

弹 塑 性 断 裂 力 学

东京理科大学教授工学博士 宫本 博著

北 京 航 空 学 院 楊秉宪、王幼复译

北 京 航 空 学 院

一九八〇年十月

著 者 序 言

应北京航空学院的邀请，我和妻子于1979年10月29日至12月7日访问了中国。从11月2日到11月30日每周三次，星期一、三、五8:30到11:30在北京航空学院讲授弹塑性断裂力学，共讲了13次。据说听课者都掌握了线弹性断裂力学，对弹塑性断裂力学有兴趣，并且是能够在北京居住一个月的教师、研究人员和技术人员。听课者来自中国三个直辖市和11个省，有从东北的黑龙江省、西部的甘肃省兰州、四川省峨眉、云南省昆明来的人，年龄大部分是40岁左右，也有少数50岁和30来岁的，20%是女性。与日本相比，平均年龄大约高10岁，这也是由于四人帮的破坏造成的。

讲课是我用日语讲，由北京航空学院的杨秉宪先生译成中文，听课者懂日语和英语的不太多，用日语讲课对我来说当然是很方便的，但杨先生却是非常辛苦的。总而言之，这次讲课取得成功，相当程度是杨先生努力的结果，藉此机会向他表示感谢。

讲课时使用了幻灯和投影仪，并且用汉字把要点写在黑板上。由于不能充分利用复印机，刚开始的时候是很棘手的。

讲义使用了予定在日本培风馆出版的“弹塑性断裂力学”的原稿。

最近，弹塑性断裂力学的中心议题是 J 积分。因此本讲义是以 J 积分为轴心而展开的，分为 J 积分以前的内容（第二、三章）， J 积分的现状（第四、五章）， J 积分的扩充（第六、七、八、九章）， J_{Ic} （第十章）。主要以日本的现状为中心，也想尽可能客观地叙述世界的趋势，但心有余而力不足，未能完全达到预期的目的。计算方法大多采用有限元法。

中间还安排了两次答疑，每次都用了半天的时间进行讨论，由于相互之间言语不通，讨论时总不免有些隔靴搔痒之感，但是了解到对方对问题的理解和关心的程度及其倾向是大有益处的。提问的相当一部分内容是关于有限元法程序及实验方法。这些方面我是不擅长的，因而不能很好地解答，感到很抱歉。坦率地说，中国的现状刚好和日本引进有限元法及断裂力学以后的积极性差不太多，然而中国人有巨大的潜力和热诚以及人数众多。我深信在不久的将来中国在科学研究上一定会成为我们的对手，这既是我的希望，也是一种忧虑。因此，能把我的这次讲课作为中国学术进步的一块垫脚石是感到非常幸运的。把这本书作为日中友好的桥梁之一，能使很多优秀的中国青年读到它，这简直是我的梦想。

最后，向给予我这样一个机会的北京航空学院沈元副院长和何庆芝教授，向给予我热情照顾的曹传钧副院长、佟丕济、张行、~~田~~田~~田~~田先生以及外事组的各位朋友，特别是向杨秉宪和王幼复先生表示衷心的感谢。

宫本 博

1980年4月18日

译者序言

本书是宫本博教授于1979年11月在我国讲授“弹塑性断裂力学”时的讲义。

宫本博现在是东京理科大学教授，是日本著名的科学家，多年来从事断裂力学的研究工作，有很多著作，发表过很多论文，在国际上也享有盛名。现在担任日本精密机械学会会长，日本机械学会弹塑性断裂力学分会会长，是现任国际材料机械性能会议（*ICM*）的付主席。这次听宫本博教授讲学的有我国大专院校教师和科研单位从事断裂力学工作的同志，都一致认为讲课内容比较丰富，理论水平较高，反映了目前国际上弹塑性断裂力学的新成果，他们都殷切盼望能将该讲义内容尽快翻译出版，现在终于和大家见面了。为了制版的方便，本书插图原文的注解未作翻译，望读者见谅。

本书可作为科技工作者和大学教师的参考书，也可作为研究生的教材。

译者

1980年5月

目 录

第一章 绪论

§ 1.1 前言	1
§ 1.2 背景	2
§ 1.3 弹塑性断裂力学的现状	7

第二章 静态裂纹

§ 2.1 $D-B$ 模型的解	9
§ 2.2 滑移线场的解	12
§ 2.3 $R.R.H$ 的解	16
§ 2.4 用有限元法的计算结果	26
§ 2.5 在疲劳断裂方面的应用	34

