21世纪
21世纪高等院校创新精品规划教材

数学建模方法与数学实验

主　编　刘仁云
副主编　张晓丽　侯国亮　李东平

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高等院校创新精品规划教材

数学建模方法与数学实验

主　编　刘仁云

副主编　张晓丽　侯国亮　李东平

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书集应用数学知识、数学实验和数学建模为一体，共 13 章，主要内容包括：数学建模简介、数学建模相关软件介绍、MATLAB 入门、MATLAB 在工程计算中的应用、线性规划模型、无约束优化、约束非线性规划、插值与拟合、微分方程理论与数学建模、图论与最短路模型、数据的统计描述和分析、回归分析和数学建模范例等。全书致力于内容的新颖性与广泛性，教学实践性和可操作性强，在介绍一般数学理论的基础之上，尽可能给出可实现的 MATLAB 程序，同时配以一些经典的模型案例。章后附有习题，可供练习。

本书可作为高等院校各专业学生数学建模和数学实验课程教材，也可作为数学建模竞赛培训教材及科技工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模方法与数学实验 / 刘仁云主编. -- 北京 :
中国水利水电出版社, 2011.1
21世纪高等院校创新精品规划教材
ISBN 978-7-5084-8151-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学模型－高等学校－
教材②高等数学－实验－高等学校－教材 Ⅳ.
①O141.4②O13-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第240407号

策划编辑：石永峰　责任编辑：杨元泓　加工编辑：胡海家　封面设计：李　佳

书　　名	21 世纪高等院校创新精品规划教材 **数学建模方法与数学实验**
作　　者	主　编　刘仁云 副主编　张晓丽　侯国亮　李东平
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市天竺颖华印刷厂
规　　格	184mm×260mm　16 开本　16.25 印张　402 千字
版　　次	2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	30.00 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

前　　言

在科学技术迅猛发展的今天，数学的应用范围空前广泛，几乎渗透到自然科学和社会科学的各个领域，而数学建模正是数学走向应用的必经之路，是用数学方法解决实际问题的桥梁。在这样的新形势下，世界各国越来越多的大学（甚至中学）开设了数学建模课程，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力和创新精神。

数学建模本质上就是从实际问题中提炼数学模型，并对其求解、检验，再用它解释和回答原问题的整个过程。学生参加数学建模活动，首先就要了解问题的实际背景，这就需要学生具有能迅速查阅大量科学资料，准确获得自己所需信息的能力；同时，还需要学生了解现代数学各门学科知识和各种数学方法，把所掌握的数学工具创造性地应用于具体的实际问题，构建其数学结构，还要能够熟练应用各种数学软件解决实际问题。在数学建模过程中，利用计算机这一现代化工具是非常重要和十分有效的，用它既可以进行数据处理，又可以进行数值计算、绘制图形和仿真模拟。显然，数学建模的教学和实践打破了传统数学教学自成体系、自我封闭的局面，为数学和外部世界的联系打开了一条通道。数学建模课程教学对于开发学生的创新意识，提升学生的数学素养，培养学生创造性地应用数学工具解决实际问题的能力，有着独特的功能。

编写本书旨在为大专院校的师生提供一本理论与实践相结合的数学建模教材。本书的特点是集数学理论知识、数学实验和数学建模为一体，既提供了数学建模过程中常用的数学方法，又与常用的数学软件（主要是 MATLAB）相结合，给出了相应的函数命令和程序，通过解决具体的模型案例，使学生能够深入理解数学建模过程中的一些基本数学知识，较熟练地使用 MATLAB 软件，培养学生运用所学知识建立数学模型，并使用计算机解决实际问题的能力。

参加本书编写的同志，主要由具有多年教授数学建模课程的老师和近年来指导学生参加全国大学生数学建模竞赛并取得名次的教师组成。具体分工如下：刘仁云负责统稿及组织协调工作，并撰写第 12 章，李东平撰写第 8、11、13 章，侯国亮撰写第 4、10 章，战珊珊撰写第 3 章，罗英语撰写第 1 章，李东平、罗英语共同撰写第 6 章，张晓丽撰写第 5 章，付静撰写第 7 章，梁四化撰写第 9 章，刘仁云与战珊珊共同撰写第 2 章，张晓丽负责组织及文字校对工作，刘仁云、李东平、侯国亮负责全书质量把关。

本书各章均可独立讲授，教师可根据实际情况作出适当选择，不同的学时、不同的层次院校和专业，可以从中选择不同的内容。由于时间仓促及作者水平有限，书中难免有不足及疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2010 年 10 月

目　　录

第 1 章　数学建模简介

1.1　数学建模的概念、方法和意义

1.1.1　数学模型的概念和分类

数学模型（Mathematical Model）是由数字、字母或者其他数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法．即**数学模型**是对于现实世界的一个**特定对象**，一个**特定目的**，根据特有的**内在规律**，做出一些**必要的假设**，运用适当的**数学工具**，得到一个**数学结构**.

