



高考密码系列丛书  
GAOKAOMIMAXILIECONGSHU



2011高中总复习

# 高考密码

丛书策划 / 十年高考教育研究院 丛书主编 / 任志鸿



文科数学  
配人教A版



云南出版集团公司  
云南教育出版社

打造中国高考第一原创品牌

2011



高考密码系列丛书  
GAOKAOMIMAXILIECONGSHU



2011高中总复习

# 高考密码

丛书策划 / 十年高考教育研究院 丛书主编 / 任志鸿

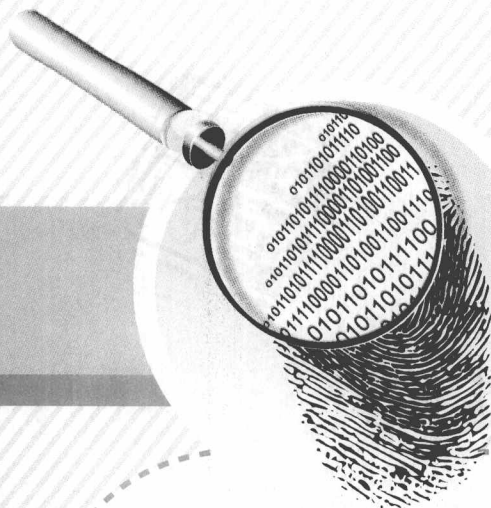
主编：王 芳  
副主编：安振平 李新星  
编委：袁海燕 舒云水 马兴奎  
杨 帆 黄以民 王鑫芳  
蒋文彬 李 芹 周立彬  
杨宝海 陈 利 孙小明

文科数学

配人教A版

云南出版集团公司  
云南教育出版社

打造中国高考第一原创品牌  
2011



# Contents

## 高考密码系列丛书

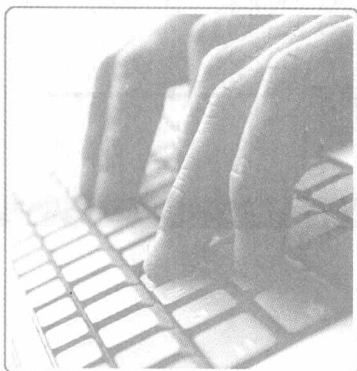
GAO KAO MI MA XI LIE CONG SHU

# 目录

>>>>>>

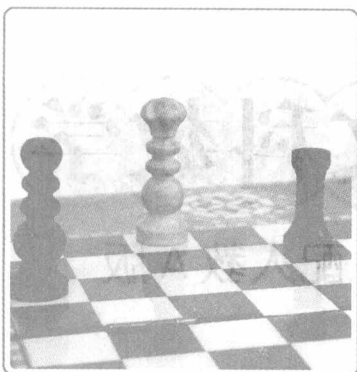
### 必考部分

|                          |   |
|--------------------------|---|
| 第一章 集合与常用逻辑用语(必修1、选修1-1) | 1 |
| 第一节 集合                   | 1 |
| 第二节 命题及其关系、充分条件与必要条件     | 4 |
| 第三节 简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词   | 6 |
| • 章末提升检测(一)(活页测试)        |   |



|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 第二章 函数、导数及其应用(必修1、选修1-1)    | 9  |
| 第一节 函数及其表示                  | 9  |
| 第二节 函数的单调性与奇偶性              | 12 |
| 第三节 二次函数                    | 14 |
| 第四节 指数与指数函数                 | 16 |
| 第五节 对数与对数函数                 | 19 |
| 第六节 幂函数                     | 21 |
| 第七节 函数的图象及其变换               | 24 |
| 第八节 函数与方程                   | 27 |
| 第九节 函数模型及其应用                | 29 |
| 第十节 变化率与导数、导数的计算            | 32 |
| 第十一节 导数在研究函数中的应用与生活中的优化问题举例 | 35 |
| • 章末提升检测(二)(活页测试)           |    |

|                                                   |    |
|---------------------------------------------------|----|
| 第三章 三角函数与三角恒等变换(必修4)                              | 38 |
| 第一节 任意角的弧度制及任意角的三角函数                              | 38 |
| 第二节 三角函数的诱导公式                                     | 41 |
| 第三节 三角函数的图象与性质                                    | 43 |
| 第四节 函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的图象及三角函数模型的简单应用 | 45 |
| 第五节 两角和与差的正弦、余弦和正切公式                              | 48 |
| 第六节 简单的三角恒等变换                                     | 50 |
| • 章末提升检测(三)(活页测试)                                 |    |



|                        |    |
|------------------------|----|
| 第四章 平面向量与解三角形(必修4、必修5) | 52 |
| 第一节 平面向量的概念及其线性运算      | 52 |
| 第二节 平面向量的基本定理及坐标表示     | 55 |
| 第三节 平面向量的数量积及平面向量的应用举例 | 57 |
| 第四节 正弦定理和余弦定理          | 59 |
| 第五节 解三角形应用举例           | 61 |

# Contents 高考密码

● <<<<<<< GAO KAO MI MA

• 章末提升检测(四)(活页测试)

|                          |    |
|--------------------------|----|
| <b>第五章 数列(必修5)</b> ..... | 64 |
| 第一节 数列的概念与简单表示法 .....    | 64 |
| 第二节 等差数列及其前 $n$ 项和 ..... | 66 |
| 第三节 等比数列及其前 $n$ 项和 ..... | 69 |
| 第四节 数列求和 .....           | 71 |
| 第五节 数列的综合应用 .....        | 74 |

• 章末提升检测(五)(活页测试)

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| <b>第六章 不等式(必修5)</b> .....                       | 77 |
| 第一节 不等关系与不等式 .....                              | 77 |
| 第二节 一元二次不等式及其解法 .....                           | 79 |
| 第三节 二元一次不等式(组)和简单的线性规划 .....                    | 81 |
| 第四节 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ..... | 84 |

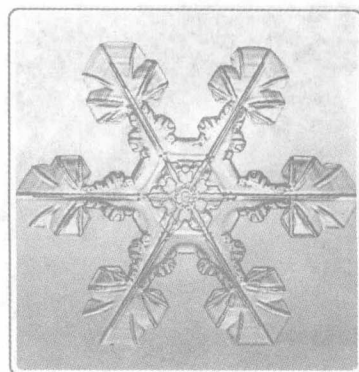
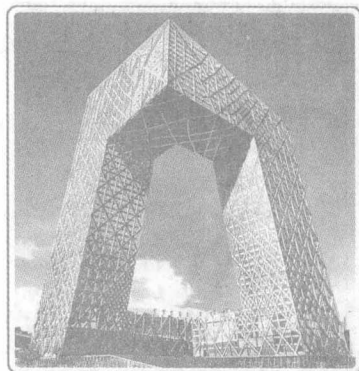
• 章末提升检测(六)(活页测试)

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| <b>第七章 立体几何初步(必修2)</b> .....  | 86 |
| 第一节 空间几何体的结构特征及其三视图和直观图 ..... | 86 |
| 第二节 空间几何体的表面积与体积 .....        | 89 |
| 第三节 空间点、直线、平面之间的位置关系 .....    | 91 |
| 第四节 直线、平面平行的判定及其性质 .....      | 94 |
| 第五节 直线、平面垂直的判定及其性质 .....      | 96 |
| 第六节 空间直角坐标系 .....             | 99 |

• 章末提升检测(七)(活页测试)

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| <b>第八章 平面解析几何(必修2、选修1-1)</b> ..... | 101 |
| 第一节 直线的倾斜角与斜率 .....                | 101 |
| 第二节 直线的方程 .....                    | 103 |
| 第三节 直线的交点坐标与距离公式 .....             | 106 |
| 第四节 圆的方程 .....                     | 108 |
| 第五节 直线、圆的位置关系 .....                | 110 |
| 第六节 椭圆 .....                       | 113 |
| 第七节 双曲线 .....                      | 115 |
| 第八节 抛物线 .....                      | 118 |

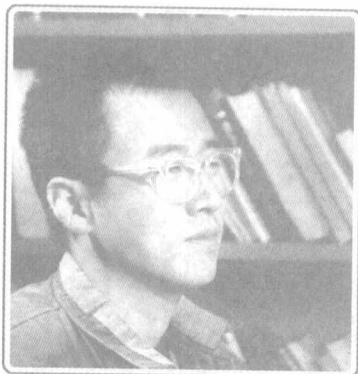
• 章末提升检测(八)(活页测试)



