

土工结构稳定分析

——有限元极限平衡法及其应用

邵龙潭 李红军 著



科学出版社

土工结构稳定分析

——有限元极限平衡法及其应用

邵龙潭 李红军 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍土工结构边坡稳定分析的有限元极限平衡法及其应用,包括安全系数的定义及其物理意义、最危险滑动面的搜索、平面问题数值计算程序、稳定分析的对比算例和应用实例。书中的算例和实例包括各种形式边坡的稳定分析、地基基础的稳定性和极限承载力分析、土工支挡结构的稳定分析、基于随机地震动力响应的边坡动力稳定分析以及三维边坡稳定分析,重点在于说明有限元极限平衡法的适用性和有效性,并且表明其可以作为基于有限元应力分析评价土工结构稳定性的统一方法。

本书可以作为土木工程、水利水电工程、交通工程,特别是岩土工程专业学生的教材或参考书,也可以供相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

土工结构稳定分析:有限元极限平衡法及其应用/邵龙潭,李红军著.
—北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-029958-1

I. 土… II. ①邵… ②李… III. ①有限元法—应用—土木工程—建筑结构—结构稳定性—结构分析 IV. ① TU311.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 005082 号

责任编辑:张 静 唐保军/责任校对:李 影

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司 印刷

排版制作:科学出版社编务公司

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2011 年 1 月第一次印刷 印张: 13 3/4

印数: 1—2 000 字数: 265 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

把土体作为一种工程材料,由土体或土体和其他工程材料构成的具有一定功能的稳定承载体称为土工结构。土工结构失稳的最常见形式是滑坡。滑坡常常会威胁到人类的生命财产安全,成为灾害。土工结构的稳定分析问题是土力学三大经典问题之一,也始终是岩土工程领域的重要研究课题。

迄今为止,已发展了多种稳定分析方法,如刚体极限平衡法、极限分析法、滑移线法和有限元法等。本书附录二介绍了这些方法的基本思想、发展过程及优缺点。

本书所述的有限元极限平衡法是在有限元应力应变分析的基础上,应用土体极限平衡条件估计或评价土工结构稳定性的一种方法。其要点一是以滑面抗剪强度和剪应力积分(代数和)之比定义安全系数,二是以滑动面(滑动面离散后转变为滑面控制节点的垂直坐标)为搜索变量求解最危险滑动面。

长期以来,许多学者都认为,土体沿潜在滑动面的安全系数只能从力或者力矩的平衡条件导出,剪切力和抗剪力都是矢量,在非圆弧滑动面上,两者的代数和之比没有物理意义,不能以此定义安全系数。与这一观点相反,在本书中,作者首先论证了剪切力和抗剪力代数和相等是土体沿滑动面整体达到极限平衡的充分必要条件,再应用积分中值定理给出了有限元极限平衡法安全系数的定义,说明该安全系数就是土体整体达到极限平衡状态时滑动面上土体强度折减系数的平均值,与传统的极限平衡法和有限元强度折减法的安全系数具有相同的物理意义。有限元极限平衡法、传统的极限平衡法和有限元强度折减法三者的安全系数定义均为强度折减系数,具有可比性。

书中大量算例表明,以离散后滑动面的节点坐标作为搜索变量,采用优化算法求解最危险滑动面的方法非常有效并且具有很好的普适性,数值计算编程比较简单且易于扩展至三维边坡稳定分析问题。

本书是邵龙潭及其指导的研究生包括博士后合作研究人员在土工结构稳定有限元极限平衡分析方法及其应用方面开展的研究工作的总结。书中首先对安全系数的定义形式、物理意义、滑动面上的应力计算、最危险滑动面搜索等内容作了阐述,之后给出了平面应变问题数值计算的主程序和主要子程序,并附注解。其后各章给出了各类算例,这些算例包含了赵杰、唐洪祥、郑轶轶和刘士乙等的工作。最后介绍三维有限元极限平衡方法在边坡稳定分析中的应用,其研究工作主要由李红军完成。