简单地说：就是系统的描述某种本质特征的数学表达式（或是用数学术语对部分现实世界的描述），即用数学式子（如函数、图形、代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等）来描述（表述、模拟）所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律.

数学模型可以按照数学方法来分类，如初等模型、几何模型、图论模型、组合模型、微分方程模型、线形规划模型、整数规划模型、非线性规划模型、目标规划模型、统计回归模型、排队论模型等.

数学模型可以按照表现特性来分类，如线性模型与非线性模型（取决于模型的基本数量关系是否是线性的）、离散模型与连续模型（取决于模型中的变量（主要是时间）是离散的还是连续的）、静态模型与动态模型（取决于是否考虑时间引起的变化）、确定性模型与随机性模型（取决于是否考虑随机因素的影响）.

数学模型可以按照应用领域来分类，如人口模型、交通模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型等；范畴更大一些则形成许多边缘学科，如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等.

数学模型还可以按照建模目的来分类，如描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

1.1.2　数学建模的步骤

数学建模的过程是用数学的语言、方法去近似地刻画实际问题，通常包括数学模型的建立、求解、分析和检验四大步骤.

1）数学模型的建立，就是从现实对象的信息提出数学问题，选择合适的数学方法，识别常量、自变量和因变量，引入适当的符号并采用适当的单位制，提出合理的简化假设，推导变量和常量所满足的数量关系，表述成数学模型.

2）数学模型的求解，就是指运用所选择的数学方法求解数学模型．采用适当的计算机软件能够扩大可解决的问题的范围，并能减少计算错误．求解数学模型的常用软件有：Maple、Mathematica 等计算机代数系统（Computer Algebra System，CAS）；MATLAB、LINGO 等数

值计算软件；SAS、SPSS 等统计软件；Excel 等电子表格处理软件等.

（3）数学模型的分析，就是指对数学模型的解答进行数学分析，包括对结果的误差分析或统计分析、模型对数据的灵敏度分析、模型对假设的强健性分析.

灵敏度分析是现在工程计算中非常关注的问题，人们希望当参数产生微小变化时，模型的解变化不大，称之为不灵敏，反之为灵敏. 一般情况下，都要对所建模型进行灵敏度分析. 至于考察那些参数，则要从实际意义出发.

强健性也称稳健性，如果模型假设相对于实际情况的精确程度对模型解答的影响不大，就称该数学模型是强健的（Robust）；反之，该数学模型是脆弱的（Fragile）. 对数学模型进行强健性分析也是很有必要的.

（4）数学模型的检验，就是指把数学模型的解答解释成现实对象的解答，给出实际问题所需要的分析、预报、决策或控制的结果，检验现实对象的解答是否符合现实对象的信息（包括实际的现象、数据或计算机仿真），从而检验数学模型是否合理、是否适用. 然后考虑最初从实际对象的信息提出的数学问题及选择的数学方法是否适当，简化假设是否合理、是否足够，是否需要重新建模，或者修改. 通常情况下，数学建模的过程往往需要经历多次修改和完善.

数学建模取得满意的结果后，可以根据实际对象的需要进一步应用所建立的数学模型来解决其他实际问题，这就是模型应用.

最后，还要理解数学建模的局限性：数学模型是对现实对象简化之后得到的抽象化、理想化的产物，所以数学模型应用于实际问题的时候，结论的通用性和精确性只是相对的和近似的.

1.1.3 数学建模的特点

数学建模是一个实践性很强的学科，它具有以下特点：

（1）涉及广泛的应用领域，如物理学、力学、工程学、生物学、医学、经济学、军事学、体育运动学等. 而至少完全不同的实际问题，在一定的简化层次下，它们的模型是相同或近似的. 这就要求我们培养广泛的兴趣，拓宽知识面，从而发展联想力，通过对各种问题的分析、研究、比较，逐步达到触类旁通的境界.