# 高考密码

# Contents

GAO KAO MI MA >>>>>>>> ●



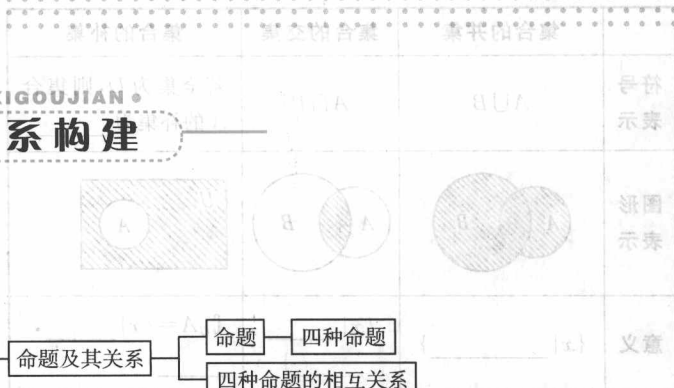
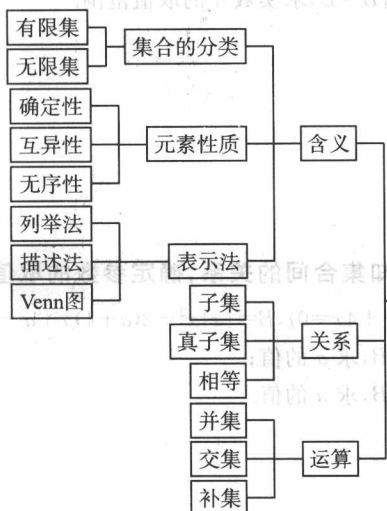
|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| <b>第九章 推理与证明(选修 1—2)</b>                 | 121 |
| 第一节 合情推理与演绎推理                            | 121 |
| 第二节 直接证明与间接证明                            | 123 |
| • 章末提升检测(九)(活页测试)                        |     |
| <b>第十章 算法初步、数系的扩充与复数的引入(必修 3、选修 1—2)</b> | 126 |
| 第一节 算法与程序框图                              | 126 |
| 第二节 基本算法语句与算方案例                          | 129 |
| 第三节 流程图与结构图                              | 132 |
| 第四节 复数的概念及其运算                            | 135 |
| • 章末提升检测(十)(活页测试)                        |     |
| <b>第十一章 统计与统计案例(必修 3、选修 1—2)</b>         | 137 |
| 第一节 随机抽样                                 | 137 |
| 第二节 用样本估计总体                              | 139 |
| 第三节 变量间的相关关系                             | 142 |
| 第四节 统计案例                                 | 145 |
| • 章末提升检测(十一)(活页测试)                       |     |
| <b>第十二章 概率(必修 3)</b>                     | 148 |
| 第一节 随机事件的概率                              | 148 |
| 第二节 古典概型                                 | 150 |
| 第三节 几何概型                                 | 152 |
| • 章末提升检测(十二)(活页测试)                       |     |
| <b>选考部分</b>                              |     |
| <b>选修 4—1 几何证明选讲</b>                     | 154 |
| 第一节 相似三角形的判定及有关性质                        | 154 |
| 第二节 直线与圆的位置关系、圆锥曲线性质的探讨                  | 157 |
| <b>选修 4—4 坐标系与参数方程</b>                   | 160 |
| 第一节 坐标系与简单曲线的极坐标方程                       | 160 |
| 第二节 参数方程、渐开线与摆线                          | 163 |
| <b>选修 4—5 不等式选讲</b>                      | 166 |
| 第一节 含有绝对值的不等式及其解法                        | 166 |
| 第二节 几个重要不等式的证明及其应用                       | 168 |

# 第一章

## 集合与常用逻辑用语

### 知识

### 体系构建



## 第一节 集合

### 考纲目标 锁定

#### 1. 集合的含义与表示

- (1)了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系。
- (2)能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题。

#### 2. 集合间的基本关系

- (1)理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集。
- (2)在具体情境中,了解全集与空集的含义。

#### 3. 集合的基本运算

- (1)理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集。
- (2)理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集。
- (3)能使用 Venn 图表达集合的关系及运算。

### 知识要点 梳理

#### 1. 元素与集合

- (1)集合中元素的三个特性:\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_。

#### (2)集合中元素与集合的关系:

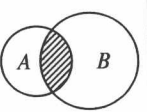
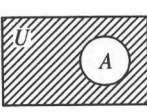
| 文字语言 | 符号语言         |
|------|--------------|
| 属于   | $x \in A$    |
| 不属于  | $x \notin A$ |

#### 2. 集合间的基本关系

| 表示<br>关系 | 文字语言                                            | 符号语言                                                               |
|----------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 相等       | 集合 A 与集合 B 中的所有元素都相同                            | $A=B$ 或 $A=B$                                                      |
| 子集       | 集合 A 中任意一元素均为集合 B 中的元素                          | $A \subseteq B$ (或 $A \subset B$ )                                 |
| 真子集      | 集合 A 中任意一元素均为集合 B 中的元素,且集合 B 中至少有一元素不是集合 A 中的元素 | $A \subset B$ (或 $A \subsetneq B$ )                                |
| 空集       | 空集是任何集合的子集,是任何_____的真子集                         | $\emptyset \subseteq A, \emptyset \subsetneq B (B \neq \emptyset)$ |

**思考感悟** >>> 怎样理解空集与集合 $\{0\}$ 和 $\{\emptyset\}$ 之间的关系?

### 3. 集合的基本运算

|      | 集合的并集                                                                             | 集合的交集                                                                             | 集合的补集                                                                             |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 符号表示 | $A \cup B$                                                                        | $A \cap B$                                                                        | 若全集为 $U$ , 则集合 $A$ 的补集为_____                                                      |
| 图形表示 |  |  |  |
| 意义   | $\{x   \text{_____}\}$                                                            | $\{x   \text{_____}\}$                                                            | $\complement_U A = \{x   \text{_____}, \text{_____}\}$                            |

### 基础回扣 热身

- 设集合  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $M = \{0, 3, 5\}$ ,  $N = \{1, 4, 5\}$ , 则  $M \cap (\complement_U N)$  等于 \_\_\_\_\_ ( )  
 A.  $\{5\}$  B.  $\{0, 3\}$   
 C.  $\{0, 2, 3, 5\}$  D.  $\{0, 1, 3, 4, 5\}$
- 下列结论正确的是 \_\_\_\_\_ ( )  
 A.  $0 \notin \mathbb{N}$  B.  $1 \subseteq \{x^2 - x = 0\}$   
 C.  $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$  D.  $\emptyset \in \{0\}$
- $A = \{x | (x-1)^2 < 3x-7\}$ , 则  $A \cap \mathbb{Z}$  的元素个数为 \_\_\_\_\_.
- (密码原创) 设集合  $U$  为全集,  $A, B$  是其两个子集, 下列四个命题  
 ①  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$  ②  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$  ③  $A \subseteq B \Leftrightarrow \complement_U B \subseteq \complement_U A$  ④  $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$   
 其中正确命题的序号是 \_\_\_\_\_.
- 设  $A = \{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | x + y + m \geq 0\}$ , 若  $A \cap B = A$ , 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

### 精典例题 示范

#### 题型一 集合间关系的判定

**【例1】** 已知集合  $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$ ,

$$N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$P = \{x | x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbb{Z}\},$$

则  $M, N, P$  满足关系 \_\_\_\_\_ ( )

- A.  $M = N \subsetneq P$  B.  $M \subsetneq N = P$   
 C.  $M \subsetneq N \subsetneq P$  D.  $N \subsetneq P \subsetneq M$

规范解答:

#### 题型二 集合的运算

**【例2】** 设全集是实数集  $\mathbb{R}$ ,  $A = \{x | 2x^2 - 7x + 3 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + a < 0\}$ .

- 当  $a = -4$  时, 求  $A \cap B$  和  $A \cup B$ ;
- 若  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = B$ , 求实数  $a$  的取值范围.

规范解答:

#### 题型三 已知集合间的关系, 确定参数的取值

**【例3】** 设  $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$ ,

- 若  $A \cap B = B$ , 求  $a$  的值;
- 若  $A \cup B = B$ , 求  $a$  的值.

