21世纪高等教育规划教材

离散数学

邹晓红　彭思维　王金生　编著

（下册）

中国农业科学技术出版社

21世纪高等教育规划教材

离 散 数 学

(下册)

邹晓红 彭思维 王金生 编著
郭希娟 主审

中国农业科学技术出版社

前　言

本书是学习离散数学课程的学习指导书，内容安排上基本按照《离散数学》(上册)的内容体系，以方便读者查阅学习。

离散数学是计算机专业的一门重要基础课，它包括集合论、图论、代数系统、数理逻辑等内容。具有很强的抽象性，教学过程中学生普遍反映难学。为配合课堂教学及有利于学生自学，编写了这本学习指导书，期望它能对学生学好这门课程有所帮助。

为指导学生学习，本书按章给出了内容提要、习题与解等内容。其中内容提要给出了本章的主要内容。习题与解则给出了大量的习题及求解过程，习题的涉及面较广，将有助于学生对内容的全面理解和掌握。为检测学习情况，书中编有自测题及答案，以便学生对自已的学习情况进行检测。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不免有错误和疏漏存在，敬请读者批评指正。

编　者

2009 年 12 月

目　　录

第一篇　集合论

第二篇　图　论

第三篇　代数系统

第四篇　数理逻辑

第一篇　集合论

第一章　集　合

一、内容提要

1. **集合的概念**

集合：集合是一个不能精确定义的基本概念，一般地，把具有某种属性的一些对象汇集成一个整体，就形成一个集合。

元素：组成集合的对象称作元素。若元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$，否则记作 $a\notin A$。

子集：设 A,B 是集合，如果对任意的 $x\in A$，都有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，也称 A 包含于 B，记作 $A\subseteq B$。

真子集：设 A,B 是集合，若 $A\subseteq B$，并且 B 中至少存在一个元素 x，$x\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 。

外延性原理：设 A,B 是集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$，否则记为 $A\neq B$。

空集：不含有任何元素的集合称作空集，记作 Φ。

全集：在一定范围内，如果所有集合都为某一集合的子集，则称该集合为全集，记作 E。

幂集：设 A 是集合，由 A 的所有子集构成的集合称作 A 的幂集，记作 $\rho(A)$，即

$$\rho(A)=\{x \mid x\subseteq A\}。$$

定理 1.1.1：对于任一集合 A，都有 $\Phi\subseteq A$ 。

定理 1.1.2：设 A 是有限集合，且 $|A|=n$ ，则其幂集 $|\rho(A)|=2^n$。

2. **集合的运算**

集合的交：设 A,B 是集合，由所有属于 A 并且属于 B 的共同元素组成的集合，称作 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}。$$

集合的并：设 A,B 是集合，由 A 和 B 中的所有元素组成的集合，称作 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}。$$

集合的相对补：设 A, B 是集合，由所有属于 A，但不属于 B 的元素组成的集合，称作 A 的相对补集，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}。$$

集合的绝对补：设 A 为集合，E 为全集，称 $E-A$ 为 A 的绝对补集，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x \mid x \notin A\}。$$

集合的对称差：设 A,B 是集合，由所有属于 A 或 B，但不同时属于 A 和 B 的元素组成的集合，称作 A 和 B 的对称差，记作 $A \oplus B$，即

$$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)。$$

定理 1.2.1：设 A,B 是有限集合，则 $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$。

3. 序偶与笛卡尔积

序偶：两个具有固定次序的客体组成的集合，称作序偶，记作(x,y)。

笛卡尔积：设 A,B 是集合，若序偶的第一元素是 A 的元素，第二元素是 B 的元素，所有这样序偶的集合，称作 A 和 B 的笛卡尔积，记作 $A \times B$，即

$$A \times B=\{(x,y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}。$$

定理 1.3.1：设 A,B,C 是集合，则有

(1) $A \times (B \cap C)=(A \times B) \cap (A \times C)$；

(2) $A \times (B \cup C)=(A \times B) \cup (A \times C)$；

(3) $(B \cap C) \times A=(B \times A) \cap (C \times A)$；

(4) $(B \cup C) \times A=(B \times A) \cup (C \times A)$。

定理 1.3.2：若 $C \neq \Phi$，则 $A \subseteq B$ 的充要条件是 $A \times C \subseteq B \times C$ 或 $C \times A \subseteq C \times B$。

