

中学基础知识竞赛丛书

数 学

试题及答案

中国妇女出版社

中学基础知识竞赛丛书

—数学试题及答案

乔家瑞 张宗慈 编著

中国妇女出版社

(京)新登字032号

责任编辑：李翔

•

中学基础知识竞赛丛书

——数学试题及答案

乔家瑞 张宗慈 编著

中国妇女出版社出版

北京东城史家胡同甲24号

邮政编码：100010

各地新华书店经销

遵化县人民印刷厂印刷

787×1092毫米1/32 印张12 字数259千字

1991年10月北京第一版 1991年10月第一次印刷

印数：1—18,600册

ISBN 7-80016-497-7/G·299

定 价：4.40 元

内 容 简 介

本书所编选的题目覆盖面宽，难易幅度变化大，形式新颖生动。既有适合一般高中同学学习新课后，准备参加班级及学校基础知识竞赛的练习，又有适合较好同学参加区、县一级竞赛的练习，同时也有适合成绩优秀同学参加省、市一级竞赛的练习。总之，从学习新课开始到高考总复习，从检查新知识掌握程度到为参加各级竞赛做好准备，本书都是较好的参考读物。

全书共分十四个单元，每个单元有必答题及选答题各五组练习。

目 录

第一单元	幂函数、指数函数和对数函数·····	(1)
第二单元	三角函数·····	(25)
第三单元	两角和与差的三角函数·····	(48)
第四单元	反三角函数与三角方程·····	(69)
第五单元	数列、极限、数学归纳法·····	(93)
第六单元	不等式·····	(115)
第七单元	复数·····	(136)
第八单元	排列、组合与二项式定理·····	(158)
第九单元	直线与平面·····	(182)
第十单元	多面体和旋转体·····	(208)
第十一单元	直线方程·····	(229)
第十二单元	圆锥曲线·····	(249)
第十三单元	参数方程与极坐标·····	(272)
第十四单元	综合练习·····	(296)
答案	·····	(310)

第一单元 幂函数、指数函数 和对数函数

必答题 I

一. 填空:

1. 设全集 $I = R$, $A = \{x | x \geq -1\}$, $B = \{x | x < 2\}$,
则 $\overline{A \cup B} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overline{A \cap B} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设集合 $A = \{\text{三角形}\}$, $B = \{\text{等腰三角形}\}$, $C = \{\text{等边三角形}\}$, $D = \{\text{直角三角形}\}$, 则 $A \cap D = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $C \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$, $C \cup A = \underline{\hspace{2cm}}$, $C \cap D = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $D \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$, $D \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 函数 $y = \sqrt{x-7} - \sqrt{10-x}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

函数 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 $f(x) = 2|x| + 3$, $g(x) = -3x + 5$,
且 $f[P(x)] = g(x)$, 则 $P(-4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

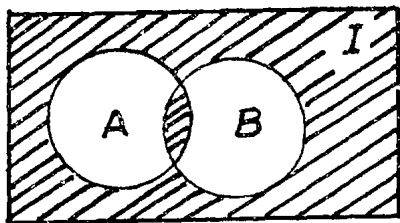
函数 $y = x^{-\frac{5}{3}}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知函数 $y = \sqrt{x} + 6$ ($x \geq 0$), 则它的反函数是_____.

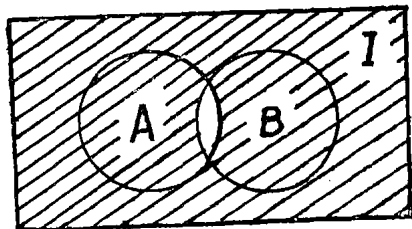
7. 已知 $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$, 则 $f^{-1}(\sqrt{2})$
=_____.

8. 函数 $y = 5^{x^2+1}$ 的单调递增区间是_____函数,
 $y = \lg(x^2+1)$ 的单调递减区间是_____.

二、设全集为 I , 用集合 A, B 的交、并、补集符号表示图 1-1 中的阴影部分.



(1)



(2)

图1-1

三、已知 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, 求证 $[g(-x)]^2 - [f(-x)]^2 = 1$.

四、设 $f(3x+1) = 4x+3$, 求 $f(x)$.

