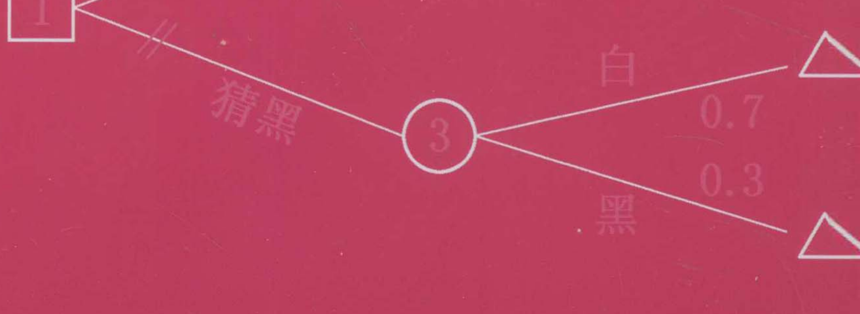
经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 4-9

风险与决策



凤凰国标教材
凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

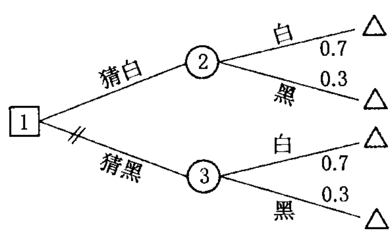
数学

风险与决策

fengxian yu juece

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林

选修4-9



凤凰国标教材
凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书·数学

书　　名	风险与决策(选修4-9)
责任编辑	胡晋宾
出版发行	凤凰出版传媒集团
	江苏教育出版社(南京市湖南路1号A楼　邮编：210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
集团网址	凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷	南京市溧水秦源印务有限公司
厂　　址	南京市溧水县开发区溧淳路(邮编211200)
电　　话	025-56213588
开　　本	1000×1400毫米　1/32
印　　张	1.5
版　　次	2006年6月第1版
	2009年12月第4次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5343-7575-0
定　　价	1.95元
盗版举报	025-83658551

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换

提供盗版线索者给予重奖

批准文号:苏费核(09秋)第21号　举报电话:12358

主　　编　单　塼

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　徐稼红

责任编辑　胡晋宾

为了达到预期目的，从所有可供选择的方案中找出最佳方案的一种择优行为就是决策.

古今中外的许多政治家、军事家、外交家、企业家都曾做出过许许多多出色的决策，至今仍被人们所称颂. 决策的正确与否会给国家、企业或个人带来利益或损失. 人类创造的精神文明和物质财富，主要得益于人类学会了科学决策；同时，当今人口、资源、环境等世界性的难题也是人类“决策”失误的产物.

由于事物的进展情况和信息往往受随机因素的影响，不能确切预料，决策往往带有风险. 为了在情况错综复杂和条件千变万化的情境中作出正确的决策，规避决策失误，决策应按科学的方法进行. 统计决策方法可以提供最优的行动方案，大大减少由于盲目地决定而导致的损失. 因此，统计决策方法和统计决策分析将会在社会的发展和进步中发挥越来越大的作用.

在本专题中，我们将学习一些简单的统计决策方面的知识和方法，形成初步的决策意识.

目　　录

9.1 风险与决策的基本问题

9.1.1 风险的含义

在商业活动和日常生活中，人们经常谈论到风险. 例如：

认真分析一下，看看这件事的风险到底有多大；

这件事的风险太大，不能做；

这件事的风险还不算大，可以做.

上面这些话题有什么共同特点？如何用数学语言来刻画风险？

可以看到，风险至少应当包括两方面的内容：

(1) 风险所涉及的事件的发生是具有随机性的，既可能发生，也可能不发生；

(2) 风险是一个量，可以知道它的大小.

风险的大小与作出的决策是关联的. 为了更好地理解风险的含义，我们先看下面的例子.

A 和 B 两个箱子装有同样规格的产品，但来自不同的厂家. 已经知道 A 箱的废品率是 1%，B 箱的废品率是 3%，你买哪个箱子的产品呢？

解 因为 A 箱的废品率低，所以在通常情况下，应该买 A 箱的产品.