定理 1.3.3：设 A,B,C,D 是非空集合，则 $A \subseteq C, B \subseteq D$ 的充要条件是 $A \times B \subseteq C \times D$。

二、习题与解

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 1 至 100 的整数中的完全平方数的集合；

(2) 大于 3 而小于等于 7 的整数集合；

(3) 12 的质因数集合；

(4) 全体偶数的集合。

解：(1) $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$

(2) $\{4,5,6,7\}$

(3) $\{2,3\}$

(4) $\{\cdots,-2,0,2,\cdots\}$

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 被 5 除余 1 的整数集合；

(2) 平面直角坐标系中单位圆内(不包括单位圆周)的点集；

(3) 使 $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合。

解：(1) $\{5x+1 \mid x\in I\}$

(2) $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$

(3) $\{x \mid x\in R$ 且 $x^2+x-6\neq 0\}$

3. 判定下列各题的正确与错误：

(1) $\{a\}\in\{a,b,c\}$；

(2) $\{a\}\subseteq\{a,b,c\}$；

(3) $\Phi\in\{a,b,c\}$；

(4) $\Phi\subseteq\{a,b,c\}$；

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a,b\}\}$；

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$；

(9) $\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(10) $\{a,b,c\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$。

解：(1) 错误 (2) 正确 (3) 错误 (4) 正确 (5) 正确

(6) 错误 (7) 正确 (8) 正确 (9) 正确 (10) 正确

4. 对于任意集合 A、B、C，确定下列各命题是否正确：

(1) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

(2) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(3) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\in C$；

(4) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\subseteq C$；

(5) 如果 $A\in B$ 及 $B\nsubseteq C$，则 $A\notin C$；

(6) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\notin C$。

解：(1) 正确。

(2) 错误，例如：$A=\{a\}$，$B=\{\{a\},b\}$，$C=\{\{a\},b,d\}$，有 $A\in B$，$B\subseteq C$，但 $A\nsubseteq C$。

(3) 错误，例如：$A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{\{a,b\},a\}$，有 $A\subseteq B$，$B\in C$，但 $A\notin C$。

(4) 错误，例如：$A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{\{a,b\},d\}$，有 $A\subseteq B$，$B\in C$，但 $A\nsubseteq C$。

(5) 错误，例如：$A=\{a\}$，$B=\{\{a\},b\}$，$C=\{\{a\},d\}$，有 $A\in B$，$B\nsubseteq C$，但 $A\in C$。

(6) 错误，例如：$A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{\{a\},\{a,b\}\}$，有 $A\subseteq B$，$B\in C$，但 $A\in C$。

5. 写出$\{a,b,c\}$的全部子集和真子集，并求幂集。

解：令 $=\{a,b,c\}$，$\rho(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ 。$\rho(A)$中的元素就是 A 的全部子集，其中除 A 本身之外，都是 A 的真子集。

6. 求下列集合的幂集：

(1) $\{a,\{a\}\}$；

(2) $\{\Phi,a,\{a\}\}$。

解：(1) 令 $A=\{a,\{a\}\}$，$\rho(A)=\{\Phi,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$

(2) 令 $B=\{\Phi,a,\{a\}\}$，$\rho(B)=\{\Phi,\{\Phi\},\{a\},\{\{a\}\},\{\Phi,a\},\{\Phi,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\Phi,a,\{a\}\}\}$