规范解答:

#### 题型四 新型集合的概念与运算

**【例4】** (12分) 非空集合  $G$  关于运算  $\oplus$  满足: (1) 对任意的  $a, b \in G$ , 都有  $a \oplus b \in G$ , (2) 存在  $e \in G$ , 使得对一切  $a \in G$  都有  $a \oplus e = e \oplus a = a$ , 则称  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”. 现给出下列集合和运算:

- $G = \{\text{非负整数}\}$ ,  $\oplus$  为整数的加法;
- $G = \{\text{偶数}\}$ ,  $\oplus$  为整数的乘法;
- $G = \{\text{平面向量}\}$ ,  $\oplus$  为平面向量的加法;
- $G = \{\text{二次三项式}\}$ ,  $\oplus$  为多项式的加法;
- $G = \{\text{虚数}\}$ ,  $\oplus$  为复数的乘法.

其中  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”的有哪些? 并说明理由.

**思路点拨:** 充分理解“融洽集”的概念要求, 而后将①②③④⑤逐一验证是否符合条件即可.

**规范解答:** ①  $G = \{\text{非负整数}\}$ ,  $\oplus$  为整数的加法.

∵ 任意两个非负整数的和仍为非负整数, 且存在  $e = 0$ , 使得对一切  $a \in G$ , 都有  $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ ,

∴ ①符合  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”; ..... 2分

②  $G = \{\text{偶数}\}$ ,  $\oplus$  为整数的乘法.

∵ 任意两个偶数的乘积仍是偶数, 但不存在偶数  $e \in G$ , 使得对一切  $a \in G$ , 都有  $a \oplus e = e \oplus a = a$  成立,

∴ ②不符合  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”; ..... 4分

③  $G = \{\text{平面向量}\}$ ,  $\oplus$  为平面向量的加法.

**密码心语:** 一个人生活中的失意乃至失败在很大程度上来说是心理的而不是现实的, 是技术性的而不是宿命的. 现实至多为失败者提供了解脱的借口, 而对宿命的信仰最终无情地扑灭了成功的任何希望. 不是每一次努力都会有收获, 但是, 每一次收获都必须努力, 这是一个不公平的不可逆转的命题. 高考密码愿意陪你一起努力、一起欢唱, 去赢取美好的明天!

∵任意两个向量之和仍为向量,且存在  $e=0$ ,使得对一切  $a \in G$ ,都有  $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ ,

∴③符合  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”. ..... 7 分

④  $G = \{\text{二次三项式}\}$ ,  $\oplus$  为多项式的加法.

∵任意两个二次三项式的和不一定是二次三项式,

∴④不符合  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”; ..... 9 分

⑤  $G = \{\text{虚数}\}$ ,  $\oplus$  为复数的乘法.

∵任意两个虚数的乘积不一定是虚数,

∴⑤不符合  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”. ..... 11 分

综上所述,其中  $G$  关于运算  $\oplus$  为“融洽集”的有①③.

..... 12 分

点评:新型集合的概念与运算问题是近几年新课标高考的热点问题.在给出新的运算法则的前提下,充分利用已知求解是关键.集合命题中与运算法则相关的问题,是对映射构建下的集合与集合、元素与元素间的运算相关性及封闭性的研究.



### 变式演练

(密码改编) 设  $\oplus$  是  $\mathbf{R}$  上的一个运算,  $A$

是  $\mathbf{R}$  的非空子集,若对任意  $a, b \in A$ ,有  $a \oplus b \in A$ ,则称  $A$  对运算  $\oplus$  封闭.对于数集:自然数集、整数集、有理数集、无理数集中对加法、减法、乘法和除法(除数不为 0)四则运算都封闭的数集的个数是 .....

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

## 方法规律 总结

### 1. 集合的含义与表示

(1)集合的元素必须满足“三性”:确定性、互异性、无序性.要解决与集合有关的问题,一方面,要善于抓住集合元素的“三性”;另一方面,在解答完毕之时,不要忘记检验集合的元素是否满足这“三性”.

(2)要注意准确理解符号描述法  $\{x | p(x)\}$ ,其中“ $|$ ”前为元素所具有的形式,“ $|$ ”后为元素所具有的属性  $p(x)$ .

(3)要注意下列几个集合:

①  $\{x | f(x) > 0\}$  表示使不等式  $f(x) > 0$  成立的数集;

②  $\{x | y = f(x)\}$  表示函数  $y = f(x)$  的定义域;

③  $\{y | y = f(x)\}$  表示函数  $y = f(x)$  的值域;

④  $\{x | f(x) = 0\}$  是方程  $f(x) = 0$  的解集;

⑤  $\{(x, y) | F(x, y) = 0\}$  是曲线  $F(x, y) = 0$  上的点构成的集合.

### 2. 集合间的关系

(1)对于两个集合  $A$  与  $B$ ,如果集合  $A$  的任何一个元素都是集合  $B$  的元素,那么集合  $A$  叫做集合  $B$  的子集,记作  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ).

(2)若  $A \subseteq B$ ,且  $B$  中至少有一个元素不在集合  $A$  中,则称  $A$  为  $B$  的真子集,记作  $A \subsetneq B$  (或  $B \supsetneq A$ ).

(3)集合  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  有  $2^n$  个子集,有  $2^n - 1$  个真子集,有  $2^n - 2$  个非空真子集.

### 3. 集合的运算

(1)求集合的并、交、补是集合间的基本运算,运算结果仍然是集合,区分交集与并集的关键是“且”与“或”,在处理有关交集与并集的问题时,常常从这两个字眼出发去揭示、挖掘题设条件,结合 Venn 图或数轴,进而用集合语言表示,增强运用数形结合思想方法意识.

(2)几个重要结论:

①摩根法则:  $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ ,  $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ .

②集合的交集、并集与子集的关系:  $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$ ,  $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ .

③容斥原理:  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$  (其中  $\text{card}(A)$  表示有限集合  $A$  的元素个数).

### 4. 解决集合问题的关键点

(1)明确集合的元素的意义,它是什么类型的对象(如数、点、方程、图形等).

(2)弄清集合由哪些元素组成,这就需要我们抽象的问题具体化、形象化,也就是善于对集合的三种语言(文字、符号、图形)进行相互转化,同时还要善于将多个参数表示的符号描述法  $\{x | P(x)\}$  的集合化到最简形式.

(3)要善于运用数形结合、分类讨论、化归与转化等数学思想方法来解决集合的问题.

(4)集合问题多与函数、方程、不等式等知识综合在一起,要注意各类知识的融会贯通.



## 速效提升 训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. 若集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ , 则  $\complement_U(A \cap B)$  等于 .....

A.  $\{2, 3\}$

B.  $\{1, 4, 5\}$

C.  $\{4, 5\}$

D.  $\{1, 5\}$

2. 满足  $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 且  $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$  的集合  $M$  的个数是 .....

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. 定义集合运算:  $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$ . 设集合  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ , 则集合  $A \odot B$  的所有元素之和为 .....

A. 0

B. 6

C. 12

D. 18

4. (密码原创) 集合  $A = \{n \in \mathbf{N} | \frac{2008}{3n-1} \in \mathbf{N}\}$ , 则集合  $A$  的子集的个数为 \_\_\_\_\_ 个.

5. (密码改编) 已知集合  $A = \{(x, y) | y = x^2 + m, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = 2x, x \in \mathbf{R}\}$ , 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

6. 已知  $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$ , 若  $1 \in A$ , 求  $a$  的值.

## 第二节 命题及其关系、充分条件与必要条件

### 考纲目标 锁定

KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 理解命题的概念.
2. 了解“若  $p$ , 则  $q$ ”形式的命题的逆命题、否命题与逆否命题, 会分析四种命题的相互关系.
3. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

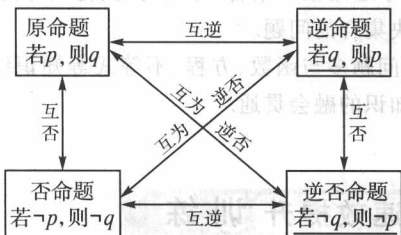
### 知识要点 梳理

ZHISHIYAO DIANSHULI

#### 1. 命题的概念

在数学中用语言、符号或式子表达的, 可以\_\_\_\_\_的陈述句叫做命题. 其中\_\_\_\_\_的语句叫真命题, \_\_\_\_\_的语句叫假命题.