全书共分 6 章。第 1 章讲述土工结构稳定分析的有限元极限平衡方法，主要包括安全系数的定义和最危险滑动面的搜索两方面的内容。第 2 章给出了平面问题数值计算程序并作了注解，同时给出输入文件的示例。第 3 章是应用有限元极限平衡法的一般算例，包括不同的边坡形式及不同的荷载工况，重点说明该方法的有效性。第 4 章是有限元极限平衡法用于土工支挡结构稳定性分析的算例，包括土钉支护基坑边坡、抗滑桩加固边坡和重力式挡土结构。第 5 章将有限元极限平衡方法应用于边坡的地震动力稳定性分析，在确定性随机地震动力反应分析的基础上，以各点最不利的动应力方向组合叠加静应力来评价其稳定性。第 6 章将有限元极限平衡法推广至三维问题，发展了三维有限元极限平衡稳定分析方法，并给出了算例。第 3~5 章，在内容编排上都是先引用算例说明方法的适用性，再辅以应用实例。

在完成本书稿时，作者要向郭晓霞博士表示感谢，她在本书的文稿整理、校对、修改等方面帮助作者作了大量的工作，还要赵博雅、张旭东和于斯滢等研究生表示感谢，他们帮助作者完成了部分图形和文稿校对工作。

邵龙潭 李红军

2010 年 7 月 6 日

目 录

前言

第 1 章 土工结构稳定分析的有限元极限平衡方法	1
1.1 安全系数定义	1
1.1.1 土体沿滑动面的极限平衡状态	1
1.1.2 滑动面上土体达到极限平衡的充分必要条件	2
1.1.3 土体滑动稳定安全系数的定义	4
1.1.4 关于安全系数的讨论	5
1.2 最危险滑动面的搜索	6
1.2.1 稳定分析问题的数学表述	7
1.2.2 安全系数计算	8
1.2.3 最危险滑动面搜索	14
参考文献	17
第 2 章 数值计算程序及说明	18
2.1 STABFEM2D 源程序	18
2.1.1 主程序	18
2.1.2 子程序组成及功能	20
2.1.3 数据输入子程序	20
2.1.4 初始滑面生成子程序	22
2.1.5 全局最危险滑面搜索子程序	24
2.1.6 局部最危险滑面搜索子程序	31
2.1.7 安全系数计算子程序	32
2.1.8 应力求解子程序	36
2.2 输入数据说明	39
2.2.1 坐标系及滑动方向	39
2.2.2 坡体轮廓线及材料分区	40
2.2.3 滑入、滑出点	40
2.2.4 形成初始滑动面	40
2.2.5 局部最危险滑动面优化参数	42
2.2.6 土体材料强度参数	43
2.2.7 有限元单元、节点信息	43

2.2.8 应力信息	44
2.3 算例	44
第3章 一般边坡的稳定分析	47
3.1 均质边坡的稳定分析	47
3.1.1 自重作用边坡的稳定分析	47
3.1.2 稳定渗流作用下的边坡稳定分析	50
3.1.3 考虑地震影响的有限元极限平衡分析	52
3.2 非均质边坡的稳定分析	54
3.3 存在软弱夹层边坡的稳定分析	56
3.3.1 固定滑动面	56
3.3.2 任意滑动面	58
3.4 基础软弱层边坡的稳定分析	61
3.5 开挖和填筑边坡的稳定分析	65
3.5.1 计算结果	66
3.5.2 影响填筑和开挖边坡稳定性的因素	69
3.6 极限承载力验算分析	71
3.6.1 极限承载力与最小安全系数	73
3.6.2 最危险滑动面比较分析	74
3.7 工程实例	76
3.7.1 工程概况	76
3.7.2 稳定分析参数及计算方案	77
3.7.3 计算结果及分析	77
参考文献	78
第4章 支挡结构的稳定性分析	80
4.1 土钉加固边坡的稳定分析	80
4.1.1 土钉支护的基坑边坡	80
4.1.2 土钉加固基坑边坡的有限元应力应变分析	81
4.1.3 土钉支护基坑边坡的稳定分析	82
4.1.4 有限元极限平衡法在普通土钉支护边坡设计中的应用	92
4.1.5 有限元极限平衡法在复合土钉支护边坡中的应用	98
4.2 抗滑桩加固边坡的稳定分析	105
4.2.1 典型算例	106
4.2.2 有限元极限平衡法应用于加固边坡桩体设计	112
4.2.3 土体物理力学参数对加固边坡稳定性的影响	119
4.3 重力式挡土结构的稳定分析	119

