高等数学

解题指引与同步练习

⑨ 重积分和曲线积分

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①曾…②吴…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸　乔　丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　**印张**：32　**字数**：645 千
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点.因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近50年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的“三基”(基本概念、基本理论、基本方法)，必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的“三基”内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固“三基”.然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生，书中的拓展题部分及有“*”号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢.

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2007年10月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已10年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭.因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便.因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

重积分和曲线积分

多元函数积分包括二、三重积分和曲线积分、曲面积分等，它们是定积分的推广．重点内容是二重积分和曲线积分，在学习时要注意与定积分相对照，寻找它们之间的异同点，这样有助于学好多元积分学．

一、二重积分的概念与性质

(1) 与定积分实质相同，二重积分也是一类和式的极限，即 $\iint\limits_D f(x,y) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$．如果存在(当 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续时，必定存在)，则此极限值是一个确定的数值，它只与被积函数 $f(x,y)$ 及积分区域 D 有关．这里积分符号采用“$\iint$”，明确显示积分范围是平面(二维) 区域．

(2) 几何上，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z = f(x,y) \geqslant 0$ 为顶的曲顶柱体的体积．

而当 $f(x,y)$ 在 D 上有正也有负时，约定在 xOy 坐标面之上的部分曲顶柱体之体积冠以正号，在 xOy 坐标面下方的部分曲顶柱体之体积冠以负号，这时二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于各个部分曲顶柱体体积的代数和．

若要求该立体的(真正) 体积，则应表示成 $V = \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$．

特别地，区域 D 的面积数量 $\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$．

(3)定积分的性质几乎都可以推广到重积分中．主要的性质有：

性质 1(线性性质)

$$\iint\limits_D [Af(x,y) + Bg(x,y)]\mathrm{d}\sigma = A\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + B\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad (A,B\text{ 为常数})$$

性质 2(对区域的可加性)

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad (D = D_1 \cup D_2)$$

性质 3(比较性质)　若在 D 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 4(估值定理)　设 M,m 分别是 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值与最小值,σ 为 D 的面积,则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma$$

性质 5(二重积分的中值定理)　设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续,则在 D 上至少存在一点(ξ,η),使得下式成立:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

其中 σ 为区域 D 的面积.

例 1　设 D 是圆环域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,试求 $\iint_D K\mathrm{d}\sigma$($K\neq 0$ 且为常数).

解　圆环域 D 的面积

$$\sigma = \pi\cdot 2^2 - \pi\cdot 1^2 = 3\pi$$

依据重积分的性质得

$$\iint_D K\mathrm{d}\sigma = K\iint_D \mathrm{d}\sigma = K\sigma = 3K\pi$$

例 2　设 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $y-x=1$ 所围成的区域,记 $\iint_D (y-x)\mathrm{d}\sigma = I_1$, $\iint_D (y-x)^2\mathrm{d}\sigma = I_2$,则

A. $I_1>I_2$　　B. $I_1=I_2$　　C. $I_1<I_2$　　D. 无法比较大小

解　画 D 域如图 9-1 所示.

因为在区域 D 上,有 $0\leqslant y-x\leqslant 1$,于是 $(y-x)^2\leqslant y-x$. 则由比较性质得

$$I_1 = \iint_D (y-x)\mathrm{d}\sigma > \iint_D (y-x)^2\mathrm{d}\sigma = I_2$$

应选 A.

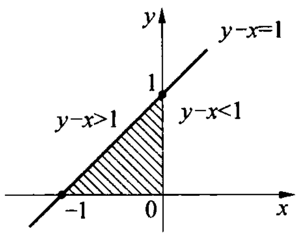

图 9-1

*__例 3__　估计二重积分 $\iint_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$ 的值,其中 D 是圆域 $x^2+y^2\leqslant 4$.

解　先求 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在 D 上的

最大值与最小值.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 8y = 0 \end{cases}$$

得 D 内部的驻点 $(0,0)$,对应的函数值为 $f(0,0)=9$.