#### 2. 四种命题的关系



原命题与它的逆否命题一定同真或同假; 同样, 它的逆命题与否命题也一定同真或同假. 也就是说: 互为逆否的两个命题是等效的(等价的).

**思考感悟** 命题的否命题与命题的否定有什么不同?

#### 3. 充要条件

(1) 定义: 对于“若  $p$ , 则  $q$ ”形式的命题, 如果已知  $p \Rightarrow q$ , 那么  $p$  是  $q$  的\_\_\_\_\_,  $q$  是  $p$  的\_\_\_\_\_.

如果既有  $p \Rightarrow q$ , 又有  $q \Rightarrow p$ , 则记作  $p \Leftrightarrow q$ , 就说  $p$  是  $q$  的\_\_\_\_\_.

(2) 若\_\_\_\_\_, 则  $p$  是  $q$  的充分但不必要条件; 若\_\_\_\_\_, 则  $p$  是  $q$  的必要但不充分条件.

### 基础回扣 热身

JICHUHUIKOURESHEN

1. 在  $\triangle ABC$  中, “ $\angle A > 30^\circ$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的…… ( )
  - A. 充分不必要条件
  - B. 必要不充分条件
  - C. 充要条件
  - D. 既不充分也不必要条件
2. 在下列关于直线  $l, m$  与平面  $\alpha, \beta$  的命题中, 真命题是 ( )
  - A. 若  $l \subset \beta$  且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \perp \alpha$

- B. 若  $l \perp \beta$  且  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $l \perp \alpha$
- C. 若  $l \perp \beta$  且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \parallel \alpha$
- D. 若  $\alpha \cap \beta = m$ , 且  $l \parallel m$ , 则  $l \parallel \alpha$

#### 3. 已知下列命题:

- ① “若  $x^2 + y^2 = 0$ , 则实数  $x, y$  全为零”的逆否命题
- ② “矩形是平行四边形”的逆命题
- ③ “若  $m > 2$ , 则  $x^2 - 2x + m > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ ”的逆否命题
- ④ “若  $a > b$ , 则  $ac^2 > bc^2$ ”的逆否命题

其中真命题是…… ( )

- A. ①③
- B. ②④
- C. ①③④
- D. ①②

4. (密码改编) “ $m = \frac{1}{2}$ ”是直线  $(m+2)x + 3my + 1 = 0$  与直线  $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$  相互垂直的\_\_\_\_\_条件.

5. 已知  $A$  是  $B$  的充分条件,  $B$  是  $C$  的充要条件,  $\neg A$  是  $E$  的充分条件,  $D$  是  $C$  的必要条件, 则  $D$  是  $\neg E$  的\_\_\_\_\_.

6. (密码原创) 对于命题“若  $xy = 0$ , 则  $x = 0$  或  $y = 0$ ”, 其逆命题、否命题、逆否命题、命题的否定中, 正确命题的个数为\_\_\_\_\_.

### 精典例题 示范

JINGDIANLITISHIFAN

#### 题型一 四种命题关系和命题真假的判断

**【例1】** 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题、命题的否定, 并判断它们的真假:

- (1) 若  $q \leq 1$ , 则方程  $x^2 + 2x + q = 0$  有实根;
- (2) 若  $x, y$  都是奇数, 则  $x + y$  是偶数.

**规范解答:**

#### 题型二 充分条件与必要条件的判定

**【例2】** (1) 指出下列各组命题中,  $p$  是  $q$  的什么条件?

- ①  $p: (x-2)(x-3) = 0; q: x-2 = 0$ .
- ②  $p$ : 四边形的对角线相等;  $q$ : 四边形是平行四边形.

(2) 已知  $p: m < -3$  或  $m > 6; q: y = x^2 + mx + m + 3$  有两个不同的零点, 则  $\neg p$  是  $\neg q$  的什么条件.

**规范解答:**

### 题型三 充要条件的证明

【例3】已知  $ab \neq 0$ , 求证:  $a+b=1$  的充要条件是  $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$ .

**思路点拨:** 此类问题需证明两个命题, 即充分性与必要性, 故应分清谁是条件, 谁是结论, 然后再分别证明.

**规范解答:**

### 题型四 条件关系的应用

【例4】(12分) 设命题  $p: (4x-3)^2 \leq 1$ ; 命题  $q: x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$ , 若  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件, 求实数  $a$  的取值范围.

**思路点拨:** (1) 用集合的观点考查问题, 先写出  $\neg p$  和  $\neg q$ , 然后, 由  $\neg q \Rightarrow \neg p$ , 但  $\neg p \not\Rightarrow \neg q$  来求  $m$  的取值范围; (2) 将  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件转化为  $p$  是  $q$  的充分不必要条件再求解.

**规范解答:** 设  $A = \{x | (4x-3)^2 \leq 1\}$ ,

$$B = \{x | x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0\},$$

$$\text{易知 } A = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$B = \{x | a \leq x \leq a+1\}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件, 从而  $p$  是  $q$  的充分不

$$\text{必要条件, 即 } A \subseteq B, \therefore \begin{cases} a \leq \frac{1}{2}, \\ a+1 \geq 1. \end{cases}$$

故所求实数  $a$  的取值范围是  $[0, \frac{1}{2}]$  ..... 12 分

**点评:** 在涉及求参数的取值范围又与充分、必要条件有关的问题, 常常借助集合的观点来考虑. 若涉及参数问题解决起来较为困难时, 注意运用等价转化, 转化后就比较好理解了.

**变式演练** (密码改编) 求证:  $a < -1$  是一元二次方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0 (a \neq 0)$  有一个正根和一个负根的充分不必要条件.

## 方法规律 总结

### 1. 命题的判定以及命题真假的判定

#### (1) 命题的判定.

判断一个语句是不是命题, 就是要看它是否符合“是陈述句”和“可以判断真假”这两个条件. 只有这两个条件都具备的语句才是命题.

#### (2) 命题真假的判定.

对于命题真假的判定, 关键是分清命题的条件与结论, 只有将条件与结论分清, 才有可能正确地判断其真假.

(3) 数学中的定义、公理、公式、定理都是命题, 但命题与定理是有区别的, 命题有真假之分, 而定理都是真的.

### 2. 四种命题的关系

(1) 在判断四种命题之间的关系时, 首先要注意分清命题的条件与结论, 再比较每个命题的条件与结论之间的关系. 要注意四种命题关系的相对性, 一旦一个命题定为原命题, 也就相应地有了它的“逆命题”、“否命题”、“逆否命题”.

(2) 当一个命题有大前提而要写出其他三种命题时, 必须保留大前提, 也就是大前提不动; 对于由多个并列条件组成的命题, 在写其他三种命题时, 应把其中一个 (或  $n$  个) 作为大前提.

### 3. 充分条件、必要条件、充要条件的判断

(1) 由充分条件、必要条件的定义可知: 若  $p \Rightarrow q$ , 则  $p$  是  $q$  的充分条件, 同时  $q$  是  $p$  的必要条件.

以下四种说法所表达的意义相同:

- ① 命题“若  $p$ , 则  $q$ ”为真; ②  $p \Rightarrow q$ ; ③  $p$  是  $q$  的充分条件; ④  $q$  是  $p$  的必要条件.

(2) 利用集合关系进行判断.

|                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------|
| 若集合 $p \subseteq q$ , 则 $p$ 是 $q$ 的充分条件                               |
| 若集合 $q \subseteq p$ , 则 $p$ 是 $q$ 的必要条件                               |
| 若集合 $p \subsetneq q$ , 则 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件                           |
| 若集合 $p \supsetneq q$ , 则 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件                           |
| 若集合 $q = p$ , 则 $p$ 是 $q$ 的充分必要条件                                     |
| 若集合 $p \not\subseteq q$ 且 $q \not\subseteq p$ , 则 $p$ 是 $q$ 的非充分非必要条件 |

## 速效提升 训练

- 与命题“若  $a \in M$ , 则  $b \in M$ ”等价的命题是 ..... ( )  
A. 若  $a \notin M$ , 则  $b \notin M$  B. 若  $b \in M$ , 则  $a \in M$   
C. 若  $a \notin M$ , 则  $b \in M$  D. 若  $b \in M$ , 则  $a \notin M$
- 设  $f(x) = x^3 + x$ , 则对任意实数  $a, b$ , “ $a+b \geq 0$ ”是“ $f(a) + f(b) \geq 0$ ”的 ..... ( )  
A. 充要条件 B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知函数  $f(x), g(x)$  定义在  $\mathbf{R}$  上,  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ , 则“ $f(x), g(x)$  均为奇函数”是“ $h(x)$  为偶函数”的 ..... ( )  
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- (密码原创)  $a < 0$  是方程  $ax^2 + 1 = 0$  有一个负实数根的 \_\_\_\_\_ 条件.
- 设命题  $p$ : 函数  $y = \sqrt{-2x^2 + 3x - 1}$  有意义, 命题  $q$ :  $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) \leq 0$ , 若  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
- 判断命题“若  $a \geq 0$ , 则  $x^2 + x - a = 0$  有实根”的逆否命题的真假.