4.3.1 有限元极限平衡法用于重力式挡土结构的稳定分析	120
4.3.2 应用有限元极限平衡法讨论影响挡土墙抗滑稳定性因素	130
参考文献	136
第 5 章 基于随机地震反应分析的边坡稳定评价	138
5.1 地震响应随机分析方法简述	138
5.1.1 随机振动理论	138
5.1.2 土体非线性随机地震反应分析	142
5.1.3 土坝二维随机地震反应分析	147
5.2 随机地震动力响应下边坡稳定分析的有限元方法	148
5.3 动力稳定分析结果及与振动台模型试验的对比	150
5.3.1 引用的模型试验结果	150
5.3.2 动力稳定分析结果	152
5.4 高土石坝地震动力稳定性分析	153
5.4.1 土石坝的几何尺寸、材料参数及输入工况	153
5.4.2 土石坝随机地震反应及其稳定性分析	154
参考文献	158
第 6 章 三维有限元极限平衡法	159
6.1 三维有限元极限平衡法的安全系数定义	159
6.1.1 空间主滑方向	159
6.1.2 空间滑面抗剪强度与剪应力	161
6.2 滑动面搜索	164
6.2.1 初始滑面模拟策略	166
6.2.2 初始最危险滑面搜索算法	167
6.2.3 模式搜索算法——Hooke-Jeeves 算法	170
6.3 算例验证与对比分析	173
6.3.1 固定滑面	173
6.3.2 非固定滑面	187
参考文献	196
附录一	198
附录二	200

第 1 章 土工结构稳定分析的有限元极限平衡方法

土工结构稳定分析的有限元极限平衡方法是在土工结构弹塑性有限元应力分析基础上, 基于极限平衡条件进行稳定性判定的方法。它是一种确定性分析方法, 其基本思路是: 定义边坡稳定安全系数, 根据有限元计算得到的实际应力分布确定最危险滑动面及其相应的安全系数, 以此安全系数评价土工结构的稳定性。主要包含两方面的内容: 一是安全系数的定义; 二是最危险滑动面的搜索^[1,2]。

1.1 安全系数定义

土工结构的稳定安全系数主要有两种定义方法: 一是超载系数, 即增加荷载使土体沿某一曲面整体达到极限平衡状态, 此时的荷载值称为极限荷载, 把极限荷载与实际荷载或者设计荷载的比值称为超载系数; 二是强度储备系数, 即土体沿最危险潜在滑动面整体达到极限平衡状态时的强度折减系数。两种安全系数定义均以土体达到极限平衡状态为前提, 差别只在于达到极限平衡状态的方式不同。因此下面先讨论极限平衡状态。

1.1.1 土体沿滑动面的极限平衡状态

当土工结构中土体内任意一点在某一方向上的剪应力 τ 等于土体的抗剪强度 τ_f 时, 我们称该点的土体处于极限平衡状态。当一点的土体处于极限平衡状态时, 该点对应的土体微元体也在对应方向上达到极限平衡, 即土体微元体相应方向上的剪切力和抗剪力 (也称为滑动力和阻滑力, 表达式见下文) 大小相等, 方向相反。因此当我们说土体一点处于极限平衡状态时, 也指该点对应的微元体处于极限平衡状态。

对实际的土工结构而言, 土体沿滑动面的极限平衡是一种设定的状态。在此设定状态下我们可以讨论土体极限平衡的充分必要条件: 如果土体沿某一滑动面每一点都处于极限平衡状态, 则土工结构沿滑动面整体处于极限平衡状态; 反之, 如果土工结构沿滑动面整体处于极限平衡状态, 则 (必须) 土体沿滑动面每一点都处于极限平衡状态。