再考虑函数在 D 的边界上的函数值.因为在边界 $x^2+y^2=4$ 上有

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3y^2 + 9 = 13 + 3y^2$$

由于 $0\leqslant y^2\leqslant 4$,所以易知 $13\leqslant f(x,y)\leqslant 25$.

比较得最大值 $M=25$,最小值 $m=9$.而 D 的面积 $\sigma=4\pi$.由性质 4 可得

$$36\pi \leqslant \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9)\mathrm{d}\sigma \leqslant 100\pi$$

习题 9－1

基本练习题

1. 设有一块带电的薄板占有平面区域 D,区域 D 上任一点 (x,y) 处的电荷量的面密度为连续函数 $f(x,y)$,试用二重积分表示薄板 D 的总电荷量 Q.

解

2. 利用二重积分的几何意义,求积分 $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}\sigma$ 的值,其中 D 是圆域 $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

解

3. 填空题:

(1) 设 D 为矩形域 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$, $|y|\leqslant\frac{1}{2}$,则 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma =$ __________;

(2) 设 $D = \left\{(x,y) \middle| -R \leqslant x \leqslant R, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$，则 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma =$ ________.

4. 单项选择题：

(1) 设二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} 3\mathrm{d}\sigma$ 的积分区域 (σ) 的面积为 A，则 $3A - \iint\limits_{(\sigma)} (3 - A)\mathrm{d}\sigma =$ (　　)

A. 0　　B. A　　C. A^2　　D. $3A$

(2) 设 D 是以原点为心、2 为半径的圆域，且 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = A$，则 $\iint\limits_D [f(x,y) + 2]\mathrm{d}\sigma =$ (　　)

A. 4π　　B. A　　C. 8π　　D. $A + 8\pi$

(3) 设在区域 B 上，连续函数 $f(x,y) \geqslant 0$，且 $D \subset B$，记 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = I_1$，$\iint\limits_B f(x,y)\mathrm{d}\sigma = I_2$，则 (　　)

A. $I_1 = I_2$　　B. $I_1 < I_2$　　C. $I_1 > I_2$　　D. $I_1 < I_2 < 0$

5. 利用二重积分的性质，比较积分值 $\iint\limits_D (x + y)\mathrm{d}\sigma = I_1$ 与 $\iint\limits_D (x + y)^2\mathrm{d}\sigma = I_2$ 的大小，其中 D 是正方形域 $0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant 2$.

解

拓展题

6. 估计二重积分 $\iint\limits_D (x + y + 1)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D 是长方形域 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$.

解

二、直角坐标下二重积分的计算

在直角坐标下，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$中的面积元素$\mathrm{d}\sigma$记为$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$或$\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，即有$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.计算方法是化为接连两次计算定(单)积分，关键是积分次序的选择，以及积分次序选定之后积分上、下限的确定.可归纳如下：

(1) 当积分区域如图 9-2 所示，D 可以用不等式组表示为

$$\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\end{cases}$$

即区域 D 由四条边界线 $y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$，$x=a$ 和 $x=b$ 围成.一般采用先对 y 后对 x 积分

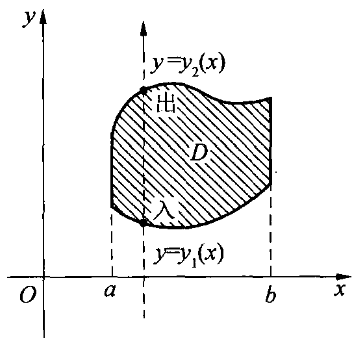

图 9-2

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{记}}\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y \qquad ①$$

必须指出，先对 y 积分时，积分$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$的被积函数$f(x,y)$中的$x$固定(视为常数)，对$y$作定积分得到一个$x$的函数，然后在区间$[a,b]$上再对$x$作定积分.

