高中数学
同步专题分析

（高中二年级）

北京市海淀区教师进修学校数学组
北 京 数 学 会 海 淀 分 会
编

航 空 工 业 出 版 社

高中数学同步专题分析

（高中二年级）

北京市海淀区教师进修学校数学组
北 京 数 学 会 海 淀 分 会 编

航空工业出版社

1993

（京）新登字161号

内容提要

本书是为高一年级和高二年级学生准备的与课堂教学同步的专题分析，每讲内容与中学课本的单元相对应，进度相一致，这样可以深化对基础知识的理解，熟练基本技能，掌握基本方法，如此循序渐进，分析问题、解决问题的能力将有较大的提高，从而为高三数学总复习打下坚实的基础。

本书可作为高一、高二年级学生及高中数学教师的参考书。

高中数学同步专题分析

（高中二年级）

北京市海淀区教师进修学校数学组

北京数学会海淀分会　编

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里14号）

—邮政编码：100029—

全国各地新华书店经售

煤炭工业出版社印刷厂印刷

1993年10月第1版　　1993年10月第1次印刷

开本：787×1092　1/32　　印张：7.125

印数：1—2000　　字数：167千字

ISBN 7-80046-588-8/O·015

定价：5.50元

前　　言

升入高中的学生，都有一个心愿：就是三年后考上大学，特别是升入一个理想的大学．所以高中学生除了课本之外，都愿意再读一些参考书，再做一些参考题，为高考奠定一个良好的基础．目前社会上参考书、复习资料可谓不少，但基本上都是为高三学生准备的，为高一、高二学生准备的参考书并不多见。我们这两册书就是为高中一年级和高中二年级学生准备的．取名《高中数学同步专题分析》，意在与高一、高二的教与学同步进行．读者从每册书的目录中不难发现，每讲内容与中学课本的单元相对应，与教学进度相一致．我们希望读者在学习课本内容的基础上，再学习相应的同步专题，这样可以深化对基础知识的理解，熟练基本技能，较牢固地掌握基本方法．如此循序渐进，分析问题、解决问题的能力将有较大的提高，从而为高三数学总复习打下坚实的基础．

参加本书编写工作的是我区有丰富教学经验的教师，并且都是区中心备课组的成员．书中倾注了他们多年教学的心得、体会．每册书的每一个专题除例题选析之外，还配有适当练习并给出答案．

本书不仅可以作为高一、高二学生的良师益友，也可作为教师备课时的参考书．

本册书的编者

北京二十中	王　敏
北京十一学校	王燕谋
北京石油附中	薛文叙
北京理工附中	韩明武
北京六一中学	褚淑华
首都师大附中	解小立
北京育英学校	张福歧
北医附中	程　旷
北京海淀区教师进修学校	汪惟葆

目　　录

第 1 讲　反三角函数的性质

在学习了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以后，我们又学习了最后一类基本初等函数：反三角函数。通过学习反三角函数，可以进一步加深我们对函数概念、图象和性质的理解。

例1-1　求下列函数的定义域、值域。

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg}x}}$；

（2）$y=\sqrt{\arccos\left(\dfrac{1}{2}-x\right)}$．

分析：解题的基本方法是分析函数的复合过程，把复杂的函数分解成一个个简单的基本初等函数，然后一步步解决。

解：（1）令 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=\sqrt{v}$，$v=\operatorname{arctg}x$。

要使原式有意义，必须且只须$u\neq0$，即$v=\operatorname{arctg}x>0$，满足$\operatorname{arctg}x>0$的$x$的集合是（0，$+\infty$），所以这个函数的定义域是（0，$+\infty$）．

$x>0$时，$v=\operatorname{arctg}x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$u\in\left(0,\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$，

而$y=\dfrac{1}{u}$，可知y的取值范围即函数的值域是$\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}},\right.$

$+\infty\big)$.

（2）要使原式有意义，必须且只须$\arccos\left(\frac{1}{2}-x\right)\geqslant 0$，即$-1\leqslant\frac{1}{2}-x\leqslant 1$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$，所以这个函数的定义域是$\left[-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]$。

当$x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]$时，$-1\leqslant\frac{1}{2}-x\leqslant 1$，所以$\arccos\left(\frac{1}{2}-x\right)\in[0,\ \pi]$，$y=\sqrt{\arccos\left(\frac{1}{2}-x\right)}\in[0,\ \sqrt{\pi}]$。所以这个函数的值域为$[0,\ \sqrt{\pi}]$。

例1-2 求证：

（1）$y=\arcsin x$是奇函数；

（2）$y=\arcsin x$在$[-1,\ 1]$上是增函数。

证明：

（1）设$-1\leqslant x\leqslant 1$，则$-1\leqslant -x\leqslant 1$，$\arcsin(-x)$有意义。

$$\because\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant -\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

根据诱导公式和反正弦函数概念知

$$\sin(-\arcsin x)=-\sin(\arcsin x)=-x,$$

$\therefore\quad -\arcsin x$是$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上正弦值等于$-x$的角，