这个例子说明，风险是一个与不利事件发生的可能性有关的量. 风险的大小是与决策有关的，即不同的决策对应着不同的风险. 一个好的决策，应当使得风险达到最小.

A 和 B 两个箱子装有同样规格的产品，但来自不同的厂家. 已经知道 A 箱的废品率是 1%，B 箱的废品率是 3%，如果 A 箱产品的价格

是 10 元，而 B 箱的价格是 1 元，你买哪个箱子的产品呢？

解 用 D_1 和 D_2 分别表示购买 A 箱和 B 箱产品的决策. 很显然，买到废品就会出现损失，那么

$$\begin{aligned}&D_1 \text{ 的损失风险为 } 10\times 1\% = 0.1(\text{元}),\\ &D_2 \text{ 的损失风险为 } 1\times 3\% = 0.03(\text{元}).\end{aligned} \quad (*)$$

因为损失风险越小越好，所以 D_2 要比 D_1 好，即买 B 箱产品的决策要好于买 A 箱产品的决策.

虽然 0.1 和 0.03 差别不大，但是，如果把上式括号中的价格单位换成万元，那么你就会觉得冒一点风险去买 B 箱的产品是值得的.

例 2 通过(*)式的计算来进行决策，你是否满意？如果不满意，应当怎样去做呢？

事实上，还应考虑买到合格品的情况，即考虑成功时的情况.

假如你有 1 000 元，准备进行投资. 有两种投资决策供你选择：一种是稳定的，比如储蓄、国债等，记为 D_1；一种是有风险的，比如经营、股票等，记为 D_2.

若选择 D_1，则一年后可以得到 1 300 元；

若选择 D_2，则可能有两种情况：成功，一年后可以得到 1 500 元；失败，一年后只可能收回 100 元. 已知成功的概率为 0.9，失败的概率为 0.1.

你采取哪种决策？

解 用 H_1 表示投资成功，其概率为 $P(H_1) = 0.9$；用 H_2 表示投资失败，其概率为 $P(H_2) = 0.1$（为叙述方便，以后称 H_1 和 H_2 为状态）. 下面考虑损失：

如果 H_1 发生，采用决策 D_1 要比 D_2 损失

$$1\,500 - 1\,300 = 200(\text{元});$$

如果 H_2 发生，采用决策 D_2 要比 D_1 损失

$$1\,300 - 100 = 1\,200(\text{元}).$$

可以看到，损失是决策 D 和状态 H（成功或失败）的函数，称之为损失函数. 用 $L(D, H)$来表示这个损失函数，则

$$L(D_1, H_1) = 200,$$
$$L(D_2, H_2) = 1\,200.$$

当 H_1 发生时,采用决策 D_2 是正确的选择,所以

$$L(D_2, H_1) = 0;$$

当 H_2 发生时,采用决策 D_1 是正确的选择,所以

$$L(D_1, H_2) = 0.$$

用 $R(D)$ 表示采用决策 D 的期望损失,称它为风险函数. 于是,决策 D_1 和 D_2 的风险分别为:

$$\begin{aligned} R(D_1) &= L(D_1, H_1)P(H_1) + L(D_1, H_2)P(H_2) \\ &= 200 \times 0.9 + 0 \times 0.1 \\ &= 180, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(D_2) &= L(D_2, H_1)P(H_1) + L(D_2, H_2)P(H_2) \\ &= 0 \times 0.9 + 1\,200 \times 0.1 \\ &= 120. \end{aligned}$$

可以看到,采用决策 D_2 要比 D_1 好,因为风险要小一些.

由上例可知,风险(risk)实际上是损失函数的加权平均,其中权为状态发生的概率.

损失函数和状态的概率是风险计算中的两个要素,其具体数值的确定有赖于对历史和现实数据的整理分析,以及对未来情况的预测.

在实际生活中,真正采取哪种决策还与决策者的性格和心理素质有关(例如,有的人偏爱冒险,有的人偏爱稳重). 为了考虑性格的因素,对于损失函数的构建可以灵活一些(参看下面的阅读).

阅 读

足球与电影

今天是星期天,某位同学决定下午踢足球(D_1)或看电影(D_2). 但是,下午有可能下雨. 记下雨为状态 H_1,不下雨为状态 H_2,根据天气预

报可知 $P(H_1)=0.4$, $P(H_2)=1-P(H_1)=0.6$. 那么,这位同学应当如何选择呢?