7. 设某集合有 40 个元素，试问：

(1) 可构成多少个子集？

(2) 其中有多少个子集的基数为奇数？

(3) 是否有含有 41 个元素的子集。

解：(1) 可构成 2^{40}个子集；

(2) 有 $2^{40}/2=2^{39}$个子集的基数为奇数；

(3) 不可能有 41 个元素的子集。

8. 设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$试求下列集合：

(1) $A\cap B$；

(2) $A\cup B$；

(3) $A\cap B\cap C$；

(4) $A\cap\overline{B}$；

(5) $\overline{A}\cup\overline{B}$；

(6) $(A\cap B)\cup\overline{C}$；

(7) $\overline{(A\cap B)}$；

(8) $A\cup\overline{B}\cup C$；

(9) $\rho(A)\cap\rho(B)$；

(10) $\rho(A)-\rho(B)$。

解：(1) $A\cap B=\{1\}$

(2) $A\cup B=\{1,2,4,5\}$

(3) $A\cap B\cap C=\Phi$

(4) $A\cap\overline{B}=\{4\}$

(5) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,3,4,5\}$

(6) $(A\cap B)\cup\overline{C}=\{1,3,5\}$

(7) $\overline{(A\cap B)}=\{2,3,4,5\}$

(8) $A\cup\overline{B}\cup C=\{1,2,3,4\}$

(9) $\rho(A)\cap\rho(B)=\{\Phi,\{1\}\}$

(10) $\rho(A)-\rho(B)=\{\{4\},\{1,4\}\}$

9. 判定下列命题哪些是恒成立？恒不成立？还是有时成立？可用文氏图来确定。

(1) 若 $a\in A-B$,则 $a\in A-(A\cap B)$；

(2) 若 $A\neq B$,则 $A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}$；

(3) $(A-B)\cup B=A\cup B$；

(4) $(A-B)\cup(A-C)=A$；

(5) $(A-B)\cap(A-C)=\Phi$。

解：(1) 恒成立。若 $a\in A-B$,则 $a\in A,a\notin B$。由 $a\notin B$,有 $a\notin A\cap B$,所以 $a\in A-(A\cap B)$

(2) 恒不成立。由 $A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}$,必有 $A=B$

(3) 恒成立。$(A-B)\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)\cap E=A\cup B$

(4) 有时成立。$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=A-(B\cap C)=A$,所以只要 $A\cap B\cap C=\Phi$,等式成立。

(5) 有时成立。当 $A\subseteq B\cup C$ 时,成立。

10. A,B 为任意两个集合,求证：

$$A-(A\cap B)=A-B$$

证明：$A-(A\cap B)$

$=A\cap\overline{(A\cap B)}$

$=A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$

$=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})$

$=\Phi\cup(A-B)$

$=A-B$

11. 设 A,B,C 是三个任意集合,求证：

(1) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$。

证明:(1) $(A\cup B)-C$

$=(A\cup B)\cap\overline{C}$

$=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})$

$=(A-C)\cup(B-C)$

(2) $A-(B-C)$

$=A\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=A\cap(\overline{B}\cup C)$

$=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)$

$=(A-B)\cup(A\cap C)$

12. 证明$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap(B\cup\overline{C}))$ 的补集是$(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$。

证明：$\overline{((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap(B\cup\overline{C})))}$

$=\overline{(A\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap(B\cup\overline{C}))}$

$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{(B\cup\overline{C})})$

$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup(\overline{B}\cap C))$

$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$

13. 证明下列等式：

(1) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)=(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(B\cap C)$；

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$。

证明：(1) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)$

$=((A\cup B)\cap\overline{A})\cup((A\cup B)\cap C)$

$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$=(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(B\cap C)$