(2) 如果区域如图 9-3 所示，用不等式组表示为

$$\begin{cases}x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$$

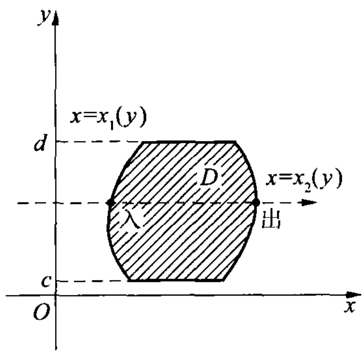

图 9-3

即区域 D 由四条边界线 $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, $y=c$ 和 $y=d$ 围成. 一般采用先对 x 后对 y 积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{记}}\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x \qquad ②$$

先对 x 积分时, 积分 $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的被积函数 $f(x,y)$ 中的 y 视为常数对 x 作定积分.

(3) 如果积分域 D(图 9-4)既可用不等式组 $\begin{cases}a\leqslant x\leqslant b\\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\end{cases}$ 表示, 也可用不等式组 $\begin{cases}x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$ 表示, 则由公式①和②得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

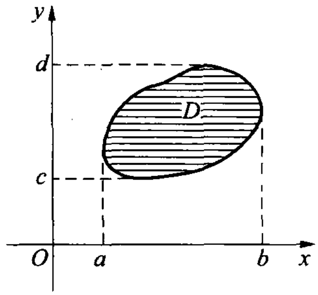

图 9-4

这就是说, 二次积分可以交换积分顺序. 应该注意, 在交换二次积分的积分顺序时, 通常积分限都应随之改变.

(4) 当积分域 D(图 9-5)不是上述两种基本类型时, 可以把 D 分成几个部分区域之并, 使每一部分的区域都属基本类型域之一, 然后分别在各个部分区域上求积分, 根据二重积分对区域具有可加性, 它们的和就是区域 D 上的二重积分.

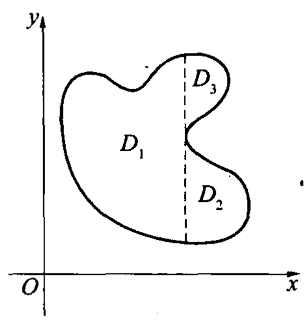

图 9-5

例 4 计算二重积分

$$\iint\limits_D\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D 为长方形域 $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-2\leqslant y\leqslant 2$.

解法 1 先对 y 后对 x 积分, 得

$$\iint\limits_D\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-2}^2\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\left[y-\frac{xy}{3}-\frac{y^2}{8}\right]_{-2}^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1\left(4-\frac{4}{3}x\right)\mathrm{d}x=\left[4x-\frac{2}{3}x^2\right]_{-1}^1=8$$

解法 2 先对 x 后对 y 积分，得

$$\iint_D\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\left[x-\frac{x^2}{6}-\frac{xy}{4}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\left[2y-\frac{y^2}{4}\right]_{-2}^{2}=8$$

例 5 计算 $\iint_D \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为正方形区域 $1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1$.

解 $\iint_D \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1\frac{y}{x^2}\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 y\mathrm{d}y$

$$=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$

注 若积分区域 D 为长方形域 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$，且被积函数 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$，则当 $f_1(x)$ 与 $f_2(y)$ 为连续函数时，总有

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$$

即化为两个定积分之积.

例 6 计算 $\iint_D (x+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2, x=1, y=0$ 所围成的区域.

解法 1 画出积分域 D(图 9-6). 如果选先对 y 后对 x 积分，应在 x 的变化区间 $[0,1]$ 上作一平行于 y 轴的直线段穿过 D 域，沿 y 轴的正方向看去，该线段进入 D 的边界曲线为 $y=0$(下限)，而出口的边界曲线为 $y=x^2$(上限)，即

$$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant x^2\end{cases}$$

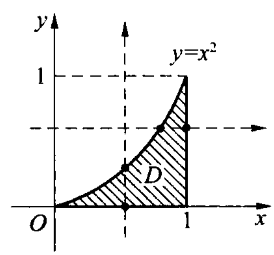

图 9-6

于是

$$\iint_D (x+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x+y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{21}\right]_0^1=\frac{25}{84}$$