五、证明函数 $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

六、已知奇函数在 $[a, b]$ 上是增函数, 证明 $f(x)$ 在 $[-b, -a]$ 上也是增函数.

七、解方程 $\left| \log_{\frac{1}{3}} x \right| + \left| \log_{\frac{1}{3}} (3-x) \right| = 1$.

八、作函数 $y = \frac{x}{x-1}$ ($x \neq 1$) 的图象, 并指出它的单调区间.

九、已知 $f(x) = \lg \frac{x+5}{x-5}$.

1. 求 $f(x)$ 的定义域;
2. 判断 $f(x)$ 的奇偶性;
3. 求 $f^{-1}(x)$;
4. 设 $f[\varphi(x)] = \lg x$, 求 $\varphi(2)$.

必答题 II

一、填空:

1. 用适当的符号 (\in , \notin , $=$, \subseteq , \supseteq) 填空:

$$\emptyset \underline{\quad} \{0\}; \{1\} \underline{\quad} \{1, 2, 3\}; 0 \underline{\quad} \{0\};$$

$$4 \underline{\quad} \{1, 3, 5\}; \{x \mid |x| \leq 2, x \in R\} \underline{\quad} \{x \mid x^2 \leq 4, x \in R\}.$$

2. 设 $I = A \cup B$, 集合 A, B 各有 10 个元素, $A \cap B$ 有 4 个元素, 则 $A \cup B$ 中元素的个数为 $\underline{\quad}$, $(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$ 中元素的个数为 $\underline{\quad}$.

3. 已知从 A 到 B 的映射是 $f: x \rightarrow y = \frac{1}{x-1}$; 从 B 到

C 的映射是 $g: y \rightarrow z = \frac{1-y}{1+y}$, 则从 A 到 C 的映射 h ($A =$

R^- , $B = R^-$, $C = R^+$) : $x \rightarrow z = \underline{\quad}$.

4. (x, y) 在映射 f 的作用下的象是 $(x+y, x-y)$, $x, y \in R$, 则在 f 的作用下, $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$ 的原象是 $\underline{\quad}$.

5. 函数 $f(x) = 4x^2 - mx + 5$ 在 $x \in (-2, +\infty)$ 时是增函数, $x \in (-\infty, -2)$ 时是减函数, 则 $f(1) = \underline{\quad}$.

6. 已知 $f(x)$ 是偶函数, 并且在 $[0, 4]$ 上是增函数, 则 $M = f(-\pi)$ 与 $N = f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$ 的大小关系

为_____.

7. 已知 $f(x) = \frac{\lg x + 1}{\lg x - 1}$ ($x > 0, x \neq 10$), 则

$$f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

8. 函数 $y = \lg\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ 的定义域是_____, 值域是_____.

二、设全集 $I = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^n}, n \in N\right\}$, 集合 $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^{2n}}, n \in N\right\}$, 求 \bar{A} .

三、如图 1-2, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 8$, P 点从 B 出发经过 C 点到达 D 点, 设 P 点运动的路程为 x , $\triangle ABP$ 的面积为 S , 求函数 $S = f(x)$ 的解析式.

四、设 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$ ($b > -a > 0$), 求 $F(x) = f(x) - f(-x)$ 的定义域.

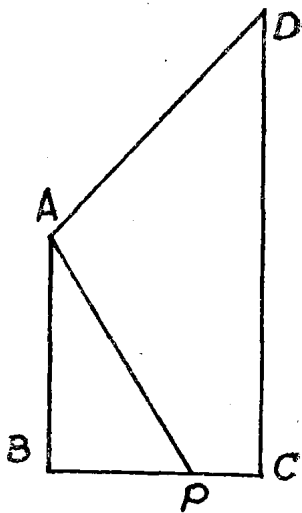


图1-2

五、作函数 $y = (\cos \alpha)^{|\log \cos \alpha^x|}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

的图象。

六、讨论函数 $y = 10^{x^2 - 3x + 2}$ 的单调性。

七、设 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$, 试求 a, b 满足什么关系时有 $f(3) > g(3)$ 。

八、证明函数 $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0, a \neq 1$)

的图象关于 x 轴对称。

九、已知 $\log_3 9 = a$, $\log_3 5 = b$, 求 \lg_3 。

必答题 III

一、填空：

1. 满足 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ 的集合 A 的个数是_____，它们是_____。

2. 设全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$,

$A = \{|a + 1|, 2\}$, $\bar{A} = \{5\}$, 则实数 a 的值

为_____。

3. 函数 $y = \frac{\sqrt{x + 2x^2}}{\sqrt{x - 1}}$ 的定义域是集合 A , 函数

$y = \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x^2 + 1}$ 的定义域是集合 B , 则 $A \cap B$

= _____, $A \cup B =$ _____.

