条件。

(2) Q 是 P 的必要条件。

(3) Q，如果 P。

(4) P，仅当 Q。

例 1.12　你将一事无成，除非你努力学习。

解　设 P：你努力学习。

Q：你将一事无成。

于是原语句可符号化成：$\neg P \rightarrow Q$

例 1.13　下面是一些有微妙差异的语句。

(1) 我承认它，除非太阳从西方升起。

(2) 我不承认它，除非太阳从西方升起。

(3) 如果太阳从西方升起，我承认它。

解　设 P：太阳从西方升起。

Q：我承认它。

于是以上三语句符号化后成为

(1) $\neg P \rightarrow Q$

(2) $\neg P \rightarrow \neg Q$

(3) $P \rightarrow Q$

定义 1.7　设有两个命题 P 和 Q，若由“P 当且仅当 Q”组成的复合命题，其真值为真当且仅当命题 P 和 Q 的真值相同，否则取假。则复合命题“P 当且仅当 Q”称作命题 P 和 Q 的等价式，读作“P 当且仅当 Q”，记为“$P\leftrightarrow Q$”，符号“$\leftrightarrow$”是双条件联结词（或等价联结词）。$P\leftrightarrow Q$ 所表述的关系是：P 是 Q 的充分必要条件。$P\leftrightarrow Q$ 真值规定为：$P\leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 同时为真或同时为假，其他情况为假。双条件联结词的定义也可用真值表 1-5 表示。

例 1.14　设有两个命题 P 和 Q：

P：你去。

Q：我也去。

那么双条件式表示为

$P\leftrightarrow Q$：你去当且仅当我去。

表 1-5　双条件的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

双条件式从形式上看相当于两个方向相反的条件式，即 $P\rightarrow Q$ 和 $Q\rightarrow P$。由于双条件式表示的关系是充分必要条件，即 P 与 Q 互为充分必要条件，那么用条件式来描述，就是 $P\rightarrow Q$ 和 $Q\rightarrow P$ 两个条件式同时成立。

例 1.15　对下列命题进行符号化，并用适当的联结词表示。

（1）他既是 100m 冠军，又是 4×100m 冠军。

（2）在建设物质文明的同时，要注意精神文明的建设。

（3）北京不是在南方。

（4）春天来了，燕子就飞向北方。

（5）x 能够被 2 整除等价于 x 是偶数。

（6）如果他会讲英语，则他的头发是黑的。

（7）你可以骑车上班，也可乘车上班去。

（8）李明是计算机系的学生，他的宿舍是 312 或 412。

解　（1）P：他是 100m 冠军。

Q：他是 4×100m 冠军。

那么命题（1）就可表示为

$$P\wedge Q$$

（2）R：物质文明建设。

S：精神文明建设。

那么命题（2）就可表示为

$$R\wedge S$$

（3）W：北京在南方。

那么命题（3）就可表示为

$$\neg W$$

（4）P：春天来了。

Q：燕子飞向北方。

那么命题（4）就可表示为

$$P \rightarrow Q$$

（5）P：x 能够被 2 整除。

Q：x 是偶数。

那么命题（5）就可表示为

$$P \leftrightarrow Q$$

（6）C：他会讲英语。

D：他的头发是黑的。

那么命题（6）就可表示为

$$C \rightarrow D$$

该条件式是一种形式联结，两个命题之间没有实质上的关系。

（7）E：你骑车上班。

F：你乘车上班。

这个命题就是前面提到的“不可兼或”，所以不能武断的用析取式来表示，那么将这句的意思转化一下，就是这样的“你骑车上班就不乘车上班，或者你乘车上班就不骑车上班。”，这样就可以用析取式来表示了。命题（7）可以表示为

$$(E \wedge \neg F) \vee (\neg E \wedge F)$$

（8）P：李明是计算机系的学生。

Q：宿舍是 312。

R：宿舍是 412。

由例（7）知，这个命题可表示为：

$$P \wedge ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R))$$

以上介绍了 5 种联结词，其中否定是一元联结词，其他的 4 个都是二元联结词。将联结词组成一个集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，称为一个联结词集。

在学习语言课的运算符时，肯定会讲运算符的优先级。联结词作为联结命题的运算，自当也应有一定的运算顺序。在上面的例子中看到，语句符号化时括号有时是必要的，它可以使符号化后的式子的结构显得更为清晰，不会有歧意出现。但是过多的括号会使式子结构显得繁杂，所以在一定的运算顺序下，可以将不必要的括号去掉，用最简洁的方式表示公式。多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。求复杂复合命题的真值时，除依据联结词的定义外，还要规定联结词的优先顺序，将括号也算在内，本书的联结词的优先顺序由高到低为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，如果有括号，先算括号内的，对于同一优先级的联结词，按照从左到右，即先出现的先运算。注意在不改变联结词优先级的情况下，括号可以省掉。