第一步　定义损失函数.我们来帮助这位同学分析一下如何构建损失函数.这位同学是足球迷,他最希望的是踢足球,因此在 $\{D_1, H_2\}$ 时损失为 0;在 $\{D_1, H_1\}$ 时损失最大,因为一个下午什么也没有干成,我们认定损失为 1.其他两种情况的损失就是在 0 和 1 之间了.这样,就可以得到下面的损失函数:

表 9-1-1

	D_1(足球)	D_2(电影)
H_1(下雨)	1	a
H_2(晴天)	0	b

表 9-1-1 中的 a 和 b 是待定系数,分别表示在下雨时和晴天时选择看电影的损失.之所以用待定系数,是因为这位同学对于如何决策非常犹豫.

第二步　计算风险.根据风险的定义,可以得到

$$R(D_1)=L(D_1, H_1)P(H_1)+L(D_1, H_2)P(H_2)=1\times 0.4+0\times 0.6$$
$$=0.4,$$

$$R(D_2)=L(D_2, H_1)P(H_1)+L(D_2, H_2)P(H_2)=a\times 0.4+b\times 0.6$$
$$=a\times 0.4+b\times 0.6=0.4a+0.6b.$$

第三步　决策.一般来说,a 应当比较小,比如 $a=0.1$,虽然这位同学是足球迷,但下雨看电影总应当是一个明智的选择.但是他会认为晴天看电影的损失是不小的,因此 b 可以取值在 0.4 和 0.9 之间,这取决于这位同学对于足球的迷恋程度.不难得到,当 $b>0.6$ 时,$R(D_1)<R(D_2)$,故此时应选择 D_1;当 $b<0.6$ 时,应选择 D_2.

9.1.2 损益表

上面我们运用风险函数来刻画风险的大小，虽然清楚，但不够直观，演算也较繁琐. 实际上，衡量决策方案的优劣，既可从损失最小的角度来考虑，也可以从收益是否最大来甄别.

损益表是进行风险型决策的常用工具，它用表的形式直观地将决策问题中的信息呈现出来. 我们以 9.1.1 节中的例 3 为例，介绍损益表的制作方法.

损益表一般由三个部分组成.

(1) 方案

决策问题中可能采取的行动称为方案，方案是可以选择的(选择一种方案称为策略)，例 3 中有两个方案：

D_1——储蓄、国债，

D_2——经营、股票.

(2) 状态(也称自然状态)及其发生的概率

状态是指各种方案可能遇到的客观情况. 客观状态不能选择，是不可控制的因素. 例 3 中方案 D_2 有成功或失败两种状态，各种状态发生的概率之和等于 1.

(3) 各种方案的可能结果

它是不同方案在不同状态下的收益值或损失值.

把以上内容画在一个表里，这个表就称为损益表. 9.1.1 节例 3 的损益表如下：

表 9-1-2

收益/元 \ 状态及概率 \ 方案	成功 $p_1 = 0.9$	失败 $p_2 = 0.1$
D_1	1 300	1 300
D_2	1 500	100

根据损益表，我们不难作出决策(见下节).

有一项工程，若下月开工后天气好，则能按期完工并获得利润140万元；若开工后天气不好，则将造成损失120万元.若不开工，不管天气如何，都要因窝工损失20万元.

据预测，下月天气好的概率是0.6，天气坏的概率是0.4.

试作出本题的损益表.

解 本题有两个方案，即开工或不开工.在开工的情况下，有两种状态——天气好或天气坏，将相应状态发生的概率及两种方案的损益值列在表中，即得本题的损益表：

表 9-1-3

收益/万元　状态及概率 方案	天气好 $p_1 = 0.6$	天气坏 $p_2 = 0.4$
开　工	140	−120
不开工	−20	−20

损益表也称决策表，是刻画决策问题的有效手段.在日常生活中，我们也可以用它来描述有待决策的问题.