解法 2 选先对 x 后对 y 积分，y 的变化区间为 $[0,1]$，作平行于 x 轴的直线段穿过 D 域，沿 x 轴的正方向看去，进入 D 的边界曲线为 $x=\sqrt{y}$(下限)，出口的边界线为 $x=1$(上限)，即

$$D:\begin{cases}\sqrt{y}\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

得

$$\iint_D (x+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1(x+y^2)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+y^2x\right]_{\sqrt{y}}^1\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y^2-\frac{y}{2}-y^{\frac{5}{2}}\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{y}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{4}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_0^1=\frac{25}{84}$$

在上述例子中，积分顺序的变更不影响计算结果．但是，有时一种顺序要远比另一种顺序的计算过程方便．

例 7 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x$，$xy=1$ 及 $x=2$ 所围成的区域．

解法 1 画出积分域 D 如图 9-7a 所示．

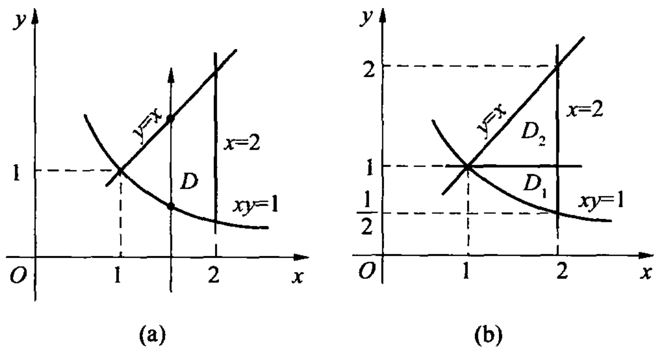

图 9-7

选先对 y 后对 x 积分，应在 x 的变化区间 $[1,2]$ 上，作一平行于 y 轴的直线段穿过 D 域，沿 y 轴的正方向看去，该线段进入 D 的边界曲线为 $y=\frac{1}{x}$（下限），而出口的边界曲线为 $y=x$（上限），即

$$D:\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x\end{cases}$$

于是

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2\cdot\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{9}{4}$$

解法 2 先对 x 积分，则要用直线 $y=1$ 把区域 D 分成两个部分区域 D_1 与

D_2,如图 9-7b 所示.

对区域 D_1,y 的变化区间为$\left[\frac{1}{2},1\right]$,作平行于 x 轴的直线段穿过D_1 域,沿 x 轴的正方向看去,进入 D_1 的边界曲线为 $x=\frac{1}{y}$(下限),出口的边界曲线为 $x=2$(上限).

对区域 D_2,y 的变化区间为[1,2],作平行于 x 轴的直线段穿过D_2 域,沿 x 轴的正方向看去,入口的边界曲线为 $x=y$(下限),出口的边界线为 $x=2$(上限),故

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\frac{x^3}{3y^2}\right]_{\frac{1}{y}}^{2}\mathrm{d}y+\int_1^2\left[\frac{x^3}{3y^2}\right]_y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{8}{y^2}-\frac{1}{y^5}\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{3}\int_1^2\left(\frac{8}{y^2}-y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{8}{y}+\frac{1}{4y^4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{1}{3}\left[-\frac{8}{y}-\frac{y^2}{2}\right]_1^2=\frac{17}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}$$

比较上述两种积分顺序,可见解法 2 比解法 1 的计算量大很多,原因是解法 2 需将积分域 D 分成两块(对应两个积分式子),这是计算二重积分应尽量避免的做法.至于要不要分块是通过 D 域的图形来分析的,所以计算二重积分时,一定要先画出 D 域图.

例 8 计算 $\iint_D 2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $x=0$, $y=1$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

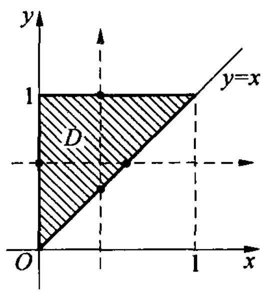

图 9-8

解 画出积分域(图 9-8).由图可见,无论采用哪一种积分次序,都不必将区域 D 分块.