## 第三节 简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词

### 考纲目标 锁定

1. 了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.
2. 理解全称量词与存在量词的意义.
3. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

### 知识要点 梳理

#### 1. 命题 $p \wedge q, p \vee q, \neg p$ 的真假判断

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $\neg p$ |
|-----|-----|--------------|------------|----------|
| 真   | 真   |              |            |          |
| 真   | 假   |              |            |          |
| 假   | 真   |              |            |          |
| 假   | 假   |              |            |          |

#### 2. 全称量词

(1) 短语“        ”“        ”在逻辑中通常叫做全称量词,并用符号“        ”表示.

(2) 含有        的命题,叫做全称命题.

(3) 全称命题“对  $M$  中任意一个  $x$ ,有  $p(x)$  成立”可用符号简记为:         .

#### 3. 存在量词

(1) 短语“        ”“        ”在逻辑中通常叫做存在量词,并用符号“        ”表示.

(2) 含有        的命题,叫做特称命题.

(3) 特称命题“存在  $M$  中的一个  $x_0$ ,使  $p(x_0)$  成立”可用符号简记为:         .

#### 4. 含有一个量词的命题的否定

| 命题                          | 命题的否定 |
|-----------------------------|-------|
| $\forall x \in M, p(x)$     |       |
| $\exists x_0 \in M, p(x_0)$ |       |

### 基础回扣 热身

1. 命题“对任意的  $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是          ( )
  - A. 不存在  $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$
  - B. 存在  $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$
  - C. 存在  $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$
  - D. 对任意的  $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$
2. 已知命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$ , 则          ( )
  - A.  $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x \geq 1$

B.  $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \geq 1$

C.  $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$

D.  $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$

3. 命题“存在  $x \in \mathbf{Z}$ , 使  $x^2 + 2x + m \leq 0$ ”的否定是          ( )

A. 存在  $x \in \mathbf{Z}$ , 使  $x^2 + 2x + m > 0$

B. 不存在  $x \in \mathbf{Z}$ , 使  $x^2 + 2x + m > 0$

C. 对于任意  $x \in \mathbf{Z}$ , 都有  $x^2 + 2x + m \leq 0$

D. 对于任意  $x \in \mathbf{Z}$ , 都有  $x^2 + 2x + m > 0$

4. (密码改编)在一次射击训练中,小明连续射击两次.记命题  $p$  是“第一次射中”, $q$  是“第二次射中”,则命题“至多有一次射中”用  $p, q$  及逻辑联结词“ $\wedge, \vee, \neg$ ”可表示为         .

5. 如果“ $p$  且  $q$ ”及“非  $p$ ”都是假命题,则命题  $q$  的真假为         .

6. 指出下列命题中哪些是全称命题,将全称命题否定成特称命题,并判断其真假:

①空间中任意两条没有公共点的直线都平行;

②至少有一个质数不是奇数;

③实数的绝对值是正数;

④  $\exists x \in \mathbf{R}$ , 使  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

### 精典例题 示范

#### 题型一 含有逻辑联结词命题的真假判断

【例1】分别指出由下列命题构成的“ $p \vee q$ ”“ $p \wedge q$ ”“ $\neg p$ ”形式的命题的真假.

(1)  $p$ : 3 是 9 的约数,  $q$ : 3 是 18 的约数;

(2)  $p$ : 菱形的对角线相等,  $q$ : 菱形的对角线互相垂直;

(3)  $p$ : 方程  $x^2 + x - 1 = 0$  的两实根符号相同,

$q$ : 方程  $x^2 + x - 1 = 0$  的两实根绝对值相等;

(4)  $p$ :  $\pi$  是有理数,  $q$ :  $\pi$  是无理数.

规范解答:

#### 题型二 全(特)称命题及其真假判断

【例2】判断下列命题是全称命题还是特称命题,并判断其真假.

(1) 对数函数都是单调函数;

(2) 至少有一个整数,它既能被 2 整除,又能被 5 整除;

(3)  $\forall x \in \{x | x \text{ 是无理数}\}$ ,  $x^2$  是无理数;

(4)  $\exists x \in \{x | x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $\log_2 x > 0$ .

**魅力数学:** 菲尔兹奖、诺贝尔奖中为什么没有设数学奖? 对此人们一直有着各种猜测与议论. 其实, 数学领域中也有有一种世界性的奖励, 这就是每四年颁发一次的菲尔兹奖. 第一次菲尔兹奖颁发于 1936 年. 菲尔兹奖只是一枚金质奖章, 与诺贝尔奖金的十万美元相比真是微不足道. 但在各国数学家的眼里, 菲尔兹奖所带来的荣誉可与诺贝尔奖金媲美, 是国际数学界的最高奖.

规范解答:

### 题型三 含有一个量词命题的否定

【例3】写出下列命题的否定:

- (1)所有的正方形都是菱形;
- (2)每一个平行四边形的四个顶点共圆;
- (3) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ;
- (4) $\exists x_0 \in \mathbf{N}, x_0^3 < 1$ ;
- (5)有的整数能被9整除;
- (6)存在一个函数,既是奇函数又是偶函数.

规范解答:

### 题型四 利用含逻辑联结词的命题的真假求参数的取值范围

【例4】(12分)设  $p$ : 函数  $f(x) = \lg(ax^2 - x + \frac{1}{16}a)$  的定义域是

$\mathbf{R}$ ;  $q$ : 不等式  $\sqrt{2x+1} < 1 + ax$  对一切正实数  $x$  均成立. 如果命题“ $p$  或  $q$ ”为真命题, 命题“ $p$  且  $q$ ”为假命题, 求实数  $a$  的取值范围.

思路点拨: 先求出当  $p, q$  为真命题时  $a$  的取值范围. 再根据“ $p$  或  $q$ ”, “ $p$  且  $q$ ”的真假进一步求出  $a$  的取值范围.

规范解答: 命题  $p$  为真命题  $\Leftrightarrow$  函数  $f(x) = \lg(ax^2 - x + \frac{1}{16}a)$  的定义域为  $\mathbf{R} \Leftrightarrow ax^2 - x + \frac{1}{16}a > 0$  对任意实数  $x$  均成立.

..... 2 分  
当  $a=0$  时,  $-x > 0$ , 解集不为  $\mathbf{R}$ , ..... 3 分

所以  $a=0$  舍去, 故  $\begin{cases} a > 0 \\ 1 - \frac{1}{4}a^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 2$ ,

则命题  $p$  为真命题  $\Leftrightarrow a > 2$ . ..... 5 分

命题  $q$  为真命题  $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - 1 < ax$  对一切正实数均

成立  $\Leftrightarrow a > \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$  对

一切正实数  $x$  均成立. .... 8 分

由于  $x > 0$ , 所以  $\sqrt{2x+1} > 1$ .

所以  $\sqrt{2x+1} + 1 > 2$ .

所以  $\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} < 1$ .

所以, 命题  $q$  为真命题  $\Leftrightarrow a \geq 1$ . ..... 10 分

根据题意知, 命题  $p$  与  $q$  中有且只有一个是真命题, 当命题  $p$  为真命题且命题  $q$  为假命题时  $a$  不存在; 当命题  $p$  为假命题且命题  $q$  为真命题时,  $a$  的取值范围是  $[1, 2]$ . ...