第三章 扩展中的裂纹

§ 3.1 引言	59
§ 3.2 扩展中裂纹的解析解	59
§ 3.3 有限元法计算结果	63

第四章 J 积分

§ 4.1 基本概念	68
§ 4.2 J 积分的引入及其性质	80
§ 4.3 J 的应用	86
§ 4.4 用有限元法的计算结果	101

第五章 Eshelby 的能量动量张量

§ 5.1 前言	112
§ 5.2 Eshelby 的能量动量张量	112
§ 5.3 静态裂纹	117

第六章 J 积分的扩充 (之一) —— 理论

§ 6.1 J 积分在断裂判据方面的应用及 J 积分的扩充	119
§ 6.2 J_{ext} 积分与 $\hat{J}$ 积分的关系	122

第七章 J 积分的扩充 (之二) —— 计算

§ 7.1 关于三维 J 积分的研究——穿透裂纹的 J 积分	124
§ 7.2 关于三维 J 积分的研究——压力容器内壁半椭圆表面裂纹的 J 积分	128

第八章 J 积分的扩充 (大变形)

- § 8.1 平面应变断裂条件下裂纹尖端的大变形效应 133
- § 8.2 用有限变形理论计算裂纹尖端的高应变区及对 J 积分的评价 142

第九章 微观断裂力学

- § 9.1 材料的结构分析与有限元法 147
- § 9.2 连续分布位错理论的应用 155

第十章 实验 (弹塑性断裂韧性)

- § 10.1 前言 160
- § 10.2 弹塑性断裂韧性 $CTOD_{1c}$ 160
- § 10.3 弹塑性断裂韧性 J_{1c} 163

第一章 绪 论

§1.1 前 言

固体力学的发展大致可分为三个阶段。第一个阶段是由于外部的原因,对从前的设计思想产生了疑问的情况下诞生了线性断裂力学。第二个阶段是由于和工程学有密切关系的计算机硬件的发展,把过去认为不可能解决的都变为可能的了,例如,由于电子学的进步,出现了电子显微镜和电子计算机,使固体力学有了惊人的发展。第三个阶段是从事固体力学的人一直感到进展缓慢的弹性塑性断裂力学。

先谈一下断裂力学的产生。从前强度设计的思想是根据破坏的假设,也就是说在应力或应变最大的地方发生破坏的假设,以前的材料力学就是论述应力和应变这些主要参数的。可是按照这种思想设计出来的机械和结构,在设计、使用及操作中并无差错就发生了破坏。这种工程思想往往被发生事故的现实所否定,因此不得不从前面的设计思想来一个革命,这正是断裂力学诞生的原委。

我们把研究断裂的力学机理的学问称为“断裂的力学”(Mechanics of Fracture),或“断裂力学”(Fracture Mechanics)。因此,断裂力学是阐明材料和结构破坏现象的本质,而主要是从力学的侧面来阐明这种本质的一个学科。当然,断裂的问题我们早在四十年前学习材料力学的时候就碰到了,但在当时对断裂的机理没有深入理解,恐怕也不可能深入理解,直到今天也不能认为理解得很清楚了。但在计算方面,出现了有限元法,电子计算机有很大发展,在实验方面,电子显微镜有很显著的进步,因此过去不清楚的问题总会弄清楚。这里先研究一下断裂力学在材料力学这个侧面的问题。

Timoshenko 等的“材料力学”是以连续体力学为基础,其中包括弹性力学、塑性力学、结构力学的重要部分,而主要是针对设计技术人员的需要重新建立起来的数学体系。这里所说的断裂力学也是包含在材料力学中的断裂力学的一部分。材料力学的内容包括

- (1) 关于材料强度的内容;
- (2) 关于机械和结构元件的应力及应变的内容。

对于材料和结构的响应,是通过以应力 σ 和应变 ϵ 所表达的力学环境参数来描述的,假使 σ 或 ϵ 相同,就几乎产生相同的现象。对于裂纹尖端附近塑性区很小即在小范围屈服条件下,支配裂纹尖端附近应力、应变状态的是与该状态一一对应的参数 K (应力强度因子 $S.I.F$)或 G (能量释放率),它们可以表达裂纹尖端的力学环境。对应这种力学现象的材料强度是用材料的特性值 K_C 或 G_C (均称为断裂韧性)来表现的。就象用强度极限 σ_B 、屈服应力 σ_y 作为“暗盒”来处理问题一样,由材料试验得到 K_C 、 G_C 仍然用“暗盒”的办法来处理问题。

将上面的说法详细表达如下:

表示结构的响应 (Response) R_p

表示材料抵抗断裂的阻值 (Resistance) R_s

根据二者大小的关系, 当

$$R_p \geq R_s$$

时发生断裂, 这被称为断裂判据 (Fracture Criterion, F.C.)。

问题是选择什么样的 R , 是否用一个 R 值, 在材料力学中被选作 R 值的是应力 σ 、应变 ϵ 或应变能等。如上所述, 在线性断裂力学中选用了 K 或 G 。

在弹塑性断裂力学中是否存在 R ? 若存在的话, 是一个还是两个以上? 若只有一个应该是什么参数? 对于 R_p 和 R_s 是什么样的量, 又如何求得这些量呢? 等一系列问题。学术的发展也未必总是沿着这种模式前进的。

§1.2 背 景

1.2.1 理论背景

由于线弹性断裂力学的成功, 人们很自然地想到把它直接地用于非线性弹性断裂力学上。就是说, 既然线弹性断裂力学是探索潜在裂纹整个过程的学问, 由于将它用于裂纹尖端小范围屈服断裂所引起的现象, 诸如脆性断裂的发生、疲劳裂纹、应力腐蚀开裂等所谓的亚临界裂纹扩展问题获得成功, 自然进而想到在讨论延性高的材料断裂问题时, 即在讨论诸如大范围屈服或全区域屈服造成断裂问题时, 以及对于讨论低周循环疲劳问题时, 都从理论上需要予以研究, 进而试图把线弹性断裂力学方法给以扩充。因之, 笔者认为线弹性断裂力学是革命性的, 但非线性断裂力学却是一种改良。

所谓非线性, 有材料非线性与几何非线性之分, 按照这种方式归纳起来, 又分为四类, (在本书中对蠕变等问题不包括在内)

NO	材料非线性	几何非线性	特 征	具体问题	学 科
1	×	×	小范围屈服	脆 性 断 裂 疲 劳 裂 纹 应力腐蚀开裂	线弹性断裂力学
2	○ { 应变增量理论 全应变理论	×	大范围屈服	韧性断裂	弹塑性断裂力学
3	×	○			薄板的断裂力学
4	○	○	全区域屈服	Process zone	

将其按基本方程式及其解进行分类

平衡方程式	线 性	线 性
构成方程式	材料非线性 $\begin{cases} \text{应变增量} \\ \text{全应变} \end{cases}$	线 性
应变—位移关系式	线性 (微小变形)	几何非线性 (有限变形)
解析解	<i>Rice-Rosengren-Hutchinson</i>	<i>Mc-Gowan</i>

由于这些内容能够用解析法求解的课题是不多的，自然，借助于有限元法，则很多问题就可得到解决了。

另外，在线弹性断裂力学中 K 或 G 可唯一地作为确定裂纹尖端应力场的参数，可是在非线性弹性断裂力学中有这样的参数吗？如果有的话，那么它是什么呢？这就是个问题。在弹塑性断裂力学中，现在用的这一参量是有希望的，关于这个问题，下面将在本书第四章中详细地予以介绍。

上述虽然是根据纯理论的观点，作为线弹性断裂力学的扩充，而引入了非线性断裂力学，但是这种思想对于进一步发展工程科学来看，实际上是非常必要的。

1.2.2 工程背景

(1) 原子反应堆设计的情况

作为实际背景之一，在这里叙述一下原子反应堆设计上急切希望解决的问题。对于象原子反应堆那样的安全性要求很严格的物体，在进行设计时，人们是非常慎重的，并且必需考虑所有的破坏因素才行，就是说包括

载荷 (实际载荷，假设载荷)

潜在的缺陷

缺陷和结构的互相干涉

机械性质

这些重要因素的分布就是估算结构破损率的概率解析所需要的输入，可是这里不光是概率论分析，还涉及到必要的确定论的问题。

这种结构的全部设计程序由下面图表加以说明。

这个框图是作了简化的，但是包括了所有必要的因素，必要的输入是

- ① 对于结构的载荷 (或应力)；
- ② 用非破坏性检验所确定的结构内部的缺陷分布；
- ③ 结构材料的性质。

可是这输入还包括有

- (a) 对结构的环境的影响 (原子反应堆的情况下如放射能的影响等)；
- (b) 由于交变载荷或应力腐蚀开裂而造成的裂纹扩展；
- (c) 根据安全性考虑的规定，而提出的假设载荷要求。