（2）需要灵活运用各种数学知识. 在数学建模过程中，数学始终是我们的工具. 要根据实际问题的需要，灵活运用各种数学知识如微分方程、运筹学、概率统计、图论、层次分析、变分法等，去描述和解决实际问题. 这要求我们既要加深数学知识的学习，更要培养应用已学到的数学方法及思想进行综合应用和分析，并进行合理地抽象及简化的能力.

（3）需要各种技术手段的配合，如查阅文献资料、使用计算机和各种数学软件包等.

（4）建立一个数学模型与求解一道数学题目有极大的差别. 求解数学题目往往有唯一正确的答案，而数学建模没有唯一正确的答案. 对同一个实际问题可能建立起若干不同的模型，模型无所谓“对”与“错”，评价模型优劣的标准是实践.

（5）建立的数学模型与建模的目的有关. 对同一个实际对象，建模目的的不同导致建模的侧重点和出发点不同.

因此，对一个实际问题而言，数学建模没有确定的模式，它与问题的性质、建模目的、建模者自身的数学素质有关，甚至还与建模者的灵性有关，经验、想象力、洞察力、判断及

直觉、灵感在建模过程中起着与数学知识同样重要的作用. 数学建模是一门科学，一门艺术，要成为一名出色的艺术家，需要大量的观摩和前辈的指导，最重要的是要亲身的实践. 同样要掌握数学建模这门艺术，既要学习、分析、评价、改进别人做过的模型，更要亲自动手做一些实际题目.

1.1.4 数学建模的方法

1. 机理分析和测试分析

数学建模有机理分析和测试分析两大类方法. 机理分析法就是根据现实对象特性的认识，分析其因果关系，尤其是从变化率、守恒律等角度入手分析，找出反映内部机理的数量规律，从而建立数学模型. 采用机理分析法建立的数学模型常有明确的物理或现实意义. 测试分析法就是当研究对象内部机理无法直接寻求的时候，可以测量系统的输入、输出数据，运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型. 因此，测试分析法也叫系统辨识.

这两种方法主要根据对研究对象的了解程度和建模目的来决定. 二者的结合使用也是常用的建模方法，即用机理分析建立模型的结构，用测试分析确定模型的参数.

2. 灵活性，成本和逼真度

解决实际问题有观察、试验、仿真以及建立数学模型等方法，由于较容易根据所搜集的资料的不同情况来给数学模型提出不同的假设和条件，所建立数学模型具有较好的灵活性.

在解决实际问题的几种方法中，建立数学模型不需要很多的人力、物力的投入，成本相对较低.

数学模型是根据研究目的针对现实对象建立的一种模型，逼真度（Fidelity）就是数学模型刻画现实对象的精确程度，在解决实际问题的几种方法中，数学模型有可能获得较好的逼真度. 但逼真度和成本是矛盾的，数学模型越逼真，就越复杂，越难于处理，成本也越高，高成本不一定与复杂模型取得的效益相匹配，所以建立数学模型时，需要在逼真度和成本之间做出折中和选择，提出合理的简化假设.

3. 由简到繁和删繁就简

复杂实际问题的数学建模往往要经过建模过程的反复迭代，由简到繁，或者删繁就简，才能获得越来越满意的模型.

虽然大多数实际问题是随机的、动态的、非线性的，但是数学建模一般从相当简单的模型开始，先考虑比较容易处理的确定性的、静态的、线性的模型，求出初步的、近似的解答，然后根据模型检验的结果改进模型.

4. 连续化和离散化

根据研究对象是随时间（或空间）连续变化还是离散变化，可以建立连续模型或者离散模型. 连续模型便于利用微积分求出解析解，并作理论分析，而离散模型便于在计算机上做数值计算. 在数学建模的过程中，连续模型离散化、离散变量视为连续变量都是常用方法. 典型的例子有人口预报模型：将离散的人口视为时间的连续函数，建立微分方程模型，有利于获得解析解，有利于做理论分析. 但是当微分方程给不出初等函数形式的解析解时，又可以转化成差分方程进行迭代计算得到数值解.