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$

14. 设有集合 A、B：

(1) 若 $A-B=B$,则 A 与 B 有什么关系？

(2) 若 $A-B=B-A$,则 A 与 B 有什么关系？

解：(1) 若 $A-B=B$,则 $B=B\cap B=(A-B)\cap B=A\cap\overline{B}\cap B=A\cap\Phi=\Phi$,又 $\Phi=B=A-B=A\cap\overline{B}=A\cap E=A$,所以有 $A=B=\Phi$。

(2) 若 $A-B=B-A$,则 $B\cup(B-A)=B\cup(A-B)$,有 $B=B\cup A$,同理 $A\cup(B-A)=A\cup(A-B)$,有 $A=B\cup A$,所以有 $A=B$。

15. 在城镇居民身份调查中,假设在 15 名居民中,有 12 名是工人,有 5 名是干部,其中有 3 名具有双重身份,即编制是工人,做干部工作(以工代干人员),试问既不是工人又不是干部的非在职人员几人？

解：设 $A_1=\{工人\}$,$A_2=\{干部\}$,则按题意有：

$|A_1|=12$,$|A_2|=5$,$|A_1\cap A_2|=3$,$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=14$,所以既不是工人又不是干部的人共 $15-14=1$。

16. 某校足球队有球衣 38 件,蓝球队有球衣 15 件,棒球队有球衣 20 件,三个队队员的总数是 58 人,其中有三人同时参加三个队,试求同时参加两个队的队员共有几人？

解：设 $A_1=\{足球队员\}$,$A_2=\{蓝球队员\}$,$A_3=\{棒球队员\}$,则按题意有：

$|A_1|=38$,$|A_2|=15$,$|A_3|=20$,$|A_1\cup A_2\cup A_3|=58$,$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$,由包含排斥原理：

$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$

即 $58=38+15+20-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_3|+3$

所以 $|A_1\cap A_2|+|A_2+A_3|+|A_1\cap A_3|=18$

参加二个队的队员共 18 人。

17. (1) 在一个班级的 50 个学生中，有 26 人在第一次考试中得到 A，21 人在第二次考试中得到 A，假如有 17 人两次考试都没有得到 A，问有多少学生两次考试中都得到 A？

(2) 在这些学生中，如果第一次考试中得到 A 的学生人数等于第二次考试中得到 A 的人数，如果仅仅在一次考试中得到 A 的学生总数是 40，并且有 4 个学生两次考试都没有得到 A，问有多少学生仅在第一次考试中取得 A？问有多少学生仅在第二次考试中取得 A？又问有多少学生在两次考试中都得 A？

解：设 $A_1=\{$第一次考试得到 A 的学生$\}$，$A_2=\{$第二次考试得到 A 的学生$\}$，

(1) 按题意有，$|A_1|=26$，$|A_2|=21$，$|A_1\cup A_2|=50-17=33$，由包含排斥原理，

$|A_1\cap A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cup A_2|=26+21-33=14$，

所以两次考试都得到 A 的人数共 14 人。

(2) $|A_1|=|A_2|$，$|A_1\cup A_2|=50-4=46$。

又 $|A_1\cup A_2|=|A_1\cap\overline{A_2}|+|A_2\cap\overline{A_1}|+|A_1\cap A_2|$，$|A_1\cap\overline{A_2}|+|A_2\cap\overline{A_1}|=40$，故 $|A_1\cap A_2|=46-40=6$，$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$，

得到 $2|A_1|=46+6=52$，即 $|A_1|=|A_2|=26$。

所以在第一次(或第二次)考试中有 26 人得到 A，在两次考试中都得到 A 的有 6 人。

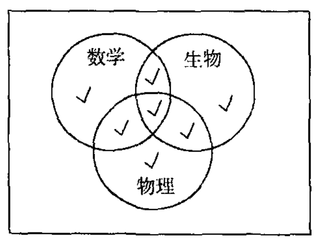
18. 对 200 名大学一年级的学生进行调查的结果是：其中 67 人学数学，47 人学物理，95 人学生物，26 人既学数学又学生物，28 人既学数学又学物理，27 人既学物理又学生物，50 人这三门课都不学。