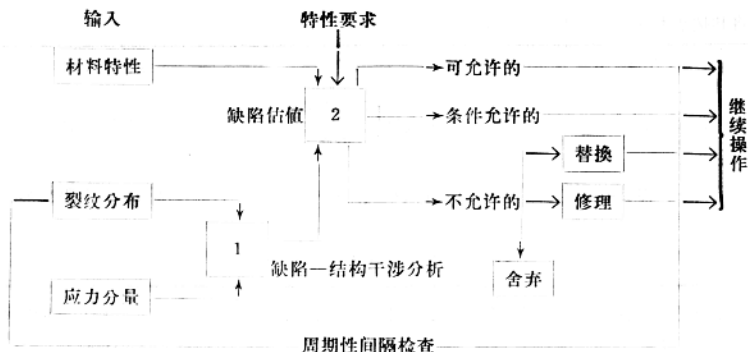


图 1.2.1

这个程序框图分析的最初接点是缺陷和结构间干涉的分析，这乃是延性断裂研究的焦点。该分析图的输出是包括缺陷、应力以及结构形状等主要参数。

接着，这个参数在第2接点1与由结构使用要求所确定的材料性质相比较（但是它根据结构之不同而异，自然，在原子反应堆上与在飞机上是不同的），在这个接点处，载荷条件和使用条件下的结构缺陷是否允许确定下来，如果不允许，则需进行修补或更换。另外，如图示，按照使用中检查所得到的结构缺陷分布的数据可以再反馈回去。

对于完好的结构要求写出来就是

- ① 在实际使用条件下结构内缺陷—应力间干涉的正确预测。
- ② 根据应力增加，腐蚀、结构寿命中的交变载荷，反映出材料抵抗裂纹扩展的材料特性。
- ③ 结构寿命期间的缺陷分布。
- ④ 工作中的应力分布和必要时假定发生事故时的载荷。
- ⑤ 临界使用条件。

由上面的讨论，可以明确，缺陷—结构间干涉的分析，对结构全部分析来说是个关键。但是，这种认识，即目前可利用的分析方法并不能反映出使用温度下原子反应堆构件的实际响应的这一事实，就形成了对于韧性断裂研究的动机。

现有的缺陷—结构干涉分析是以线弹性断裂力学为基础，其结构在弹性状态发生破损，并假定其断裂是脆性的，并且呈现很大的灾难性破坏。制造核反应堆压力容器的钢材，在工作条件下引起断裂之前会形成变形。如果发生变形，那么到最后断裂之前，缺陷是稳定扩展的。这种韧性断裂所消耗的能量比伴随脆性断裂所耗费的能量要小得多，因此，若对于缺陷—结构干涉只假定它们是弹性和脆性的话，则断裂条件的评价是非常低的，并且与此同时其临界缺陷尺寸也是非常小的。

HSS T (The Heavy Section Steel Technology) 主办进行的含有缺陷容器的大规模试验支持了原子反应堆钢制造的压力容器，在其上平台区承受压力情况下，采用线弹性断裂力学分析是不恰当的这一结论。

如果根据试验结果,即便占壁厚的30%深度的尖锐缺陷,容器早已屈服,却仍显示出断裂前的稳定裂纹扩展。下表即表示上平台试验的结果,一个是管咀处的缺陷,另一个是容器圆筒内的缺陷。根据线弹性断裂力学得到的断裂压力和断裂应变的预测值全记录了下来。

由于预测断裂应变是不可能的这一事实,表明用于韧性材料的线弹性断裂力学本质上是过份安全了。

表1.2.1 中级容器在上平台的试验结果 $190^{\circ}F$ ($88^{\circ}C$)

容 器	5	6
缺陷部位	管 咀	圆筒部
裂纹深度 (mm)	30.5	47.5
断裂压力 (kgf/mm^2) 实测	18.6	22.3
LEFM 预测	13.3	19.3
差 (%)	- 39.0	- 16.0
断裂应变 (%) 实测	0.25	2.00
LEFM 预测	0.10	0.479
差 (%)	- 150	- 310

(2) 现行规范

对目前现行的规范全面进行探讨,在本研究的问题中是有意义的。原子反应堆压力容器缺陷的允许解实际上是简化了的全部结构解,这都包括在 ASME 锅炉及压力容器规范的第Ⅲ节和第Ⅴ节中。

第Ⅲ节的分析表示的是原子反应堆的起始和停止的压力—温度界限。

第Ⅴ节表示原子反应堆装置在使用中检查时存在的缺陷评价方法。

这两个解由于引入了线弹性断裂力学求得的缺陷—结构干涉的解,因此正如已经叙述过的,它对于上平台区的预测作了过份安全的估计。

(2—a),关于第Ⅲ节,附录G的解析,这个解析表示在图1.2.2中

缺陷—结构干涉的分析是采用 $1/4T$ 的缺陷,根据线性断裂力学求得的。根据简单的曲线群来定。使用条件是由压力引起的应力的二倍的安全系数,结果不是用“是”、“否”的形式表示,而是用允许应力的临界值表示。安全系数指定为2,但是实际的安全系数更大些。在韧性范围内,为了使材料特性、缺陷—结构干涉的关系偏于安全,实际的安全系数更大。