$\therefore\quad \arcsin(-x)=-\arcsin x$,

$\therefore\quad y=\arcsin x$是奇函数。

（2）设$-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，$y_1=\arcsin x_1$，$y_2=\arcsin x_2$。

则y_1，$y_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$x_1=\sin y_1$，$x_2=\sin y_2$，

$\because$ 正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，

又 $x_1<x_2$，即$\sin y_1<\sin y_2$，

$\therefore\quad y_1<y_2$。

即 $\arcsin x_1<\arcsin x_2$，

$\therefore\quad y=\arcsin x$在$[-1,\ 1]$是增函数。

说明：证明的根据是函数奇偶性、单调性的定义及反三角函数的概念。从定义出发进行推理论证是解决数学问题的基本方法。

想一想：一般地，若$y=f(x)$是$[a,b]$上的单调增（减）函数，其反函数$y=f^{-1}(x)$是否具有相同的单调性？

例1-3 比较大小：

（1）$\arcsin\frac{1}{3}$，$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$，$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$；

（2）$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$，$\frac{\pi}{3}$。

解：（1）首先考虑这三个角的范围：$\arcsin\frac{1}{3}$。$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$是锐角，而$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$是钝角，所以$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$最大。

第二步把不同名的反三角函数值化为同名的反三角函数值，利用反三角函数的单调性来比大小.

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$y=\arcsin x$在$[-1,\ 1]$上是增函数，

$\because\quad -1<\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{6}}{3}<1,$

$\therefore\quad \arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$

即　$\arcsin\frac{1}{3}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}.$

综上所述，有

$$\arcsin\frac{1}{3}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}<\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

（2）$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$是用反三角函数形式表示的角，可以用先求出其某一三角函数值，再讨论角的范围的方法比较大小.

设　$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\alpha,\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\beta,$

则　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7},\ \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$，且$\alpha,\ \beta\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right).$

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4},$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}2\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}2\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}}=1。$$

又∵ $\alpha+2\beta\in\left(0,\ \frac{3}{4}\pi\right)$，

∴ $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}$，

∴ $\mathrm{arctg}\frac{1}{7}+2\mathrm{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{3}$。

例1 4 画下列函数图象：

（1）$y=\sin(\arcsin x)$；

（2）$y=\arccos(\cos x)$。

解：（1）因为$\arcsin x$表示$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上正弦值为$x$的角，所以$y=\sin(\arcsin x)=x$，$x\in[-1,\ 1]$。图象如下。

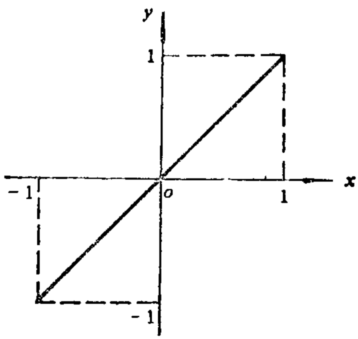

图 1-1

（2） $y=\arccos(\cos x)$定义域为R。

$\because \arccos[\cos(x+2\pi)]=\arccos(\cos x)$对一切$x\in R$成立，

$\therefore y=\arccos(\cos x)$是周期函数，$2\pi$是它的周期，我们可以先作出这个函数在长度为一个周期的闭区间上的图象。

又$\because \arccos[\cos(-x)]=\arccos(\cos x)$对一切$x\in R$成立，

$\therefore y=\arccos(\cos x)$是偶函数，图象关于$y$抽对称，我们可以先作出在半个周期$[0, \pi]$上的图象。

当$x\in[0, \pi]$时

$$y=\arccos(\cos x)=x.$$

再利用奇偶性、周期性可得函数在整个定义域上的图象如下：

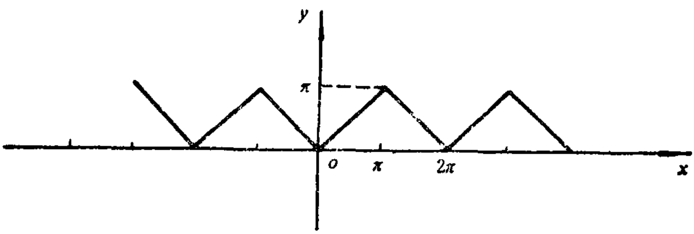

图 1-2

例1-5 求下列函数的反函数：

（1） $y=\arccos\sqrt{x}$；

（2） $y=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

解：（1）$\because$ $\sqrt{x}\geqslant 0$,

$$\therefore \quad \arccos\sqrt{x} \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

两边取余弦：

$$\cos y = \cos(\arccos\sqrt{x}),$$

$$\cos y = \sqrt{x},$$

$$x = \cos^2 y.$$

将字母x，y互换，得$y=\arccos\sqrt{x}$的反函数$y=\cos^2 x$，

$x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

说明：反函数的定义域是原函数的值域，求反函数时，应先求出原函数的值域.