4. 函数 $y = x \sqrt{1-x}$ 的单调递增区间是 _____.

5. 如果 $f(x) = f^{-1}(x) = ax + b$, 则 a, b 应满足的条件是 _____.

6. 已知 $f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 且 $y = F(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于原点对称, 则 $F(x) =$ _____.

7. 设 $f(x) = 10^x - 10^{-x}$, $g(x) = 10^x + 10^{-x}$, 且 $f(x_1)f(x_2) = a$, $g(x_1)g(x_2) = b$ (a, b 是常数), 则 $g(a+b) =$ _____.

8. 如果 $\log_+(x^2 - 1) > 1$, 则 x 的取值范围是 _____.

二、设 $f(x) = 5x - 3$, $x \in \{0, -2, 3, 4, 5\}$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$, $x \in \{-2, -1, 1, 4, 5\}$, 求 $F(x) = \lg f(x) + \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$ 的定义域.

三、作出函数 $y = x^2 - 2|x| + 1$ 的图象, 并根据图象讨论函数的单调性.

四、设 $y_1 = a^{2x^2 - 3x + 1}$, $y_2 = a^{x^2 + 2x - 5}$, $y_1 < y_2$, 求 a, x 的值 ($a > 0, a \neq 1$).

五、求证在定义域 $(-a, a)$ 内 ($a \neq 0$), 两个奇函数的积是偶函数.

六、设 $a > b > 0$, 试比较 $\log_b(a^2 + 1)$ 与 $\log_a(a^b + 1)$ 的大小.

七、设 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [0, +\infty)$, 证明

1. $f(x)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上是增函数;

$$2. \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \quad (a, b \in R).$$

八. 已知 $f(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{x^2}{2}$.

1. 判断 $f(x)$ 的奇偶性;
2. 利用奇偶性讨论 $f(x)$ 的单调性.

九. 讨论函数 $f(x) = \frac{ax}{1-x^2}$ ($-1 < x < 1$) 的单调性.

必 答 题 IV

一. 选择答案:

1. 函数 $f(x) = |x+10| - |x-10|$ 的奇偶性是 ().

- (A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 非奇非偶函数
(D) 既是奇函数又是偶函数

2. 设全集 $I = R$, 集合 $A = \{x|x \leq 0\}$, $B = \{x|x > 4\}$, 则 $A \cup B$ 是 ().

- (A) $\{x|0 \leq x < 4\}$ (B) $\{x|0 < x \leq 4\}$
(C) $\{x|x \leq 0 \text{ 或 } x > 4\}$ (D) $\{x|x < 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$

3. 下列各组中两个函数的图象完全相同的是 ().

- (A) $y = x^2$ 与 $y = \frac{x^3}{x}$ (B) $y = \lg x^2$ 与 $y =$

2 $\lg x$ (C) $y = -\cos x$ 与 $y = \cos(-x)$

$$(D) y = \frac{|x|}{x} \text{ 与 } y = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

4. 设 $x > y > 1$, $0 < a < 1$, 则下列不等式正确的是 ().

(A) $x^a < y^a$ (B) $x^{-a} < y^{-a}$ (C) $a^x > a^y$
(D) $\log_a x > \log_a y$

5. 与方程 $\lg \frac{x}{y} = a$ 的解集相同的方程是 ().

(A) $\lg x - \lg y = a$ (B) $\lg|x| - \lg|y| = a$

(C) $|\frac{x}{y}| = 10^a$ (D) 以上都不对

二、设 $f(x) = a^{x+\frac{1}{2}}$, $f(\lg a) = \sqrt{10}$, 求 a .