(1) 求出对这三门课都学的学生人数；

(2) 在文氏图中以正确的学生人数填入其中 8 个区域。

解：(1) 设 $|A_1|=\{$学习数学的学生$\}$，$|A_2|=\{$学习物理的学生$\}$，$|A_3|=\{$学习生物的学生$\}$，由题设有，

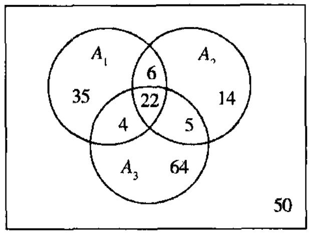
$|A_1|=67$，$|A_2|=47$，$|A_3|=95$，$|A_1\cap A_3|=26$，$|A_1\cap A_2|=28$，$|A_2\cap A_3|=27$，$|A_1\cup A_2\cup A_3|=200-50=150$，由包含排斥原理，



$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$，故 $|A_1\cap A_2\cap A_3|=150-67-47-95+26+28+27=22$，

所以对这三门课都学的学生共 22 人。

(2)



19. 设 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2\}$,试确定下面的集合:

(1) $A\times\{1\}\times B$;

(2) $A^2\times B$;

(3) $(B\times A)^2$;

(4) $(A\times B)\cap(B\times A)$。

解:(1) $A\times\{1\}\times B=\{(0,1,1),(0,1,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$

(2) $A^2\times B=\{(0,0,1),(0,0,2),(0,1,1),(0,1,2),(1,0,1),(1,0,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$

(3) $(B\times A)^2=\{((1,0),(1,0)),((1,0),(1,1)),((1,0),(2,0)),((1,0),(2,1)),((1,1),(1,0)),((1,1),(1,1)),((1,1),(2,0)),((1,1),(2,1)),((2,0),(1,0)),((2,0),(1,1)),((2,0),(2,0)),((2,0),(2,1)),((2,1),(1,0)),((2,1),(1,1)),((2,1),(2,0)),((2,1),(2,1))\}$

(4) $(A\times B)\cap(B\times A)=\Phi$

20. 设 $A=\{a,b\}$,构成集合 $\rho(A)\times A$

解:$\rho(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,所以

$\rho(A)\times A=\{(\Phi,a),(\Phi,b),(\{a\},a),(\{a\},b),(\{b\},a),(\{b\},b),(\{a,b\},a),(\{a,b\},b)\}$

21. 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{\alpha,\beta\}$,试求 $A\times(B\cap C)$ 和 $(A\times B)\cap(A\times C)$,并验证 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ 成立。

解:$A\times(B\cap C)=A\times\Phi=\Phi$

$(A\times B)\cap(A\times C)=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}\cap\{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta)\}=\Phi$

22. 证明:若 $A\times A=B\times B$,则 $A=B$。

证明:(1) 若 $A=\Phi$,则 $\Phi=A\times A=B\times B$,所以 $B=\Phi$。

(2) 若 $B=\Phi$,同理有 $A=B=\Phi$。

(3) 若 $A\neq\Phi$, $B\neq\Phi$,由 $A\times A=B\times B$,有 $A\times A\subseteq B\times B$,且 $B\times B\subseteq A\times A$,由定理 1.3.3,故 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,所以 $A=B$。

23. 证明:若 $A\times B=A\times C$,且 $A\neq\Phi$,则 $B=C$。

证明：(1)　若 $B=\Phi$，则 $\Phi=A\times B=A\times C$，而 $A\neq\Phi$，所以 $C=\Phi$，即 $B=C$。

(2)　若 $C=\Phi$，同理 $B=C=\Phi$。

(3)　若 $B\neq\Phi$，$C\neq\Phi$，由 $A\times B=A\times C$，有 $A\times B\subseteq A\times C$ 且 $A\times C\subseteq A\times B$，由定理 1.3.3，故 $B\subseteq C$ 且 $C\subseteq B$，所以 $B=C$。