5. 相似类比法

相似类比法就是将新的研究对象与另一个已经建立数学模型获得解答的研究对象进行类比，比较二者之间的相似之处，从而采用同样的数学方法，建立同类型的数学模型．例如，对水流的研究已取得丰富的结果，将水流和交通流类比，借鉴水流的数学建模方法，建立交通流模型．但是要根据实际问题修改已有模型，使之适用于新的研究对象．

1.1.5 学习数学建模的意义

数学是研究数量关系和空间形式的科学，是研究模式的科学．在人类的文明史上，数学一直和人类生活的实际需要密切相关．数学模型是用数学解决实际问题的关键，在数学史上，欧几里得几何、平面和球面上的三角学、代数方程和方程组、指数和对数、微积分、幂级数、傅里叶级数等数学理论和方法同时也都是很有用的数学模型，牛顿发现万有引力定律、傅里叶建立热传导方程、麦克斯韦建立电磁场的基本方程，都是数学模型成功应用于物理学领域的范例．

随着数学的发展，产生出更多新的数学理论分支，同时也诞生出更多新的数学模型．在大学本科的数学课程里，无论是分析、代数、数论、几何、拓扑，还是常微分方程、偏微分方程、概率统计、组合、图论、运筹、控制、计算数学、离散数学，这些数学知识和方法中，许许多多都是数学模型，有着广泛的应用．

当人们需要对所研究的显示对象提供分析、设计、预报、决策、控制、优化、规划、管理、仿真、可视化、数据压缩等方面的定量结果时，常需要数学建模．例如：

分析与设计——人体内药物浓度的变化规律、用数值模拟设计新飞机翼型；

预报与决策——气象预报、人口预报、经济增长预报、效益最大的价格策略、费用最小的设备维修方案；

控制与优化——生产过程最优控制、零件设计的参数优化、大系统控制与优化；

规划与管理——生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度、排队策略．

求解数学模型往往需要大量的计算，在电子计算机出现之前，由于缺乏大规模计算的手段，限制了数学模型的应用和发展．20 世纪中叶，随着电子计算机的出现和飞速发展，过去那些虽然有了数学模型却难以求解的课题，如今迎刃而解．计算机技术促进了数学在研究领域、研究方式和应用范围等方面的拓展．有人总结了如下公式，说明数学建模和与之相伴的计算是从真实到虚拟、从现实问题到数学世界的映射：

模型（Model）+算法（Algorithm）+程序（Program）=映射（Map）

在当今社会，数学不仅是一门科学，也是一种关键的、普通的、可以应用的技术．例如，在工业领域，建立在数学模型和计算机基础上的 CAD 技术大量代替传统手段，数学模型成为高新技术的关键，起着核心的作用，是高新技术的特征之一．人们已普遍认识到数学由研究领域到工业领域的技术转化，对提高经济竞争力具有重要意义，而数学建模和与之相伴的计算是数学科学转化成技术的主要途径．同时，数学对于普通人也越来越重要，因为数学有利于人们收集、整理、描述信息，建立数学模型，进而解决问题，直接为社会创造价值．

由于数学在当今社会的重要性，所以以数学模型为切入点，加强数学和其他科学以及日常生活的联系，是当代数学教育的一个总趋势．在数学课程里，教师要通过建立数学模型解决实际问题的教学，培养学生数学应用的意识和能力．

在大学阶段，普通开设的数学建模课程或数学实验课程有力地促进了大学生培养建立数学模型解决实际问题的意识和能力；各项数学建模竞赛吸引了很多大学生参加，培养和提高了他们数学建模、科研创新和论文写作的能力；在其他的数学课程，尤其是低年级的数学主干课程中，也逐渐融入了数学模型和数学软件的内容，提高了学生的学习兴趣及对数学的应用价值的认识.

总之，数学建模课程是要在数学理论与实际应用之间架设桥梁，培养学生运用数学和相应的计算机软件解决实际问题的意识和能力，而且能帮助数学教育专业本科生和在职的中学教师掌握数学建模教学的内容和方法．学习这门课程，既要扎实掌握数学模型基础知识，又要熟悉使用数学软件求解数学问题，还要积累数学建模经验，就是如何从实际对象提出数学问题建立数学模型、如何将数学模型的解答翻译成实际问题的解答、如何用实际对象的信息检验数学模型、如何撰写合乎要求的数学建模论文或实验报告、如何搜索查阅文献、如何与他人写作等，积极组队参加各项数学建模竞赛，对于学好本课程很有帮助.