例如，你打算在即将来临的“五·一”长假进行一次旅行，但不知道是否应该预订一张车票.如果不订票而且又买不到票的话，这次旅行就要取消，但如果你预订了车票结果却发现车票并不紧张，可以在任何一个售票点买到，那么你就会白白损失20元的订票费.这个问题可以用下面的决策表来表示.

表 9-1-4

状　态 方　案	无　票	有　票
预　订	虽然花费了订票费，却可以顺利成行	顺利成行，花费了额外的20元的订票费
不预订	取消旅行	既可以顺利成行，又省下了一笔订票费

某食品店每天顾客需求 100，150，200，250，300 只蛋糕的可能性分别为 0.2，0.25，0.3，0.15 和 0.1，每只蛋糕的进价为 2.5 元，销售价为 4 元，若当天不能售完，剩下的以每只 2 元的价格处理.

试作出本题的损益表.

解 从收益最大的角度来考虑. 对不同的需求量以及不同的进货量，根据

$$\text{销售数} \times (4-2.5) + \text{处理数} \times (2-2.5)$$

求出相应的利润，即可得到损益表：

表 9-1-5

收益/元 \ 状态及概率 \ 方案		需求量				
		100 $p_1=0.2$	150 $p_2=0.25$	200 $p_3=0.3$	250 $p_4=0.15$	300 $p_5=0.1$
进货量	100	150	150	150	150	150
	150	125	225	225	225	225
	200	100	200	300	300	300
	250	75	175	275	375	375
	300	50	150	250	350	450

思考

在例 5 中，如果从损失的角度来考虑，可得到怎样的损益表？

习题9.1

1. 某篮球运动员平均每场比赛大约得 18 分，于是，我们有理由假定该球员在任何一场比赛中的期望得分大约就是 18 分. 那么，在期望值概念下的风险定义就不难理解了：该球员有可能在某场比赛中独得 30 分甚至更高得分，当然也可能只取得 8 分. 试举出生活中类似的例子.
2. 在保险市场中，常常提到所谓高风险投保人，此时风险的含义就是指保险公司负担的损失的期望值（期望损失）较高. 请按此解释美国加利福尼亚州的地震风险很高的含义.
3. 某甲有资金 10 万元欲进行证券投资，经分析调查认为股票 A 前景看好，国库券也不错. 若现时购买股票 A，一年内获利 1.2 万元的可能性为 70%，亏本 0.8 万元的可能性为 30%；若现时购买一年期国库券，由于国库券在我国目前属于无风险证券，故根据其规定年利率计算后可稳获收益 0.5 万元，试通过建立风险函数来作出投资决策.
4. 当你父亲回家时，发现已有 5 个鸡蛋打在碗里，而你父亲又自愿去炒鸡蛋. 第 6 个鸡蛋放在碗的旁边，出于某种理由他必须将第 6 个鸡蛋与 5 个鸡蛋一起炒. 但有可能第 6 个鸡蛋是一个坏了的鸡蛋，如果把它敲进碗里，就把前 5 个鸡蛋一起毁了. 你父亲必须决定怎么处理这个尚未敲开的鸡蛋.

   他有三种可能的行动方案：一是把第 6 个鸡蛋敲入已有 5 个好鸡蛋的碗里，二是把它敲入一只小碗里审视其好坏，三是把它扔掉. 这些方案中将产生各种结果，试用一张表来说明之.
5. 某公司出售一种产品，成本每件 5 元，售价每件 8 元. 若当天销售不完，因产品性质关系，只能改作其他用途，每件只可得残值 2 元. 根据过去经验，得知该公司销售 10，11，12，13 件的概率分别为 0.1，0.2，0.4，0.3. 试作出本题的损益表.

9.2 风险型决策的方法

风险型决策是在不完全掌握未来情况，但知道未来状态的概率分布的情况下做出的决策. 本节我们介绍几种常见的风险型决策的方法.

9.2.1 期望值法

根据每个方案的期望收益(或损失)对方案进行比较，从中选择期望收益最大(或期望损失最小)的方案，这种方法就是以期望值为标准的决策方法.

[illegible] 某鲜花店鲜花的进货价为每束 2.5 元，销售价为每束 5 元. 若当天营业时间内没有售完，则在营业结束时以每束 1.5 元价格处理. 假如每天鲜花需求 20，30，40，50 束的可能性分别为 0.2，0.35，0.3 和 0.15，问：该店每天进多少束鲜花为宜?