（2）$\because \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$,

$$\therefore \quad -\frac{3\pi}{2} \leqslant -x \leqslant -\frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

又$\because \quad \sin(\pi - x) = \sin x$,

$$\therefore \quad y = \sin(\pi - x),\ \pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right].$$

两边取反正弦：

$$\arcsin y = \arcsin[\sin(\pi - x)],$$

$$\arcsin y = \pi - x,$$

$$\therefore \quad x = \pi - \arcsin y.$$

将字母x、y互换，得$y=\sin x$，$x \in \left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right]$的反函数$y = \pi - \arcsin x$，$x \in [-1,\ 1]$.

想一想：如何求$y=\sin x$，$x\in\left[\frac{3}{2}\pi，\frac{5}{2}\pi\right]$的反函数？一般地，$y=\sin x$，$x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$，$k\in Z$的反函数是什么？

例1-6 求出下列各式里的x：

（1）$\operatorname{arc\,tg} 2x+\operatorname{arc\,tg} 3x=\frac{3}{4}\pi$；

（2）$\arcsin(1-x)+\arcsin(1-x^2)<0$。

解：（1）$\operatorname{arc\,tg} 2x+\operatorname{arc\,tg} 3x=\frac{3}{4}\pi$，

两边取正切：

$$\frac{2x+3x}{1-2x\cdot 3x}=-1，解得x_1=-\frac{1}{6}，x_2=1。$$

当$x=-\frac{1}{6}$时：

$$\operatorname{arc\,tg} 2x<0，\operatorname{arc\,tg} 3x<0，而\frac{3}{4}\pi>0，$$

显然左式$\neq$右式，$\therefore x=-\frac{1}{6}$是增根。

$x=1$时：

$\operatorname{arc\,tg} 2x$，$\operatorname{arc\,tg} 3x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\operatorname{arc\,tg} 2x+\operatorname{arc\,tg} 3x$与$\frac{3}{4}\pi$在正切函数的同一单调区间内，且函数值相等，所以左式=右式，$x=1$是原方程的根。

分析：解题过程中，为什么产生了增根？

我们知道，若$\alpha=\beta$，则$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$，但$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$时，两个角$\alpha$、$\beta$不一定相等。$\beta=k\pi+\alpha$，$k\in Z$。两角相等是其同名三角函数值相等的充分不必要条件。解题过程中，由于两边取同名三角函数，未知数的取值范围扩大，所以产生了增根。一般地，根据反三角函数的值域，可以把增根找出来

（2）$\arcsin(1-x)<-\arcsin(1-x^2)$，

即 $\arcsin(1-x)<\arcsin(x^2-1)$。

要使原式有意义，必须$|1-x|\leqslant 1$，且$|x^2-1|\leqslant 1$。

又∵ $y=\arcsin x$在$[-1,1]$上是增函数，

∴ $1-x<x^2-1$。

解不等式组：

$$\begin{cases}|1-x|\leqslant 1; \\ |x^2-1|\leqslant 1; \\ 1-x<x^2-1.\end{cases}$$

得$x\in(1,\sqrt{2}]$。

总结：

符号$\arcsin x$的意义：当x为一个确定的值时，它表示$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上正弦值为$x$的一个角；当$x$为$[-1,1]$上的变量时，它是$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数。

习　题

1．说出下列等式成立的条件：

（1）$\sin(\arcsin x)=x$；

（2）$\arccos(\cos x)=x$；

（3）$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x$；

（4）$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x$。

2．求下列函数的定义域、值域：

（1）$y=\arcsin\sqrt{x-3}$；

（2）$y=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x}$；

（3）$y=\arcsin(x^2+x)$。

3．求 $y=\arcsin\frac{1}{x}$ 的单调区间。

4．比较大小：

（1）$\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$，$\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$；

（2）$\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\operatorname{arctg}2$，$\frac{3}{4}\pi$。

5．求下列函数的反函数：

（1）$y=\pi+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$；

（2）$y=\frac{3}{5}+2\arccos\sqrt{x}$。

6．求满足下列条件的x值：

（1）$\arccos x-\arcsin x=\frac{\pi}{6}$；

（2）$\arccos\frac{x^2-4x-4}{x^2+1}<\frac{\pi}{3}$。

答案

1．（1）$|x|\leqslant 1$；（2）$x\in[0,\pi]$；（3）$x\in R$；

（4）$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

2．（1）$x\in[3,4]$，$y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$， （2）$x\geqslant 1$或 $x\leqslant -1$，$y\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$；

（3）$x\in\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$，

$y\in\left[\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right),\ \frac{\pi}{2}\right]$。

3. $y=\arcsin\frac{1}{x}$的单调减区间是$(-\infty,\ -1]$和$[1,\ +\infty)$。

4. （1）$\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)>\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$；

（2）$\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\operatorname{arctg}2<\frac{3}{4}\pi$.

5. （1）$y=2\operatorname{tg}x$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$；

（2）$y=\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{10}\right)$，$x\in\left[\frac{3}{5},\ \frac{3}{5}+\pi\right]$。

6. （1）$x=\frac{1}{2}$；

（2）$x\in\left(-\frac{5}{4},\ -1\right)\cup(9,\ +\infty)$。