以平面问题为例, 设 l 为通过土体区域的任意形状连续曲面 (线), 土体沿 l 达到极限平衡是指: 在曲面任意微元长度上, 沿曲面切线方向土体的剪切力 (称滑动力) 与抗剪力 (称阻滑力) 相等, 由此, 在整个曲面上滑动力的合力与阻滑力的合

力相等, 对曲面外任意一点, 滑动力矩与阻滑力矩相等。

如图 1.1 所示, 若土体沿滑动面任意一点都处于极限平衡状态, 即

$$\tau_i - \tau_{fi} = 0 \quad (1.1)$$

则滑动面上每一点对应的微元长度上土体的滑动力与阻滑力相平衡, 即

$$T_i - T_{fi} = 0 \quad (1.2)$$

那么, 整个滑动面上土体滑动力的合力与阻滑力的合力也相平衡, 对于滑动面外任意一点, 滑动力矩与阻滑力矩的合力矩也平衡, 即

$$\sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{fi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{T_i} - \sum_{i=1}^n M_{T_{fi}} = 0 \quad (1.3)$$

式中, $T_{fi} = \tau_{fi} \Delta l_i$, $T_i = \tau_i \Delta l_i$ 分别为曲面上一点土体微元长度上的滑动力和阻滑力; τ_i 和 τ_{fi} 为土体的剪应力和抗剪强度; n 代表整个曲面上土体微元的数量。

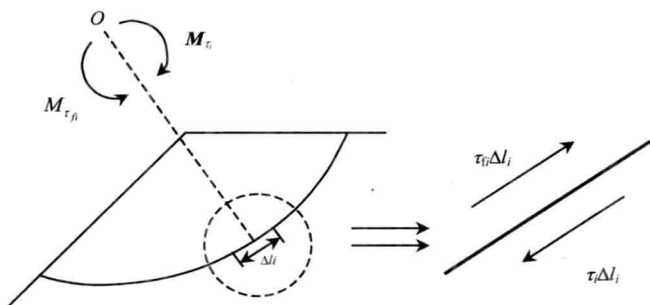


图 1.1 滑动面上任意微元体沿切线方向力和力矩平衡

土体沿滑动面的极限平衡条件与滑动方向有关。在平面问题的假定下, 滑动方向由滑动面规定; 对于实际的三维滑动问题, 可以规定一致的滑动方向, 即主滑动方向; 也可以规定单元(局部)不同的滑动方向, 如最大剪应力方向的组合, 此将在第 6 章中讨论。

1.1.2 滑动面上土体达到极限平衡的充分必要条件

任意滑动面上土体整体达到极限平衡的充分必要条件为

$$\int_l \tau dl = \int_l \tau_f dl \quad (1.4)$$

以平面问题为例说明如下:

如果滑动面上任意一点的土体微元体都处于极限平衡状态, 即式(1.1)成立, 那么

$$\tau_i \cdot \Delta l_i - \tau_{fi} \cdot \Delta l_i = 0 \quad (1.5)$$

即

$$(\tau_i \cdot \Delta l_i - \tau_{fi} \cdot \Delta l_i) l_i = 0 \quad (1.6)$$

式中, Δl_i 为所考察的点沿滑动方向的微元长度; l_i 为该点沿滑动方向的单位方向向量。而若要式(1.6)成立, 必须

$$\tau_i \cdot \Delta l_i - \tau_{fi} \cdot \Delta l_i = 0 \quad (1.7)$$

则必然

$$\sum_{i=1}^n \tau_i \cdot \Delta l_i - \sum_{i=1}^n \tau_{fi} \cdot \Delta l_i = 0 \quad (1.8)$$

进一步可得式(1.4)。

反过来, 如果式(1.4)成立, 则有

$$\sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{fi}) \cdot \Delta l_i = 0 \quad (1.9)$$