解法 1 从获利的角度看，我们应选择收益最大的一种进货方案. 针对不同的需求量以及不同的进货量，按

$$销售数\times(5-2.5)+处理数\times(1.5-2.5)$$

求出相应的利润，即可得到损益表：

表 9-2-1

收益/元 \ 状态及概率 \ 方案		需求量			
		20 $p_1=0.2$	30 $p_2=0.35$	40 $p_3=0.3$	50 $p_4=0.15$
进货量	20	50	50	50	50
	30	40	75	75	75
	40	30	65	100	100
	50	20	55	90	125

再计算不同方案下的期望利润：

进 20 束鲜花时的期望利润为

$$50\times0.2+50\times0.35+50\times0.3+50\times0.15=50(\text{元}),$$

进 30 束鲜花时的期望利润为

$$40\times0.2+75\times0.35+75\times0.3+75\times0.15=68(\text{元}),$$

进 40 束鲜花时的期望利润为

$$30\times0.2+65\times0.35+100\times0.3+100\times0.15=73.75(\text{元}),$$

进 50 束鲜花时的期望利润为

$$20\times0.2+55\times0.35+90\times0.3+125\times0.15=69(\text{元}).$$

因此，最大期望收益为 73.75 元，故进货 40 束鲜花为宜.

解法 2　从损失的角度来分析，应该选择期望损失最小的决策方案. 若进货量等于需求量，则损失值为 0；若进货量小于需求量，则会造成机会损失，损失值为

$$(\text{需求量}-\text{进货量})\times(5-2.5);$$

若进货量大于需求量，则因低价处理而损失

$$\text{处理数}\times(2.5-1.5).$$

这样可求出相应的损失值，得到损益表：

表 9-2-2

损失/元 \ 状态及概率 \ 方案		需求量			
		20 $p_1=0.2$	30 $p_2=0.35$	40 $p_3=0.3$	50 $p_4=0.15$
进货量	20	0	25	50	75
	30	10	0	25	50
	40	20	10	0	25
	50	30	20	10	0

再计算不同方案下的期望损失：

进 20 束鲜花时的期望损失为

$$0\times0.2+25\times0.35+50\times0.3+75\times0.15=35(\text{元}),$$

进 30 束鲜花时的期望损失为

$$10\times0.2+0\times0.35+25\times0.3+50\times0.15=17(\text{元}),$$

进 40 束鲜花时的期望损失为

$$20\times0.2+10\times0.35+0\times0.3+25\times0.15=11.25(\text{元}),$$

进 50 束鲜花时的期望损失为

$$30\times0.2+20\times0.35+10\times0.3+0\times0.15=16(\text{元}).$$

选择期望损失最小的方案，即进 40 束鲜花为最优方案.

事实上，对于某天进 40 束鲜花而言，其利润可能是 30 元(需求量为 20 束)，或 65 元(需求量为 30 束)，或 100 元(需求量为 40 束或 50 束)，肯定不会是 73.75 元(期望利润). 期望利润是销售一天鲜花的平均利润，它对具体某天鲜花的销售来讲没有什么意义. 但当天数很多时，平均利润就显得重要了. 天数越多，每天销售鲜花的平均利润就越接近 73.75 元.

例 1 的两种解法，本质上是一致的. 以期望值为标准的决策方法一般适用于以下情况：

(1) 概率的出现有明显的客观性且比较稳定；

(2) 决策不是解决一次性问题，而是解决多次重复的问题；

(3) 决策的结果不会对决策者带来严重的后果.

例 2 某公司为生产一种产品需要建设一个工厂. 建厂有两个方案，一是建大厂，二是建小厂. 大厂需要投资 300 万元，小厂需要投资 160 万元，两者的使用期都是 10 年. 估计在此期间，产品销路好的可能性是0.7，产品销路差的可能性是 0.3，两个方案的年度收益如下. 如何进行决策?

解 用期望值法进行决策：

建大厂的期望收益为

$$100\times0.7\times10+0.3\times(-20)\times10-300=340(\text{万元}),$$