1.2　数学建模论文的撰写方法

全国大学生数学建模大赛每年举办一次，其评选是以竞赛论文为依据的．写作时间在三天内完成，因此论文写作非常重要．既要掌握好时间节奏，又要熟悉建模论文各部分内容的写作方法．按照数学建模竞赛章程规定，对论文的评价应以“假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰性”为主要标准．所以，在论文中应尽力体现出这些特征来.

下面简单介绍数学建模论文的结构及撰写方法.

（1）题目（Title）：题目要简练准确、高度概括、恰如其分地向读者传递论文的范围和水平.

（2）摘要（Summary）：在论文之前，简明扼要地介绍研究的课题，建立的模型和取得的结果，使读者能迅速地了解论文的论题和成果，判断值不值得继续阅读全文．摘要应包含以下内容：所研究的实际问题、建立的数学模型、求解模型的方法、获得的基本结果以及对模型的检验或推广．近几年来，为了提高论文评选效率，全国大学生数学建模竞赛要求将论文第一页全用作摘要，对字数明确规定，所以在摘要中，也可适当出现反映结果的图表和数学公式.

（3）问题重述（Restatement of the Problem），或问题澄清，或引言：按照作者对问题的理解，陈述论文要研究的实际问题，包括背景和任务；切记不要照抄原题，应把握住问题的实质，再用较精炼的语言叙述问题.

（4）问题分析（Analysis of the Problem）：陈述作者对实际问题的分析和提出数学问题，陈述作者为建立数学模型选择采用的数学方法，陈述建立数学模型的动机和思路.

（5）符号说明（Exposition of Variables）：列表说明论文所用到的变量和常量的数学符号及意义和单位制.

（6）模型假设（Exposition of Assumptions and Hypotheses）：用精炼准确的语言列举建立数学模型所用到的简化假设，包括考虑哪些主要因素、忽略哪些次要因素、变量满足什么数量关系.

（7）模型建立和求解（Design and Solution of the Model）：根据模型假设推导出数学模型，

运用所选择的数学方法以及相应的计算机软件，得到数学模型的解答，此部分包括求解过程、算法步骤及计算结果，为求解而编写的计算机程序应放在附录部分.

（8）模型分析和检验（Analysis and Testing of the Model）：给出对模型的误差分析、统计分析、灵敏度分析、强健性分析等，把数学模型的解答翻译成现实对象的解答，根据现实对象的信息来进行检验，或者根据题目要求通过计算机进行仿真检验；如果结果与实际不符，问题常出现在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模．这一步对于模型是否真的有用十分关键.

（9）模型评价（Discuss of the Model），或模型推广：实事求是地讨论该模型的优点和缺点、改进方向、推广价值等.

（10）文献（Reference）：列举论文中引用的文献资料或数据的来源，包括序号、作者、文献名称、文献类型标识、出版地、出版者、被引用部分起止页码等.

（11）附录（Appendix）：附录是正文的补充，与正文有关而又不便于编入正文中的内容都收集在这里．包括求解数学模型用到的计算机程序源代码、比较重要但数据量较大的中间结果等.

1.3　数学建模实例：双层玻璃的功效

北方城镇的有些建筑物的窗户是双层的，即窗户上装两层厚度为 d 的玻璃夹着一层厚度为 l 的空气，如图 1-1（a）所示，据说这样做是为了保暖，即减少室内向室外的热量流失.

我们要建立一个模型来描述热量通过窗户的热传导（即流失）过程，并将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层玻璃窗（如图 1-1（b）所示，玻璃厚度为 $2d$ ）的热量传导进行对比，对双层玻璃窗能够减少多少热量损失给出定量分析结果.

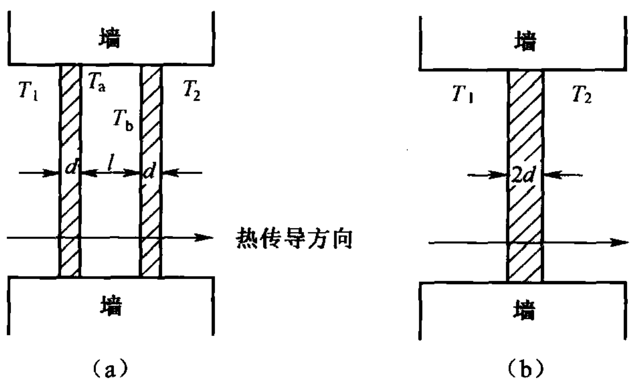

图 1-1

1．模型假设

（1）热量的传播过程只有传导，没有对流．即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃之间的空气是不流动的；

（2）室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变，热传导过程已处于稳定状态，即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数；

（3）玻璃材料均匀，热传导系数是常数.