因为对于稳定或者处于极限平衡状态的土体, 每一点都必有

$$\tau_i \leq \tau_{fi} \quad (1.10)$$

且 $\Delta l_i > 0$, 则要式(1.9)成立, 必须

$$\tau_i \cdot \Delta l_i - \tau_{fi} \cdot \Delta l_i = 0 \quad (1.11)$$

即得到式(1.1), 于是有式(1.2)和式(1.3), 亦即沿曲面每一点土体微元长度上的滑动力和阻滑力平衡。

上面的讨论表明, 若土体沿曲面 l 整体达到极限平衡, 则式(1.4)成立; 反之, 若式(1.4)成立, 则土体沿曲面 l 整体达到极限平衡。即土体沿其区域内任意形状连续曲面(线) l 整体达到极限平衡的充分必要条件是

$$\frac{\int_l \tau_f dl}{\int_l \tau dl} = 1 \quad (1.12)$$

1.1.3 土体滑动稳定安全系数的定义

对于正常工作的土工结构,在其任意一个曲面上土体都不会达到极限平衡状态。因此如前所述,稳定性评价有两种途径:一是增加荷载使土体沿某一曲面整体达到极限平衡状态,此时的荷载值可以称为极限荷载。极限荷载与原有设计荷载或实际作用荷载的比值称为超载系数;二是计算土体沿最危险潜在滑动面整体达到极限平衡状态时的强度折减系数,也可以称为强度储备系数或安全系数^[3-5]。这里只讨论强度折减系数。

设 $R_{(l)}$ 是沿曲面 l 使土体各点均达到极限平衡状态的强度折减系数(函数),那么土体沿曲面 l 整体达到极限平衡的充要条件是为

$$\int_l \frac{\tau_f}{R_{(l)}} \cdot dl = \int_l \tau \cdot dl \quad (1.13)$$

应用积分中值定理,令

$$\frac{1}{K} \int_l \tau_f \cdot dl = \int_l \frac{\tau_f}{R_{(l)}} \cdot dl \quad (1.14)$$

则有

$$K = \frac{\int_l \tau_f dl}{\int_l \tau dl} \quad (1.15)$$

K 是使土体沿滑动面整体达到极限平衡的强度折减系数(函数)的中值。如果式(1.13)成立,则有式(1.15)成立;反之,如果式(1.15)成立,则必有一函数 $R_{(l)}$ 使之满足式(1.14),进而使式(1.13)成立。因此,式(1.15)是在整体平均(中值)意义上土体沿滑动面 l 达到极限平衡的充分必要条件。

K 也是通常在有限元边坡稳定分析中根据土体强度定义的安全系数。因为 $R_{(l)}$ 是沿曲面 l 使土体各点均达到极限平衡状态的强度折减系数(函数),也可以理解为土体各点极限抗剪强度与实际发挥强度的比值,所以 K 的物理意义是沿曲面土体整体达到极限平衡时的平均强度折减系数,或称为强度储备系数。

上面的讨论表明:式(1.15)定义的安全系数与传统的极限平衡分析方法,如简单条分法、毕肖普法等安全系数的定义是一致的,具有相同的物理意义。事实上,毕肖普就曾用强度折减的概念定义条分法中的安全系数。另外,式(1.15)安全系数的定义在本质上也可以理解为一种强度折减法,其土体沿滑动面破坏的判别标准是土体沿滑动面整体达到极限平衡,其与强度折减法在物理本质上

是相同的。

1.1.4 关于安全系数的讨论

1. 安全系数定义的合理性

在传统的极限平衡法中,安全系数定义为沿滑动面阻滑力矩和滑动力矩之比。在滑动为圆弧的假定下,因为力臂长度相等,所以演化为阻滑力和滑动力的代数和之比。而我们前面讨论的安全系数的定义是对任意形状滑动面的,缘此,有岩土工程专家对前述安全系数的定义提出质疑:滑动面上的滑动力(矩)和阻滑力(矩)是矢量,其代数和(积分)之比有物理意义吗?