若先对 y 后对 x 积分,有

$$\iint_D 2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

但第一个积分 $\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的原函数不能用初等函数表示(所谓积不出),因此无法进行计算,应改换积分顺序(改为先对 x 后对 y 积分),而不能说二重积分不存在.

$$\iint_D 2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y 2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 2\mathrm{e}^{-y^2}\cdot x\Big|_0^y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 2y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}(-y^2)=-\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^1=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

由上述两个例子可以看到,计算二重积分时,要根据被积函数 $f(x,y)$和积分

域 D 的特点,选用适当的积分次序.如果积分次序选取不当,不仅可能引起计算上的麻烦,甚至可能导致积分值无法算出.

例 9 计算 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$.

解 所给的是二次积分,但按原积分次序,先对 y 积分相当困难,所以考虑更换积分顺序.

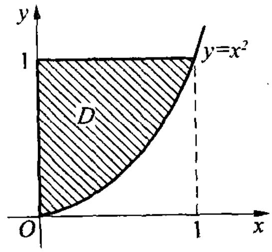

图 9-9

由给定的积分限可知积分区域 D 为

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad x^2 \leqslant y \leqslant 1$$

如图 9-9 所示.改为先对 x 积分,于是

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy = \iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}dy$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1+y^3)^{-\frac{1}{2}}d(1+y^3) = \frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$$

例 10 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数,试证

$$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy = \int_a^b (b-x)f(x)dx$$

证 左端是一个先对 y 后对 x 的二次积分,但第一个积分 $\int f(y)dy$ 是积不出的,所以应先改换积分次序再进行计算.

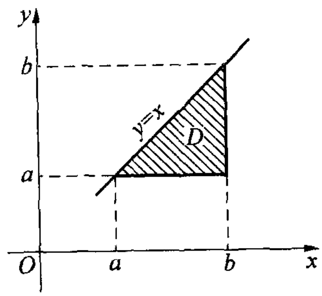

图 9-10

由给定的积分限可知积分区域 D 为

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad a \leqslant y \leqslant x$$

如图 9-10 所示.改为先对 x 积分,则有

$$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy = \iint_D f(y)d\sigma = \int_a^b f(y)dy\int_y^b dx$$

$$= \int_a^b (b-y)f(y)dy = \int_a^b (b-x)f(x)dx$$

习题 9－2

基本练习题

7. 填空题:

(1) 设 D 是由 $0\leqslant x\leqslant 3$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ 所确定的长方形域,则 $\iint_D xy^2 d\sigma =$

____________;

(2) 设 D 是正方形区域 $0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi$，则 $\iint\limits_D \sin 2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ __________.

8. 单项选择题：

(1) 设 D 是正方形区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，则 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma =$ (　　)

A. e^2　　B. $(\mathrm{e}+1)^2$　　C. $(\mathrm{e}-1)^2$　　D. $\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)$

(2) 设 D 是长方形区域 $a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant 1$，又 $\iint\limits_D yf(x)\mathrm{d}\sigma = 1$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ (　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $b-a$

(3) 设 D 是由 $y = kx(k>0)$，$y=0$ 和 $x=1$ 所围成的三角形区域，且 $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{15}$，则 $k =$ (　　)

A. 1　　B. $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$　　C. $\sqrt[3]{\frac{1}{15}}$　　D. $\sqrt[3]{\frac{2}{15}}$

9. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D xy(x-y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为长方形区域 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b$；

解

(2) $\iint\limits_{(\sigma)} (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 (σ) 是由两条坐标轴与直线 $x+y=2$ 所围成的三角形区域；

解

(3) $\iint\limits_{D}\sin x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x, y=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的三角形区域；

解

(4) $\iint\limits_{D}y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0$ 所确定；

解

(5) $\iint\limits_{D}x\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=0, y=x$ 和 $x+y=1$ 所围成的区域；

解

(6) $\iint\limits_{D}\frac{x}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $xy=1, y=x^2$ 和 $x=2$ 所围成的区域；

解

(7) $\iint\limits_D \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0, y=\pi, y=x$ 所围成的区域；

解

(8) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=y^2+1, x=0, y=0$ 及 $y=1$ 所围成的区域.

解

10. 交换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

解

(2) $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解