..... 11 分

综上, 命题“ $p$  或  $q$ ”为真命题, 命题“ $p$  且  $q$ ”为假命题时实数  $a$  的取值范围是  $[1, 2]$ . .... 12 分

点评: “形式上”的二次不等式, 应注意对二次项系数的讨论. 命题  $q$  是一个不等式恒成立问题, 上面用的方法是分离参数法, 即把字母  $a$  与另一变量  $x$  置于不等式的两端, 这是处理不等式恒成立问题的常用方法.

**变式演练** (密码改编) 设命题  $p$ : 关于  $x$  的不等式  $ax^2 > 1$  的解集是  $\{x | x < 0\}$ , 命题  $q$ : 函数  $y = \lg(ax^2 - x + a)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ . 如果  $p$  和  $q$  有且仅有一个正确, 求  $a$  的取值范围.

## 方法规律 总结

### 1. 逻辑联结词——或、且、非

(1)  $p \wedge q, p \vee q, \neg p$  三种命题.

用联结词“且”把命题  $p$  和  $q$  联结起来, 得到一个新命题, 记作  $p \wedge q$ . 规定: 当  $p, q$  都是真命题时,  $p \wedge q$  是真命题; 当  $p, q$  中至少有一个是假命题时,  $p \wedge q$  是假命题.

用联结词“或”把命题  $p$  和  $q$  联结起来, 得到一个新命题, 记作  $p \vee q$ . 规定: 当  $p, q$  两个命题中至少有一个是真命题时,  $p \vee q$  是真命题; 当  $p, q$  两个命题都是假命题时,  $p \vee q$  是假命题.

对一个命题  $p$  的全盘否定, 得到一个新命题, 记作  $\neg p$ . 若  $p$  为真命题, 则  $\neg p$  为假命题.

(2) 一个命题的否定与否命题的区别.

否命题与命题的否定不是同一概念, 否命题是对原命题“若  $p$ , 则  $q$ ”既否定其条件, 又否定其结论; 而命题  $p$  的否定即非  $p$ , 只是否定命题的结论.

命题的否定与原命题的真假总是相对立的, 即一真一假; 而否命题与原命题的真假无必然联系.

(3) 在写“非  $p$ ”形式时常用以下表格中的否定词语:

|          |                   |    |     |              |             |              |     |
|----------|-------------------|----|-----|--------------|-------------|--------------|-----|
| 正面<br>词语 | 大于<br>( $>$ )     | 是  | 都是  | 所有<br>的...   | 任意一<br>个... | 至少一<br>个...  | ... |
| 反面<br>词语 | 不大<br>于( $\leq$ ) | 不是 | 不都是 | 至少一<br>个不... | 某个不...      | 一个也<br>没有... | ... |

(4) 逻辑联结词与集合间的关系.

逻辑联结词“或”、“且”、“非”与集合中的并集、交集、补集有着密切的关系, 要注意类比. 其中对逻辑联结词“或”的理解是难点. (“或”有三层含义, 以“ $p$  或  $q$  为真”为例: 一是  $p$  成立但  $q$  不成立, 二是  $p$  不成立但  $q$  成立, 三是  $p$  成立且  $q$  也

成立).

## 2. 全称量词与存在量词

### (1) 量词的分类.

量词可分为两类:一类是全称量词,另一类是存在量词.

全称量词,如“所有”“任何”“一切”等,其表达的逻辑为:“对所有事物  $x$  来说,  $x$  都是  $F$ ”.

存在量词,如“有”“有的”“有些”等,其表达的逻辑为:“至少有一个事物  $x$ ,  $x$  是  $F$ ”.

### (2) 两类量词不同的表述方法.

同一个全称命题、特称命题,由于自然语言的不同,可以有不同的表述方法,现列表如下:

| 命题   | 全称命题<br>“ $\forall x \in A, p(x)$ ” | 特称命题<br>“ $\exists x \in A, p(x)$ ” |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 表述方法 | ①所有的 $x \in A, p(x)$ 成立             | ①存在 $x \in A$ , 使 $p(x)$ 成立         |
|      | ②对一切 $x \in A, p(x)$ 成立             | ②至少有一个 $x \in A$ , 使 $p(x)$ 成立      |
|      | ③对每一个 $x \in A$ , $p(x)$ 成立         | ③对有些 $x \in A$ , 使 $p(x)$ 成立        |
|      | ④任选一个 $x \in A$ , 使 $p(x)$ 成立       | ④对某个 $x \in A$ , 使 $p(x)$ 成立        |
|      | ⑤凡 $x \in A$ , 都有 $p(x)$ 成立         | ⑤有一个 $x \in A$ , 使 $p(x)$ 成立        |

### (3) 全称命题与特称命题的真假判断.

要判定全称命题是真命题,需对集合  $M$  中每个元素  $x$ , 证明  $p(x)$  成立;如果在集合  $M$  中找到一个元素  $x_0$ , 使得  $p(x_0)$  不成立,那么这个全称命题就是假命题;

要判定一个特称命题是真命题,只要在限定集合  $M$  中,至少能找到一个  $x_0$ , 使  $p(x_0)$  成立即可;否则,这一特称命题就是假命题.



## 速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

### 1. 平面向量 $a, b$ 共线的充要条件是..... ( )

- A.  $a, b$  方向相同
- B.  $a, b$  两向量中至少有一个为零向量
- C.  $\exists \lambda \in \mathbf{R}, b = \lambda a$
- D. 存在不全为零的实数  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$

### 2. 下列四个命题中为真命题的是..... ( )

- A.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3 < 0$
- B.  $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 \geq 1$
- C.  $\exists x \in \mathbf{Z}$ , 使  $x^5 < 1$
- D.  $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 3$

### 3. 在下列结论中,正确的是..... ( )

- ①“ $p \wedge q$ ”为真是“ $p \vee q$ ”为真的充分不必要条件
- ②“ $p \wedge q$ ”为假是“ $p \vee q$ ”为真的充分不必要条件
- ③“ $p \vee q$ ”为真是“ $\neg p$ ”为假的必要不充分条件
- ④“ $\neg p$ ”为真是“ $p \wedge q$ ”为假的必要不充分条件

- A. ①②
- B. ①③
- C. ②④
- D. ③④

### 4. (密码原创)对于特称命题“存在 $x$ , 使 $i^2 + x < 0$ ”, 有以下几种表述: ①若 $x \in \mathbf{R}$ , 则 $i^2 + x < 0$ ; ② $\forall x \in \mathbf{R}, i^2 + x < 0$ ; ③ $\exists x \in \mathbf{R}, i^2 + x < 0$ ; ④ $\forall x \in \mathbf{R}, i^2 + x \geq 0$ . 其中改写正确的是.....

### 5. 命题“任意的 $x \in \mathbf{Z}$ , 若 $x > 2$ , 则 $x^2 > 4$ ”的否定是.....

### 6. 写出下列命题的否定并判断其真假:

- (1)  $p$ : 不论  $m$  取何实数, 方程  $x^2 + mx - 1 = 0$  必有实数根;
- (2)  $p$ : 有些三角形的三条边相等;
- (3)  $p$ : 菱形的对角线互相垂直.

## 第二章

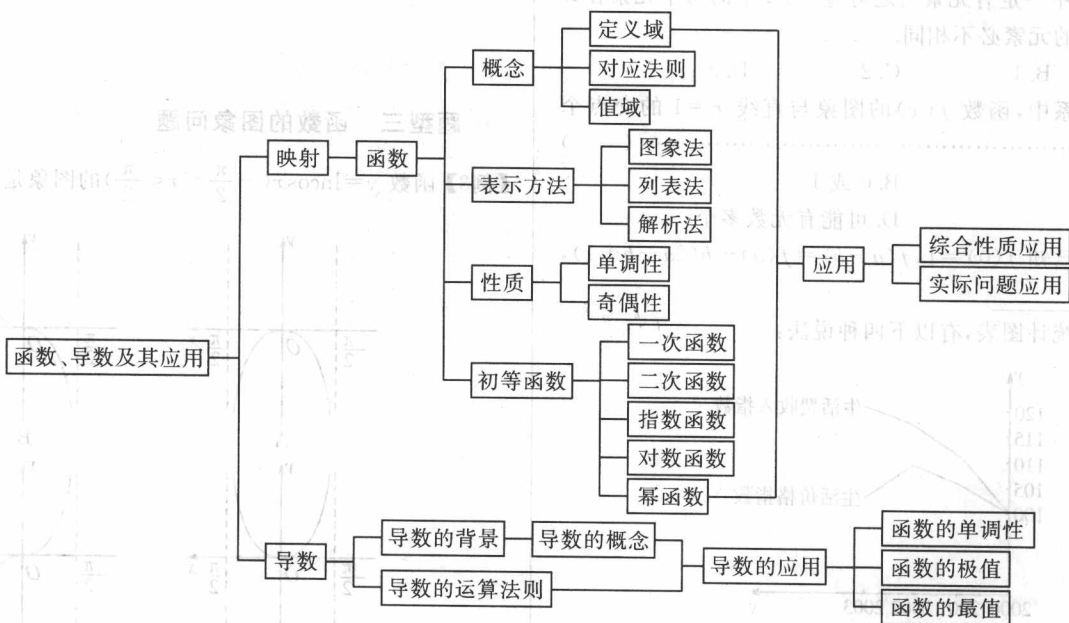
# 函数、导数及其应用

知识

• TIXIGOUJIAN •

ZHISHI

体系构建



## 第一节 函数及其表示

### 考纲目标 锁定

KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域;了解映射的概念.
2. 在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数.
3. 了解简单的分段函数,并能简单应用.