三、求函数 $f(x) = 10^x$ ($x \in R$) 的反函数 $f^{-1}(x)$,

并画出函数 $y = |f^{-1}(x)|$ 的大致图象.

四、如果 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 并且 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$.

五、证明函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数.

六、已知 $f(x)$ 是奇函数, 在 $x > 0$ 时, $f(x) = x(1-x)$, 求 $x < 0$ 时 $f(x)$ 的表达式.

七、求证 $\frac{1}{\log_5 19} + \frac{2}{\log_3 19} + \frac{3}{\log_2 19} < 2$.

八、函数 $f(x)$ 的定义域是 $x \in \mathbb{R}^+$, 并且 $f(2) = 1$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

1. 证明 $f(1) = 0$;

2. 求 $f(4)$ 及 $f(\sqrt{2})$ 的值.

九、已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 内是减函数, 且 $f(x) < 0$, 试讨论 $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ 在 $(-\infty, 0)$ 的单内调性, 并加以证明.

必 答 题 V

一、选择答案:

1. 集合 M 和 N 满足 $M \cap N = N$, 则下面关系中总能成立的是 ().

(A) $M = N$ (B) $M \subset N$

(C) $M \cup N = M$ (D) $N \supseteq M$

2. 集合 $M = \{x \mid f(x) = 0\}$, $N = \{x \mid g(x) = 0\}$, 则程方 $f(x) \cdot g(x) = 0$ 的解集是

().

(A) M (B) N (C) $M \cap N$ (D) $M \cup N$

3. 方程 $y = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{3 - x^2}$ 的定义域是

().

(A) $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

(B) $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

(C) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

(D) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

4. 函数 $y = -\sqrt{x}$ 的反函数是 () .

(A) $y = x^2 (x < 0)$ (B) $y = x^2 (x \leq 0)$

(C) $y = x^2 (x > 0)$ (D) $y = x^2 (x \geq 0)$

5. 已知 $f(x) = x^4 - x^2 - 2$, 则 $f(x)$ 是 ()

函数.

(A) 奇 (B) 偶 (C) 非奇非偶

(D) 既奇又偶

二、已知 $f\{f[f(x)]\} = 8x - 7$, 求一次函数 $f(x)$.

三、设 $x^2 - 3x \leq 0$, 求 $y = x^2 - 4x + 5$ 的最值.

四、解方程 $3 \log_{x-1}(x+1) = \log_{x-1}(5x^2 + 4x - 1)$.

五、求函数 $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ 的值域.

六、作函数 $y = |x^2 - 4x + 3|$ 的图象, 并讨论它的单调性.

七、如果 $f(x) = (a^2 - 1)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 求 a 的取值范围.

八、证明函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

九、设 $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$, 求满足 $g[g(x)] > g[f(x)] > f[g(x)]$ 的 x 值的集合.

选 答 题 I

一、选择答案：

1. 函数 $y = 5 - \sqrt{x^2 + 16}$ 的值域是 () .

(A) $[-1, +\infty)$ (B) $(-\infty, 1]$

(C) $(0, 1]$ (D) $[1, +\infty)$

2. (x, y) 在映射 f 下的象是 $(2x + 3y, 2x - 3y)$, 则 $(3, 5)$ 在 f 下的原象是 () .

(A) $(8, -2)$ (B) $(2, -\frac{1}{3})$

(C) $(-2, 8)$ (D) $(-\frac{1}{3}, 2)$

3. 对于 $x \in [0, 1]$ 的所有 x 值, 函数 $f(x) = x^2$ 与其反函数 $f^{-1}(x)$ 的相应函数值之间, 一定成立的关系式是 () .

(A) $f(x) = f^{-1}(x)$ (B) $f(x) \geq f^{-1}(x)$

(C) $f(x) \leq f^{-1}(x)$ (D) $f(x) > f^{-1}(x)$

4. 函数 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in (-\infty, 0)$ 的反函数是 () .

(A) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$)

(B) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x > 1$)

(C) $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$)

(D) $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ ($x > 1$)

5. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right)$ 的单调递增区间是 () .

(A) $(-\infty, 3)$ (B) $(3, +\infty)$