2. 符号说明

T_1 ——室内温度

T_2 ——室外温度

d ——单层玻璃厚度

l ——两层玻璃之间的空气厚度

T_a ——内层玻璃的外侧温度

T_b ——外层玻璃的内侧温度

k ——热传导系数

Q ——热量损失

3. 模型建立与求解

由物理学知道，在上述假设下，热传导过程遵从下面的物理规律：

厚度为d的均匀介质，两侧温度差为ΔT，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量为Q，与ΔT成正比，与d成反比，即

$$Q = k\frac{\Delta T}{d} \tag{1.1}$$

其中k为热传导系数.

（1）双层玻璃的热量流失

记双层窗内层玻璃的外侧温度为T_a，外层玻璃的内侧温度为T_b，玻璃的热传导系数为k_1，空气的热传导系数为k_2，由（1.1）式得出单位时间单位面积的热量传导（热量流失）为：

$$Q = k_1\frac{T_1 - T_a}{d} = k_2\frac{T_a - T_b}{d} = k_1\frac{T_b - T_2}{d} \tag{1.2}$$

由$Q = k_1\frac{T_1 - T_a}{d}$及$Q = k_1\frac{T_b - T_2}{d}$可得$T_a - T_b = (T_1 - T_2) - 2\frac{Qd}{k_1}$

再代入$Q = k_2\frac{T_a - T_b}{d}$就将（1.2）式中$T_a$、$T_b$消去，变形可得：

$$Q = \frac{k_1(T_1 - T_2)}{d(s+2)}，s = h\frac{k_1}{k_2}，h = \frac{l}{d} \tag{1.3}$$

（2）单层玻璃的热量流失

对于厚度为$2d$的单层玻璃窗户，容易写出热量流失为：

$$Q' = k_1\frac{T_1 - T_2}{2d} \tag{1.4}$$

（3）单层玻璃窗和双层玻璃窗热量流失比较

比较（1.3）式与（1.4）式有：

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{2}{s+2} \tag{1.5}$$

显然，$Q < Q'$.

为了获得更具体的结果，我们需要k_1, k_2的数据，从有关资料可知，不流通、干燥空气的热传导系数$k_2 = 2.5\times10^{-4}$（J/cm.s.℃），常用玻璃的热传导系数

$$k_1 = 4\times10^{-3} \sim 8\times10^{-3}\ (\text{J/cm.s.℃})$$

于是 $\dfrac{k_1}{k_2}=16\sim32$.

在分析双层玻璃窗比单层玻璃窗可减少多少热量损失时，我们做最保守的估计，即取 $\dfrac{k_1}{k_2}=16$ ，由（1.3）式，（1.5）式可得：

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{8h+1}\ ,\ h=\frac{l}{d} \tag{1.6}$$

（4）模型讨论

比值 Q/Q' 反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效，它只与 $h=l/d$ 有关，下图给出了 $Q/Q'\sim h$ 的曲线，当 h 由 0 增加时，Q/Q' 迅速下降，而当 h 超过一定值（比如 $h>4$ ）后 Q/Q' 下降缓慢，可见 h 不宜选得过大.

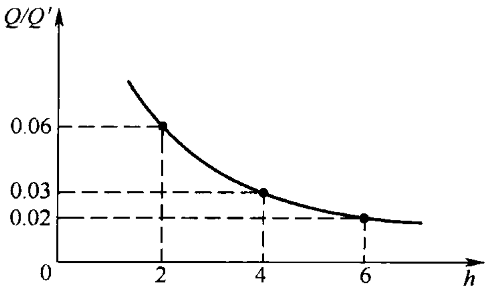

图 1-2

4. 模型的应用

这个模型具有一定的应用价值. 制作双层玻璃窗虽然工艺复杂会增加一些费用，但它减少的热量损失却是相当可观的. 通常，建筑规范要求 $h=l/d\approx4$. 按照这个模型，

$$Q/Q'\approx3\%\ ,$$

即双层玻璃窗比用同样多的玻璃材料制成的单层窗节约热量 97%左右. 不难发现，之所以有如此高的功效主要是由于层间空气极低的热传导系数 k_2 ，而这要求空气是干燥、不流通的. 作为模型假设的这个条件在实际环境下当然不可能完全满足，所以实际上双层玻璃窗的功效会比上述结果差一些.