(2—b),关于第Ⅴ节附录A的解析

这个解析是为评价原子反应堆部件在使用中检查发现的缺陷之是否可以继续工作而采用的。(图1.2.3)

虽然容器有缺陷,但这种形式的解仍能使容器的断裂阻力不致明显减少的尺寸确定下来。为了确定这个尺寸,对正常情况和错误动作的情况两个方面都必须给缺陷以评价。评价如下进行。

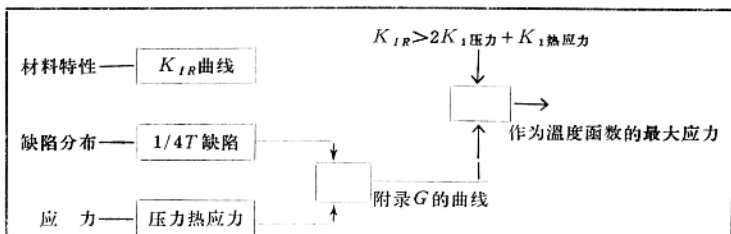


图1.2.2 ASME 规范第III节整体结构解

与图1.2.1的输入相同,但材料特性由偏于安全的 K_1-R 曲线来推算。缺陷分布是单个缺陷,裂纹深度是壁厚的1/4,载荷是压力和热应力。

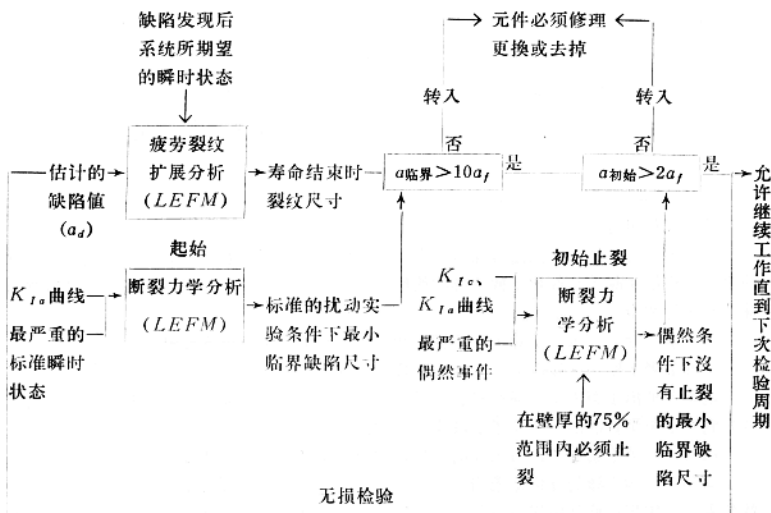


图 1.2.3

缺陷和装置的剩余寿命期间,于缺陷处,按照所予想的交变载荷求解,于是该缺陷逐渐扩展。其寿命的最后缺陷尺寸即为 a_f 。

对于最为正常的,扰动的或过渡试验都给以评价,过渡试验时引起断裂的假设最小临界缺陷尺寸称为 a_c 。

同样,在最为严重的紧急状态,即在错误动作期而产生断裂的小缺陷尺寸称为 a_i ,于是

$$\left. \begin{array}{l} a_f < a_c / 10 \\ a_f < a_i / 2 \end{array} \right\} \text{若不满足这一关系则必须进行修理。}$$

如果在上平台区施行这一计算, 则根据解析所假定的缺陷—结构干涉的性质, 计算是偏于安全的。但是对于断裂来说, 真正的安全储备在这个条件下还不能给予正确的评价。

§ 1.3 弹塑性断裂力学的现状

1.3.1 引言

如上所述, 为了正确论述有缺陷的韧性材料的行为, 希望能够进行缺陷—结构干涉的分析, 这就必须能予测到下列判据才能达到这个目的。

裂纹发生的判据

裂纹稳定扩展的判据

此外还需要能够予测达到稳定扩展的极限时结构不稳定的判据。

为了保证不破坏应有足够的安全余量, 因而需要正确地予测和定义下列判据

(1) 裂纹稳定地穿通元件的壁(漏泄)

(2) 裂纹发生后结构失稳(崩裂)