如果仍然从力或者力矩之比的角度去理解上述安全系数的定义,这一质疑是有道理的,但是如果从强度折减和滑动面整体极限平衡条件的角度去理解,就不会再存有这样的质疑。此时安全系数的物理本质是土体沿曲面整体达到极限平衡时的平均强度折减系数,或者说是对土体沿滑动面整体达到极限平衡状态的平均强度折减系数的一个估计。

这种估计以土工结构处于稳定或处于临界平衡状态为条件,它不能反映土工结构破坏的演进过程,但是可以估计其稳定性。这种方法对于失稳滑动的土坡不适用,因为在前面的讨论中,我们设定对土体每一点都必须有 $\tau \leq \tau_f$ 或者 $\tau \leq \tau_f / R_f$,即要求土体处于稳定或者临界平衡状态。

在这种估计方法中,对土体的抗剪强度进行折减是一个假定。如果我们真的对土体的强度进行折减,土工结构的应力分布可能会发生变化,这反过来会影响土工结构的稳定性;另外,如果土的抗剪强度参数发生变化,则土的应力应变本构模型参数也会发生变化,这势必会影响土的内力分布,进而影响到土工结构的稳定性。即便如此,这种估计仍然是合理和适用的,因为在计算土体的应力分布时,并没有折减土体的抗剪强度,其内力分布在有限元分析的精度上是“真实”的。边坡稳定性的估计是基于这一真实的内力分布。初步的研究还表明:如果采用折减后的抗剪强度参数再次进行应力分析,以此为基础再进行边坡稳定计算,得到的最危险安全系数仍然大于1.0,表明上述安全系数的估计是偏于安全的。

另一个问题是,如果滑动面的切向剪应力都沿着同一个方向,上面安全系数的定义则没有任何异义,但若切向剪应力有正负时(实际计算时会有这样的情况出现),此时不能应用中值定理,仍简单地将 τ 和 τ_f 视为滑动力和抗滑力是不合适的^[2]。为此,作者提出了分段法,即剔除剪切力逆滑出方向的部分,只考虑剪切力顺滑出方向的一段。计算这一段的安全系数 K' ,搜索相应的“最危险滑动面”,以此估计边坡的稳定性:若 $K' > [K]$,边坡稳定且趋于保守;若 $K' < [K]$,不能确定边坡的稳定性。

2. 极限平衡状态的假定

建立土工结构稳定极限平衡分析方法的基础是极限平衡状态的假定。土工结构真实的失稳过程一般比较复杂,通常可能是从局部破坏开始,逐渐演进到整体失稳。极限平衡状态的假定只是建立极限平衡分析方法的一个手段,其基础是土体微元的极限平衡条件。

3. 明确安全系数物理意义的意义

从前面的讨论可以知道:抗剪强度沿滑动面的积分与剪应力沿滑动面的积分之比,也就是沿滑动面阻滑力和滑动力的代数和之比,其物理意义是土体沿滑动面整体达到极限平衡状态时的平均强度折减系数,或称为平均强度储备系数。

在讨论中并没有要求滑动面必须为圆弧。事实上,对于任意形状滑动面, K 都具有同样的物理意义,也就是说,对于任意形状的滑动面,用式(1.15)定义的安全系数都具有明确的物理意义。这也意味着,传统的条分法也适用于任意形状的滑动面。

无论是按照力平衡或者力矩平衡定义安全系数,传统条分法中的安全系数公式都可以由前述强度折减的概念得到。文献[1]中说明了简单条分法中阻滑力矩与滑动力矩之比安全系数如何等价于式(1.15)定义的安全系数。可以看到,传统条分法中安全系数的定义与式(1.15)具有完全相同的物理意义,两者是一致的。传统条分法与基于有限元应力分析的极限平衡法都是计算土体的强度储备,因此可以说,稳定分析的传统条分法与基于有限元应力分析的极限平衡法是同一种方法,两者的区别仅仅在于内力计算方法不同。

从前面的讨论还可以了解,基于有限元应力分析的极限平衡法在本质上可以理解作为一种强度折减方法,它的滑动面破坏判别标准是土体沿滑动面整体达到极限平衡。它与有限元强度折减法的物理本质相同,但是滑动面破坏判别标准不同。