### 知识要点 梳理

ZHISHIYAO DIANSHULI

#### 1. 函数的基本概念

##### (1) 函数的定义.

设  $A, B$  是非空的集合,如果按照某种确定的对应关系  $f$ ,使对于集合  $A$  中的每一个数  $x$ ,在集合  $B$  中都有确定的数  $f(x)$  和它对应,那么就称  $f: A \rightarrow B$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数,记作  $y = f(x)$ .

##### (2) 函数的三要素: 定义域、对应法则和值域.

(3) 相等函数:如果两个函数的定义域和对应法则完全一致,则这两个函数相等,这是判断两个函数相等的依据.

#### 2. 函数的表示法

表示函数的常用方法有: 列表法、图象法和解析法.

**思考感悟** 若两个函数的定义域与值域相同,它们是否是相等函数?

#### 3. 映射的定义

设  $A, B$  是两个非空的集合,如果按某一个确定的对应关系  $f$ ,使对于集合  $A$  中的每一个元素  $x$ ,在集合  $B$  中都有唯一的元素  $y$  与之对应,这样的对应叫做从集合  $A$  到集合  $B$  的一个映射,记作  $y = f(x)$ .

**思考感悟** 映射和函数有什么区别?

**魅力数学:** 邵逸夫数学奖 被媒体誉为“21世纪东方诺贝尔奖”的邵逸夫奖是2002年设立的,以表彰在学术及科学研究或应用等方面获得突破性成果,和该成果对人类生活产生深远影响的科学家。每项奖金100万美元。中国科学院与系统科学研究院吴文俊院士由于“对数学机械化这一新兴交叉学科的贡献”荣获2006年邵逸夫数学奖。这是中国国内学者首次获得此项国际性大奖。

### 基础回扣热身

1. 下列各组函数中,表示同一函数的是 ( )

- A.  $y=x$  与  $y=\sqrt{x^2}$       B.  $y=(\sqrt{x})^2$  与  $y=\sqrt[3]{x^3}$   
C.  $y=x-1$  与  $y=\frac{x^2-1}{x+1}$       D.  $y=x^0$  与  $y=\frac{1}{x^0}$

2. 设  $f:A \rightarrow B$  是集合  $A$  到集合  $B$  的映射,则下列命题为真的个数是 ( )

- ①  $A$  中的每个元素在  $B$  中一定有元素与之对应;②  $B$  中的每个元素在  $A$  中一定有元素与之对应;③  $A$  中的每个元素在  $B$  中与之对应的元素必不相同.

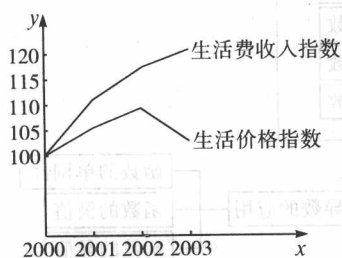
- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

3. 在同一坐标系中,函数  $f(x)$  的图象与直线  $x=1$  的交点个数为 ( )

- A. 1      B. 0 或 1  
C. 2      D. 可能有无数多个

4. (密码原创) 已知  $f(0)=1, f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$ , 则  $f(x)=$  .

5. 如图是一份统计图表,有以下四种说法:



- ① 这几年人民生活水平逐年得到提高;  
② 生活费收入指数增长最快的一年是 2000 年;  
③ 生活价格指数上涨速度最快的一年是 2001 年;  
④ 虽然 2002 年生活费收入增长缓慢,但由于生活价格指数也略有降低,因而人民生活有较大的改善.  
其中,说法正确的是 (只填写序号).

6. 若  $f(x)=\begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2 \\ \log_3(2x-1), & x \geq 2 \end{cases}$ , 则  $f[f(2)]$  的值为 .

### 精典例题示范

#### 题型一 求已知函数的定义域

【例1】求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{2-|x|} + \sqrt{x^2-1};$$

$$(2) y = \sqrt{25-x^2} + \lg \cos x.$$

规范解答:

#### 题型二 求已知函数的值域

【例2】求下列函数的值域:

$$(1) y = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

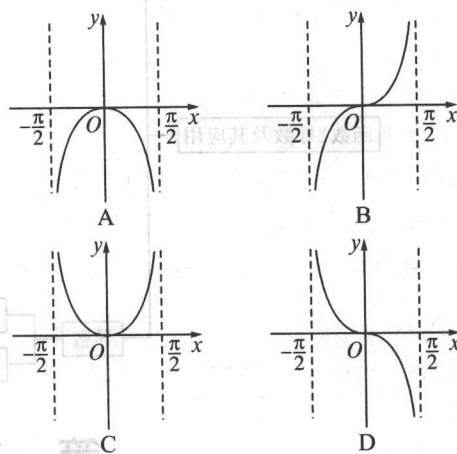
$$(2) y = x - \sqrt{1-2x};$$

$$(3) y = x + \frac{4}{x}.$$

规范解答:

#### 题型三 函数的图象问题

【例3】函数  $y = \ln \cos x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$  的图象是 ( )



规范解答:

#### 题型四 分段函数

【例4】(12分) 甲、乙两地相距 150 千米,某货车从甲地运送货物到乙地,以每小时 50 千米的速度行驶,到达乙地后将货物卸下用了 1 小时,然后以每小时 60 千米的速度返回甲地.从货车离开甲地起到货车返回甲地为止,设货车离开甲地的时间和距离分别为  $x$  小时和  $y$  千米,试写出  $y$  与  $x$  的函数关系式.

思路点拨:根据已知条件列出等式,这个含有  $x, y$  的方程就是所求的函数,这是一个分段函数,要注意距离与时间的变化关系.

规范解答:由题意,可知货车从甲地前往乙地用了 3 小时,而从乙地返回甲地用了 2.5 小时. .... 2 分

(1) 当货车从甲地前往乙地时,由题意,可知  $y=50x$  ( $0 \leq x \leq 3$ ); .... 5 分

(2) 当货车卸货时,  $y=150$  ( $3 < x < 4$ ); .... 8 分

(3) 当货车从乙地返回甲地时, 由题意, 知  $y = 150 - 60(x-4) (4 \leq x \leq 6.5)$ . ..... 11 分

$$\text{所以 } \begin{cases} 50x, 0 \leq x \leq 3 \\ 150, 3 < x < 4 \\ 390 - 60x, 4 \leq x \leq 6.5 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

**点评:** 这是一个实际应用问题, 解决这类问题的关键是理解题意, 找出数量关系, 选择适当的数学模型进行解决. 特别注意每种情况下  $x$  的取值范围.

### 变式演练 (密码改编)

$$\text{已知 } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases} \text{ 且 } f(a) = 3, \text{ 求 } a \text{ 的值.}$$

## 方法规律总结

FANGFAGUILVZONGJIE

### 1. 有关函数定义域的问题一般可分为四类

(1) 已知函数的解析式求定义域, 当解析式比较复杂时, 通常根据各种条件列不等式求解.

(2) 由  $y = f(x)$  的定义域, 求复合函数  $f[g(x)]$  的定义域, 这时  $g(x)$  的值域就是  $f(x)$  的定义域, 由  $g(x)$  的值域解出的  $x$  的取值范围, 即是  $f[g(x)]$  的定义域.