1.4 思考题

1. 试阐述数学建模的意义和方法.

2. 怎样撰写数学建模论文？

3. 假定人口的增长服从这样的规律：时刻 t 的人口为 $x(t)$ ，t 到 $t+\Delta t$ 时间段内人口的增长量与 $x_m-x(t)$ 成正比（其中 x_m 为最大人口容量）. 试建立模型求解，作解的图形并与指数增长模型、阻滞增长模型的结果进行比较.

4. 设某产品的供给函数 $\varphi(p)$ 与需求函数 $f(p)$ 皆为线性函数：

$$\varphi(p)=3p+4,\ f(p)=-kp+9$$

其中 p 为商品单价，试推导 k 满足什么条件使市场稳定.

5．某植物园的植物基因型为 AA、Aa、aa，人们计划用 AA 型植物与每种基因型植物相结合的方案培育后代（遗传方式为常染色体遗传），经过若干代后，这种植物后代的三种基因型分布将出现什么情形？总体趋势如何？

第 2 章　数学建模涉及的软件介绍

在历届的数学建模竞赛中，参赛者对数学软件的熟练掌握程度对建模的成功与失败起着非常重要的作用. 从数据的处理到公式的推导，从模型的建立到模型的求解，没有数学软件的帮助几乎是不可能完成的. 从今后的趋势来看，数学软件在建模过程中会占据更为重要的地位. 现在数学软件能做的事情已经非常之多，几乎涉及到了所有的数学领域，数的运算、公式推导、方程求解、微积分、线性代数、概率统计、规划求解、函数作图、图论、数论、数值计算、信号处理等. 随着计算技术的不断发展，数学软件的功能会更强大、更智能.

当今，综合性的数学软件主要有 Mathematica，MATLAB，Maple，MathCAD 等，专用数学软件主要有 SPSS，LINGO，LINDO，这些在建模竞赛过程中都可能用到. 在这里，我们主要介绍 MATLAB、LINGO/LINDO、Mathematica、SPSS/SAS.

2.1　用于数学建模的几种常见软件

2.1.1　数值计算软件 MATLAB

MATLAB 名字是由 Matrix 和 Laboratory 两个词的前 3 个字母组合而成的. 它是 MathWorks 公司于 1982 年推出的一套高性能的数值计算和可视化数学软件. 由于使用编程运算与人进行科学计算的思路和表达方式完全一致，所以不像学习其他高级语言如 Basic、Fortran 和 C 那样难于掌握. 用 MATLAB 编写程序犹如在演算纸上排列出公式与求解问题，所以又被称为演算纸式科学算法语言. 在这个环境下，对所要求解的问题，用户只需简单地列出数学表达式，其结果便以数值或图形方式显示出来.

MATLAB 的含义是矩阵实验室，主要用于方便矩阵的存取，其基本元素是无须定义维数的矩阵. 自问世以来，就以数值计算称雄. MATLAB 进行数值计算的基本单位是复数数组（或称阵列），这使得 MATLAB 高度“向量化”. 经过十几年的完善和扩充，现已发展成为线性代数课程的标准工具. 由于它不需定义数组的维数，并给出矩阵函数、特殊矩阵专门的库函数，使之在求解诸如信号处理、建模、系统识别、控制、优化等领域的问题时，显得大为简捷、高效、方便，这是其他高级语言所不能比拟的. 美国许多大学的实验室都安装有供学习和研究之用. 在那里，MATLAB 是攻读学位的大学生、硕士生、博士生必须掌握的基本工具.

MATLAB 中包括被称作工具箱（Toolbox）的各类应用问题的求解工具. 工具箱实际上是对 MATLAB 进行扩展应用的一系列 MATLAB 函数（称为 M 文件），它可用来求解各类学科的问题，包括信号处理、图像处理、控制系统辨识、神经网络等. 随着 MATLAB 版本的不断升级，其所含的工具箱的功能也越来越丰富，因此，应用范围也越来越广泛，成为涉及数值分析的各类工程师不可不用的工具.