在前面的讨论中我们设定对土体每一点都必有 $\tau \leq \tau_f$ 或者 $\tau \leq \tau_f / R_f$,这要求土体处于稳定或者临界平衡状态。土体处于滑动状态不能满足上述条件。因此按照式(1.15)计算安全系数的条件是土体处于稳定或者临界平衡状态。

1.2 最危险滑动面的搜索

1989年,邵龙潭^[6]发展了以滑动面上控制节点垂直坐标为优化变量搜索最危险滑动面的方法。其要点是把稳定分析问题转化为数学规划问题,以离散后滑动面的节点坐标为搜索变量求解最危险滑动面。

1.2.1 稳定分析问题的数学表述

在定义了滑动稳定安全系数后,土工结构的滑动稳定分析问题可以表述为:在已知应力分布的土体内寻找曲面 l 使安全系数 K 达到最小。这是一个数学规划问题,目标函数是安全系数 K ,待求解变量是曲线 l ,约束条件是曲线 l 在区域 S 内。因为待求解变量是一条曲线,具有无穷多自由度,所以可以视为带有约束条件的广义数学规划问题。用数学形式可

$$\begin{cases} \min K = \frac{\int_l (\sigma_n \tan \varphi + c) dl}{\int_r \tau dl} \\ \text{s.t. } l \in S \end{cases} \quad (1.16)$$

为求解方便,将应力场拓展到整个平面,即令

$$\sigma_{ij}(x, y) = \begin{cases} \sigma_{ij}^0(x, y), & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \notin S \end{cases} \quad (1.17)$$

式中, σ_n 和 τ 分别为滑动面上任意微元体法向应力和沿滑动方向切向剪应力; σ_{ij} 为坐标为 (x, y) 处的应力; σ_{ij}^0 对应坡体真实应力场。这样,约束条件可以消除,上述稳定分析问题化成无约束的广义数学规划问题。

用有限数目的坐标节点 (x_i, y_i) 和曲线单元将 l 离散,如图 1.2 所示。在离散的曲线单元内构造适当的坐标插值函数,当所取的坐标节点足够密时,曲线 l 完全可以由坐标点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, m$) 近似确定。这样,如果求得了各点的坐标值,便可以认为求得了曲线 l 。进一步分析可以知道,由于坐标点可以任意取定,如果事先给定节点 (x_i, y_i) 的 x_i 值,那么曲线 l 的变化就表现为 y_i 的变化。就是说,求解得到了节点坐标 y_i ,也就等于求解得到了曲线 l 。

于是,土工结构的滑动稳定分析问题可以进一步表述为^[1]:在已知的应力场内,根据给定的一组节点横坐标 x_i ($i=1, 2, \dots, m$),求解确定节点的纵坐标 y_i ($i=1, 2, \dots, m$),这组节点坐标规定的曲线 l 使安全系数 K 达到最小。此时,目标函数是 K ,待求变量是节点的纵坐标 y_i ($i=1, 2, \dots, m$)。其数学表达式为

$$\min K(y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (1.18)$$

求解时,如果考虑约束条件,则约束条件是待求的坐标节点在 S 域内。

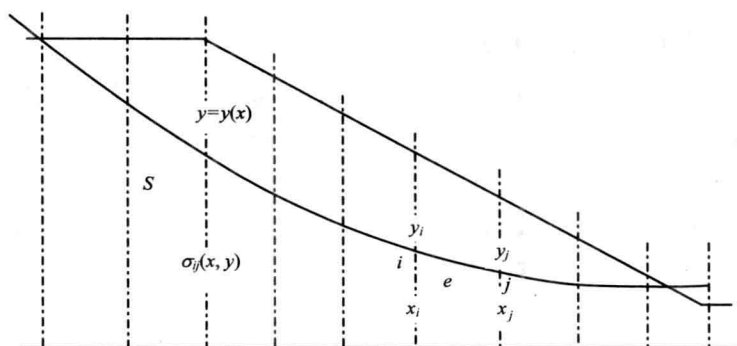


图 1.2 滑动面的离散

1.2.2 安全系数计算

一般情况下，土体的抗剪强度可以用摩尔-库仑 (Mohr-Coulomb) 公式计算，即

$$\tau_f = \sigma_n \tan \phi + c \quad (1.19)$$

此时，土工结构沿曲面(线) l 的滑动稳定安全系数可以写成

$$K = \frac{\int_0^l (\sigma_n \tan \phi + c) dl}{\int_0^l \tau dl} \quad (1.20)$$