例如 $(P \vee Q) \rightarrow S$ 由于 $\vee$ 比 $\rightarrow$ 优先级高，所以可以写成 $P \vee Q \rightarrow S$；又如 $(P \vee Q) \wedge$

R 中的 $\vee$ 比 $\wedge$ 的优先级低，此时（$P\vee Q$）外层的括号是不可去掉的，不然改变了该式子代表的命题的意义。

习 题 1

1. 下列语句中哪些是命题。

(1) 今天是 10 月 1 日。

(2) 2+3=5。

(3) 这朵花多好看啊！

(4) 她不是一名教师。

(5) 本命题是假的。

(6) 长江是中国最长的一条河流。

(7) 请勿折叠！

(8) 今天天气怎么样？

(9) 天多蓝啊！

(10) 外星人是存在的。

2. 对下列命题进行符号化，并用相应的联结词联结。

(1) 他既聪明又用功。

(2) 王亮和王刚是兄弟。

(3) 灯泡不亮或者开关没开。

(4) 他不聪明，但他很用功。

(5) 如果明天下雨，我就待在家里。

(6) 两个三角形相等当且仅当两个三角形对应的三条边相等。

(7) 我不能肯定自己的观点。

(8) 你去我则不去。

(9) 如果太阳从东面升起，你就可以长生不老。

(10) $b^2-4ac\geq 0$ 是二元一次方程有实根的充要条件。

3. 对下列命题进行否定。

(1) 我喜欢大上海。

(2) 每个实数都能被 2 整除。

(3) 柏拉图是个哲学家。

(4) 太阳属于银河星系。

4. 判断下列命题的真值。

(1) 2－3＝0

(2) 2 是素数。

(3) 鲁迅是著名的文学家。

(4) 荷兰在欧洲。

第 2 节　合　式　公　式

2.1　合式公式

在定义了命题和 5 个联结词，以及对命题的符号化后，已经清楚地了解到，简单命题是命题，由简单命题通过联结词复合而成的复合命题也是命题，因此可以用联结词将复合命题继续联结，从而形成更为复杂的复合命题。在符号化以后，这些复合命题变成以字符串的形式出现。如果反过来，就可能不成立，因为随意拼凑的字符串不一定表达有意义的命题形式，所以需要一组规则，根据这组规则，将命题及其符号表示形式构成有意义的复合命题形式。

定义 1.8　将命题变元用联结词和圆括号按一定的逻辑关系组成的字符串称为合式公式或命题公式。

定义 1.8 给出了合式公式的概念，它和复合命题的概念是相似的，但偏重点不同，复合命题偏重于命题，而合式公式偏重于由命题变元及联结词形成的字符串。那么下面介绍合式公式的构造规则：

(1) 任何一个单个命题变元 P，Q，R，…是合式公式，并称为原子命题合式公式。

(2) 如果 P 是一个合式公式，那么 $\neg P$ 也是一个合式公式。

(3) 如果 P，Q 是合式公式，则 $(P \wedge Q)$、$(P \vee Q)$、$(P \rightarrow Q)$ 及 $(P \leftrightarrow Q)$ 都是合式公式。

(4) 一个字符串是合式公式当且仅当该字符串是有限次引用以上 (1)，(2)，(3) 各步骤形成。

上述规则采用了归纳法，(1) 是归纳的基础，定义了命题变元是合式公式；(2)，(3) 是进行归纳，由命题变元和联结词组成的字符串是合式公式；(4) 是极小化，即有限次引用前面的 3 条规则构成的字符串是合式公式，否则不是合式公式。通过这个规则，就可以构造出更为复杂的合式公式。

由此可知，

$(\neg Q \wedge P)$，$((P \rightarrow S) \wedge (Q \leftrightarrow R) \vee Q)$ 都是合式公式。

例 1.16　判断下面哪些是合式公式，哪些不是合式公式，为什么？

(1) $(P \wedge R)$；　　(2) $(P \wedge \vee R)$；　　(3) $((P \rightarrow Q) \vee S)$；

(4) $(PQ \wedge R)$；　　(5) $((\neg P \leftrightarrow R \wedge S)$

解　(1) 是合式公式，P 是一个命题变元，由规则 (1) 知是一个合式公式；R 是一个命题变元，也是一个合式公式。由规则 (3) 可知两个合式公式通过“$\wedge$”联结词形成的字符串是合式公式。

(2) 不是合式公式，因为“$\wedge$”，“$\vee$”都是二元联结词，由规则 (3) 可知每一个二元联结词应该联结合式公式，不能联结联结词，所以 $(P \wedge \vee R)$ 不是合式公式。

(3) 是合式公式，P，Q，S 都是命题变元，因此也都是合式公式，根据规则 (3)，先由 P，Q 构造合式公式 $P \rightarrow Q$，然后由合式公式 $P \rightarrow Q$ 和 S 构造合式公式，由联结词的