对于使用中的原子能反应堆系统的元件能够定出保证结构不破坏的安全余量是对于这种技术的重要贡献。

1.3.2 举例看看EPRI的研究工作

EPRI 是美国电子研究院 (*The Electric Power Research Institute*) 的简称。它是美国一个很大的研究机构, 对原子能反应堆的有关问题进行了大量研究。

前面举过的原子能反应堆的例子说明了用线弹性断裂力学对有缺陷的韧性材料进行抗断设计(损伤容限设计)是不充分的。但是现实是如何进行的呢? 这里想叙述一下 EPRI 进行的“韧性断裂计划”, 它是对这种韧性材料范围很广的相当彻底的研究方案, 其概况如下。

此计划由三部分组成

(1) 塑性断裂分类法;

(2) 裂纹发生和扩展的基本研究;

(3) 根据微观断裂过程建立的断裂计算模型。

其内容详述如下

1.3.2.1 塑性断裂分类法

延性断裂具有若干特点, 即

(1) 大范围屈服

(2) 复杂的几何形状

(3) 结构失稳

塑性断裂分类法的目的就是阐明这些情况, 为此需要进行下列理论的和实验的研究。

(1) 大范围屈服下裂纹发生和扩展的判据;

(2) 结构及裂纹尖端区域弹塑性行为的描述方法;

(3) 使塑性流及裂纹扩展再现的实验室的及更大范围的广泛的实验。

1.3.2.2 裂纹发生及扩展的基本研究

目的是由原子能反应堆监视程序控制的单纯试片研究测定受到放射线作用的压力容器钢

材延性断裂阻值的理论和实验方法。

方法就是将损伤模型用实验室试验的各种计算机模拟来校准，模型被校准之后，就用此模型详细地进行标准冲击试验，将模拟结果与实际试验进行比较，以检验所采用的方法，主要目的是由标准监视试验确定测延性断裂阻值的方法。

1.3.2.3 根据微观断裂过程建立断裂计算模型

这项计划的目标是“将延性断裂的过程从开始到结束进行追踪和分析”。

需要确定的材料状态主要包括

空穴的前兆

空穴的发生

空穴成长的运动学

空穴的合体及材料的分离等

为了确定这些现象，必须在断裂过程的各个阶段进行测定。

将这些条件测定后，就可以根据测定的量进行分析。例如对于塑性应变和空穴的力学行为加以公式化。

最后一步是根据这些分析加以总结，建立计算用的断裂模型，对结构的行为和应力、应变进行计算。

以上计划已付诸现实，正在不断取得成果。

参 考 文 献

富本 博：破坏力学（中译文“断裂力学”杨秉宪、周付秋译）

岡村弘之：线形破坏力学入门

第二章 静态裂纹

求裂纹尖端的弹塑性响应，不论是对于理解宏观的连续体力学水平下的断裂也好，或者是对于深入理解宏观的解与微观作用的脆性及延性分离的力学之间的相互关系也好，都是非常必要的。

与线弹性断裂力学相比，非线性范围的解析法是远远落后的。用解析法能够得到的解，只有Ⅲ型裂纹，我们不讲它，这里要论述的是实用上最重要的Ⅰ型裂纹。关于Ⅰ型裂纹的解有：薄板平面应力状态模型化的解法，根据滑移线场理论导出的平面应变近似解法，按全量理论的解法，以及有限元法（FEM），有限元法在弹塑性解中有很大贡献。

§ 2.1 D-B (Dugdale-Barenblatt) 模型的解

本节叙述薄板平面应力状态下的屈服模型。

2.1.1 D—B 模型与平面应力解

图 2.1.1(a) 表示 Dugdale 提出的与 Barenblatt 模型类似的平面应力屈服模型。假定屈服局限于裂纹尖端正前方 ($x_1 = 0$) 的一个狭窄区域内，屈服的作用在于使裂纹增长等于塑性区尺寸 R 的一段，塑性区中的内聚力作用在扩展的裂纹表面以抑制其张开。外载荷和抑制应力各自在塑性区的外侧尖端产生倒平方根奇异性，但这两个奇异性是符号相反的，塑性区的尺寸是这样选择的：使两个奇异性互相抵消，结果在塑性区外侧尖端的应力是有界的。如图 2.1.1(b) 所示，抑制应力可看作分开距离 $\delta = u_2^+(x_1, 0) - u_2^-(x_1, 0)$ 的函数，也可以在全塑性情形中取屈服应力 σ_0 的常值。图 2.1.1(c) 表示薄板平面应力状态的屈服图样，塑性流由两条相交的剪切带组成，各以 45° 的角度贯穿薄板的厚度，这样屈服就局限在高度大