式中， σ_n 为曲线上一土体的法向应力； ϕ 为土体的内摩擦角； c 为黏聚力； τ 为沿曲线 l 任意一点的剪应力； τ_f 为抗剪强度。

1. 单元节点应力计算

要计算土工结构沿某一滑动面的安全系数，首先需要已知其应力分布。土工结构的应力分布是作为已知量输入的，本书中不讨论土工结构的应力应变计算问题。

土工结构的应力分布通常由有限元应力应变分析得到。有限元应力应变分析一般给出的是单元高斯积分点的应力。在安全系数计算中，需要用到单元节点的应力值。如果有限元应力计算采用的是四节点等参元，那么可以利用精度较高的高斯积分点的应力值来确定单元节点的应力。

以平面二次等参元为例，若应力应变计算中取的是2阶高斯积分，并且计算结果给出在 2×2 个高斯积分点上的应力值 σ^* 。要得到该单元4个节点的应力值，可以采用双线性插值函数 $\tilde{N}_i$ ，即

$$\sigma = \sum_{i=1}^4 \tilde{N}_i \sigma_i, \quad \tilde{N}_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (1.21)$$

若在 2×2 个高斯积分点上 $\sigma = \sigma^*$ ，则 4 个高斯积分点的坐标(图 1.3)如下：

$$\text{I} \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{II} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{III} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{IV} \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

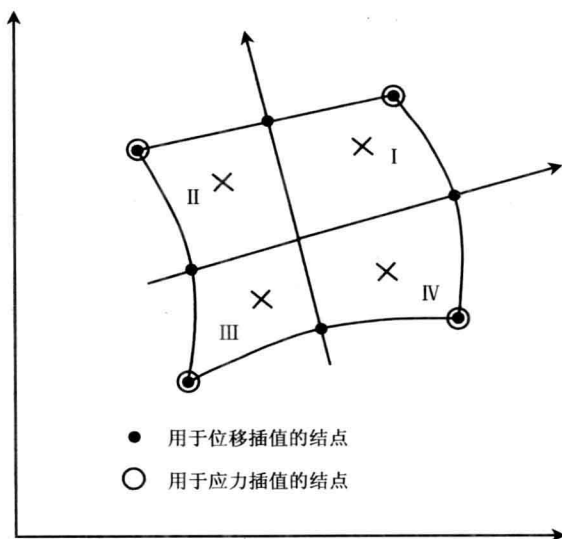


图 1.3 二维等参元

将高斯点坐标代入式(1.21)可得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I^* \\ \sigma_{II}^* \\ \sigma_{III}^* \\ \sigma_{IV}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1(\text{I}) & N_2(\text{I}) & N_3(\text{I}) & N_4(\text{I}) \\ N_1(\text{II}) & N_2(\text{II}) & N_3(\text{II}) & N_4(\text{II}) \\ N_1(\text{III}) & N_2(\text{III}) & N_3(\text{III}) & N_4(\text{III}) \\ N_1(\text{IV}) & N_2(\text{IV}) & N_3(\text{IV}) & N_4(\text{IV}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

式中， σ_I^* ， σ_{II}^* ， σ_{III}^* ， σ_{IV}^* 为有限元计算中已经求出的 4 个高斯点相应的应力分量； σ_1 ， σ_2 ， σ_3 ， σ_4 为节点应力值；转换矩阵由式(1.21)的第二式代入高斯点坐标后的插值函数构成，由式(1.22)求逆可得