(3) 若函数的解析式表示的是实际问题, 则函数的定义域除考虑解析式本身有意义外, 还应使实际问题有意义.

(4) 已知函数的定义域求参数的值域范围, 这时要充分利用函数的性质.

### 2. 求函数值域的常用方法

(1) 配方法.

转化为形如  $F(x) = af^2(x) + bf(x) + c$  类的二次函数求值域问题, 均可用配方法, 而后面的函数要注意  $f(x)$  的范围.

(2) 换元法.

运用代数或三角代换, 将所给函数转化成值域容易确定的另一函数, 从而求得原函数的值域的方法为换元法. 形如:  $y = ax + b \pm \sqrt{cx + d}$  ( $a, b, c, d$  均为常数, 且  $ac \neq 0$ ) 的函数常用此法求值域.

(3) 基本不等式法.

当函数是分式形式且分子分母不同次数时常用此法.

(4) 单调性法.

通过确定函数在定义域内 (或某个定义域的子集上) 的单调性求出函数值域的方法为单调性法. 考虑用单调性法求值域常见的形式有  $y = ax + b + \sqrt{dx + e}$  ( $a, b, d, e$  均为常数, 且  $ad \neq 0$ ), 看  $a$  与  $d$  是否同号, 若同号用单调性求值域, 若异号则用换元法求值域; 还有的在利用重要不等式求值域失败 (等号不满足) 的情况下, 可采用单调性求值域, 但需熟悉下列结论:

函数  $y = x + \frac{k}{x} (x > 0, k > 0), x \in (0, \sqrt{k}]$ , 函数递减,  $x \in [\sqrt{k}, +\infty)$ , 函数递增.

(5) 数形结合法.

利用函数所表示的几何意义, 借助几何方法或图象来求函数的值域的方法为数形结合法.

### 3. 求值域时应注意的问题

(1) 用换元法求解解析式或函数值域时, 换元后易漏掉考虑新元的取值范围. 例如  $f[h(x)] = g(x)$  求  $f(x)$  的问题, 往往设  $h(x) = t$ , 从中解出  $x$ , 代入  $g(x)$  进行换元来解, 一定要注意新元  $t$  的范围.

(2) 求函数值域时, 不但要重视对应法则的作用, 而且要注意特别定义域的制约作用.

(3) 判别式法求值域对端点要进行检验.

(4) 利用均值不等式求值域时, 要注意必须满足已知条件和不等式一端是常数, 等号能成立, 还要注意符号.

如函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的值域为  $[2, +\infty)$  对吗?

(5) 熟练掌握求函数值域的几种常用方法, 要注意这些方法分别适用于哪些类型的函数.

### 4. 分段函数

若函数在定义域的不同子集上对应关系不同, 可用几个解析式来表示函数, 这种形式的函数叫分段函数, 它是一类重要函数.

分段函数是一个函数, 而不是几个函数, 它的连续与间断完全由对应关系来确定. 对于分段函数, 必须分段处理, 时时刻刻注意定义域优先原则.



## 速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. 函数  $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \lg(x-1)$  的定义域为 ..... ( )
- A.  $(-2, 1) \cup (4, +\infty)$     B.  $[-2, 1) \cup [4, +\infty)$
- C.  $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$     D.  $[4, +\infty)$

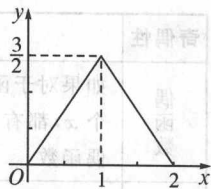
2. 图中的图象所表示的函数解析式为...

A.  $y = \frac{3}{2}|x-1| (0 \leq x \leq 2)$

B.  $y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}|x-1| (0 \leq x \leq 2)$

C.  $y = \frac{3}{2} - |x-1| (0 \leq x \leq 2)$

D.  $y = 1 - |x-1| (0 \leq x \leq 2)$



3. 已知集合  $P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$ ,  $Q = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$ , 下列不表示从  $P$  到  $Q$  的映射是 ..... ( )

A.  $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

B.  $f: x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$

C.  $f: x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

D.  $f: x \rightarrow y = \sqrt{x}$

4. (2010 · 山东聊城) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & x \leq 0 \\ \log_2(x+2) & x > 0 \end{cases}$

若  $f(x_0) \geq 2$ , 则  $x_0$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[-1, 3]$ , 在同一坐标系下, 函数  $y=f(x)$  的图象与直线  $x=1$  的交点个数为\_\_\_\_\_.

6. 某租赁公司拥有汽车 100 辆, 当每辆车的月租金为 3 000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.

(1) 当每辆车的月租金定为 3 600 元时, 能租出多少辆车?

(2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少元?

## 第二节 函数的单调性与奇偶性

### 考纲目标锁定

- 结合具体函数, 了解函数奇偶性的含义.
- 理解函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义.
- 会运用函数图象理解和研究函数的性质.

### 知识要点梳理

#### 1. 函数的单调性

##### (1) 单调函数的定义.

设函数  $f(x)$  的定义域为  $I$ , 如果对于定义域  $I$  内的某个区间  $D$  上的任意两个自变量的值  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时,

- 若\_\_\_\_\_, 则  $f(x)$  在\_\_\_\_\_上是增函数;
- 若\_\_\_\_\_, 则  $f(x)$  在\_\_\_\_\_上是减函数.

##### (2) 单调区间的定义.

若函数  $f(x)$  在区间  $D$  上是\_\_\_\_\_或\_\_\_\_\_, 则称函数  $f(x)$  在这一区间上具有(严格的)单调性, \_\_\_\_\_叫做  $f(x)$  的单调区间.

#### 2. 函数的奇偶性

| 奇偶性 | 定义                                                      | 图象特点      |
|-----|---------------------------------------------------------|-----------|
| 偶函数 | 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 $x$ , 都有_____, 那么函数 $f(x)$ 是偶函数 | 关于_____对称 |
| 奇函数 | 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 $x$ , 都有_____, 那么函数 $f(x)$ 是奇函数 | 关于_____对称 |

**思考感悟** 函数的单调性与奇偶性与函数的定义域有什么关系?

#### 3. 函数的最值

一般地, 设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $I$ , 如果存在实数  $M$  满足:

(1) 对于任意的  $x \in I$ , 都有  $f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq M$ ).

(2) 存在  $x_0 \in I$ , 使得  $f(x_0) = M$ . 那么, 我们称  $M$  是函数  $y=f(x)$  的\_\_\_\_\_值.

**思考感悟** 函数的最值与值域有何关系?

#### 4. 基本初等函数的值域

(1) 一次函数  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ) 的值域为\_\_\_\_\_.

(2) 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ )

当  $a > 0$  时, 值域为\_\_\_\_\_;

当  $a < 0$  时, 值域为\_\_\_\_\_.

(3) 反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的值域为\_\_\_\_\_.

(4) 指数函数的值域为\_\_\_\_\_.

(5) 对数函数的值域为\_\_\_\_\_.

(6) 正、余弦函数的值域为\_\_\_\_\_.

(7) 函数  $y=x+\frac{a}{x}$  ( $a > 0$ ) 的值域为\_\_\_\_\_.

### 基础回扣热身

1. 函数  $y=\sqrt{x^2+2x-3}$  的单调递减区间为\_\_\_\_\_ ( )

- A.  $(-\infty, -3]$  B.  $(-\infty, -1]$   
C.  $[1, +\infty)$  D.  $[-3, -1]$

2. 如果奇函数  $f(x)$  在区间  $[3, 7]$  上是增函数且最小值为 5, 那么在区间  $[-7, -3]$  上是\_\_\_\_\_ ( )

- A. 增函数且最小值为 -5 B. 增函数且最大值为 -5  
C. 减函数且最小值为 -5 D. 减函数且最大值为 -5

3. 若函数  $f(x)=x^3$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则函数  $y=f(-x)$  在其定义域上是\_\_\_\_\_ ( )

- A. 单调递减的偶函数 B. 单调递减的奇函数  
C. 单调递增的偶函数 D. 单调递增的奇函数

4. (密码原创) 已知  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数, 且满足  $f(\frac{1}{x}) > f(2)$ , 则  $x$  的取值区间是\_\_\_\_\_.

5. 已知  $y=f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x < 0$  时,  $f(x)=x^2-2x$ , 则当  $x \geq 0$  时,  $f(x)$  的表达式为\_\_\_\_\_.