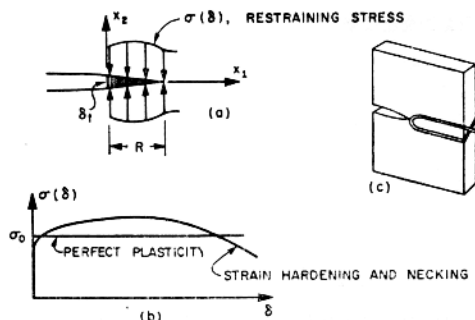


图2.1.1 平面应力屈服的D—B模型

致等于板厚的一个狭窄区域内。平均塑性扩展应变近似地等于

$$\bar{\varepsilon}^P = \frac{\delta}{h} \quad (2.1.1)$$

式中 δ = 分开距离, h = 板厚。

和弹性脆性断裂的 *Barenblatt* 模型一样, 裂纹尖端的张开位移 δ_i 可由抑制应力——张开位移曲线以及 J 积分求出 (J 积分在第四章讲述)。

$$J = \int_0^{\delta_i} \sigma(\delta) d\delta = h \int_0^{\bar{\varepsilon}^P} \sigma(\bar{\varepsilon}^P) d\bar{\varepsilon}^P \quad (2.1.2)$$

此处 J 积分是与路径无关的, 故

$$\frac{K_I^2}{E} = h \int_0^{\bar{\varepsilon}^P} \sigma(\bar{\varepsilon}^P) d\bar{\varepsilon}^P \quad (2.1.3)$$

作为例子, 在常值正切模量下的线性硬化, 有

$$\sigma(\bar{\varepsilon}^P) = \sigma_0 + E_{t,an} \bar{\varepsilon}^P \quad (2.1.4)$$

将上式代入式 (2.1.2) (2.1.3), 即可求得裂纹的张开位移

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= \frac{\sigma_0 h}{E_{t,an}} \left[\left(1 + \frac{2E_{t,an} J}{h\sigma_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ \delta_i &= \frac{\sigma_0 h}{E_{t,an}} \left[\left(1 + 2 \frac{E_{t,an}}{E} \frac{K_I^2}{h\sigma_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

上式中的第二式适用于小范围屈服。

在全塑性情况 ($E_{t,an} = 0$), 上式变成

$$\delta_i = \frac{J}{\sigma_0}, \quad \delta_i = \frac{K_I^2}{E\sigma_0} \quad (2.1.6)$$

2.1.2 D—B 模型的全塑性解

有各种解法, 我们这里讲 *Rice* 的解。

对于内聚应力 σ_0 为常值的情况, 可以应用弹性裂纹问题的解法。对于小范围屈服, 我们把裂纹看成半无限长, 并把两解加在一起: 一个解正确地给出了弹性解中的渐近趋近的倒平方根奇异性, 但使塑性区被扩展的裂纹表面不受力; 另一个解是内聚力区里作用有抑制应力 $\sigma_{22}(x_1, 0) = \sigma_0$ 时半无限长裂纹的解, 这样, 在裂纹端部 $x_1 = 0$ 处, 平面内变形分析中包含的复变应力函数为

$$\phi'(Z) = \Omega'(Z) = \frac{K_I(Z-R)^{-\frac{1}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sigma_0(Z-R)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_0^R \frac{(R-t)^{\frac{1}{2}}}{t-Z} dt \quad (2.1.7)$$

如图 2.1.1(a) 所示, 塑性区尺寸由有界条件确定, 即在 $Z=R$ 处, $(Z-R)^{-\frac{1}{2}}$ 的系数必须等于零。于是

$$\frac{K_1}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_0^R \frac{(R-t)^{\frac{1}{2}}}{t-R} dt = 0$$

或者
$$R = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K_1^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0^{\frac{1}{2}}} \quad (2.1.8)$$

用塑性区尺寸 R 表达 (2.1.7), 得到应力函数

$$\phi'(Z) = \Omega' = \frac{\sigma_0}{t} \arctan \left[\left(\frac{R}{Z-R} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.1.9)$$

内聚力区里的分开距离为

$$\delta = \frac{(k+1)\sigma_0 R}{\pi G} \left[\xi - \frac{x_1}{2R} \log \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \right] \quad (2.1.10)$$

式中 $\xi = \left(1 - \frac{x_1}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$

取平面应力时的 $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, 则上式在 $x_1=0$ 时与 (2.1.6) 式给出的张开位移一致。

同样方法可用来研究长为 $2a$, 受无穷远处外应力场 $(\sigma_{22})_{\infty}$ 的裂纹。在对长为 $2(a+R)$ 的裂纹的解迭加上常值的一项, 以考虑无穷远处所加应力, 得

$$\phi'(Z) = \Omega'(Z) = \frac{\sigma_{\infty}}{2} - \frac{[Z^2 - (a+R)^2]^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-(a+R)}^{+(a+R)} \left[p_2(t)(a+R)^2 - t^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t-Z} \quad (2.1.11)$$

式中 $p_2(t) = \sigma_{\infty}$, 对于 $|t| < a$

$p_2(t) = \sigma_{\infty} - \sigma_0$, 对于 $a < |t| < a+R$

在 $Z = \pm(a+R)$ 处的有界条件得出塑性区尺寸,

$$R = a \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma_{\infty}}{2\sigma_0} \right) - 1 \right] \quad (2.1.12)$$

对应的裂纹张开位移为

$$\delta_t = \frac{(k+1)\sigma_0 a}{\pi G} \log \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma_{\infty}}{2\sigma_0} \right) \right] \quad (2.1.13)$$

将这两个结果按无量纲形式

$$\frac{R}{a} \text{ 和 } \frac{\pi G \delta_t}{(k+1)\sigma_0 a}$$

作为所加应力对屈服应力之比的函数描绘在图中。图 2.1.2 中的虚线表示小范围屈服的结果, 由图线可以估计小范围屈服近似的准确度范围。

$D-B$ 模型还被按其它各种形状进行过分析。Bilby 和 Swinden 及 Smith 求出对于共线无穷周期排列的裂纹塑性区尺寸为

$$R = a \left\{ \left(\frac{2b}{\pi a} \right) \arcsin \left[\sin \left(\frac{\pi a}{2b} \right) \sec \left(\frac{\pi \sigma_{\infty}}{2\sigma_0} \right) \right] - 1 \right\} \quad (2.1.14)$$

裂纹张开位移为

$$\delta_i = \frac{(k+1)\sigma_0 b \sin \alpha}{\pi^2 G} \int_{\mu}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \lambda}{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \log \left[\frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin(\lambda - \mu)} \right] d\lambda \quad (2.1.15)$$

式中 $\alpha = \pi \frac{\pi(a+R)}{2b}$

$$\mu = \frac{\pi \left(1 - \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_0} \right)}{2}$$

对上述问题给出了一些别的数值结果。这个模型的其它二维问题，以及Ⅰ型和Ⅱ型的相似模型曾由 *Bilby* 等(1963)、*Smith*(1966)、*Goodier*和*Field*(1963)、*Rice*等进行过研究。

*Keer*和*Mura* (1966) 研究了无穷远处作用有均匀拉伸应力场 σ_{∞} 、半径为 a 的圆板状裂纹的问题。当然，在这种情况下不是平面应力屈服形式。对于裂纹半长为 $(a+R)$ 的情况，用来确定塑性区尺寸的有界条件，可由下式

$$K_1 = \frac{2}{(\pi a)^{\frac{1}{2}}} \int_0^a \frac{r \rho(r)}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} dr$$

直接求出

$$\sigma_{\infty} \int_0^a \frac{r dr}{[(a+R)^2 - r^2]^{\frac{1}{2}}} + (\sigma_{\infty} - \sigma_0) \int_a^{a+R} \frac{r dr}{[(a+R)^2 - r^2]^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (2.1.16)$$

或

$$\left. \begin{aligned} R &= a \left\{ \left[1 - \left(\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\} \\ \delta_i &= \frac{4(1-\nu)\sigma_0 a}{\pi G} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.17)$$

注意到 $K_1 = 2\sigma_{\infty} \left(\frac{a}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ ，并取 k 的平面应变值，则上式和 (2.1.8) 式及 (2.1.10) 式一致。和无限大物体内长为 $2a$ 的裂纹二维问题不同，圆板状裂纹在一般屈服应力时的张开位移趋近于有限极值。

§ 2.2 滑移线场的解

本节叙述平面应变屈服的滑移线场的近似解。

2.2.1 全塑性平面应变的滑移线场

研究平面应变场的裂纹，假定材料在弹性和塑性上是不可压缩的，塑性区完全包围了裂

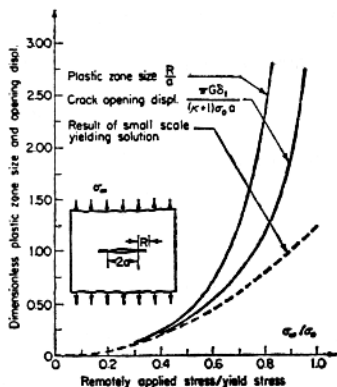


图2.1.2 塑性区尺寸和裂纹张开位移随外应力的变化