24. 设 A、B、C、D 是任意集合，证明 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

证明：对任意的 $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，有 $x\in A\cap B$，$y\in C\cap D$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，$y\in C$ 且 $y\in D$，故 $x\in A$，$y\in C$ 且 $x\in B$，$y\in D$，有 $(x,y)\in A\times C$ 且 $(x,y)\in B\times D$，$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，所以 $(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$。

对任意的 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，有 $(x,y)\in A\times C$，且 $(x,y)\in B\times D$，故 $x\in A$，$y\in C$ 且 $x\in B$，$y\in D$，即 $x\in A\cap B$ 且 $y\in C\cap D$，有 $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，因此 $(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$。

所以 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

25. 给定正整数集合 I_+ 的下列子集：

$A=\{n|n<12\}$，$B=\{n|n\leqslant 8\}$

$C=\{n|n=2k,k\in I_+\}$，$D=\{n|n=3k,k\in I_+\}$

$F=\{n|n=2k-1,k\in I_+\}$

试用 A,B,C,D 和 F 表达下列集合：

(1)　$\{2,4,6,8\}$；

(2)　$\{3,6,9\}$；

(3)　$\{10\}$；

(4)　$\{n|n$ 是偶数，$n>10\}$；

(5)　$\{n|n$ 是偶数且 $n\leqslant 10$，或 n 是奇数，且 $n\geqslant 9\}$。

解：(1)　$\{2,4,6,8\}=B-F$

(2)　$\{3,6,9\}=A\cap D$

(3)　$\{10\}=(A-B)-F$

(4)　$\{n|n$ 是偶数，$n>10\}=C-A$

(5)　$\{n|n$ 是偶数且 $n\leqslant 10$，或 n 是奇数且 $n\geqslant 9\}=(A\cap C)\cup(F-B)$。

26. 给定下列自然数集的子集：

$A=\{1,2,7,8\}$；

$B=\{i|\ i^2<50\}$；

$C=\{i|3$ 整除 $i,0\leqslant i\leqslant 30\}$；

$D=\{i|i=2^k,k\in I_+,1\leqslant k\leqslant 6\}$。

求下列集合：

(1)　$A\cup(B\cup(C\cup D))$；

(2)　$A\cap(B\cap(C\cap D))$；

(3)　$B-(A\cup C)$；

(4)　$(\overline{A}\cap B)\cup D$。

解：$A=\{1,2,7,8\}$

$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$C=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

$D=\{2,4,8,16,32,64\}$

则(1)　$A\cup(B\cup(C\cup D))$

$=A\cup B\cup C\cup D$

$=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$

(2)　$A\cap(B\cap(C\cap D))=A\cap B\cap C\cap D=\Phi$

(3)　$A\cup C=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

$B-(A\cup C)=\{4,5\}$

(4)　$\overline{A}\cap B=B-A=\{0,3,4,5,6\}$

$(\overline{A}\cap B)\cup D=\{0,2,3,4,5,6,8,16,32,64\}$

27. 证明:对任意集合 A 和 B,$\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$。

证明：对任意 $x\in\rho(A)\cap\rho(B)$,则 $x\in\rho(A)$且 $x\in\rho(B)$,即有 $x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$,故 $x\subseteq A\cap B$,有 $x\in\rho(A\cap B)$,所以

$$\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$$

对任意 $x\in\rho(A\cap B)$,则 $x\subseteq A\cap B$,有 $x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$,即 $x\in\rho(A)$且 $x\in\rho(B)$,故 $x\in\rho(A)\cap\rho(B)$所以

$$\rho(A\cap B)\subseteq\rho(A)\cap\rho(B)。$$

综上可得：$\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$。

28. 设 A,B 是集合,证明:$\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$,并给出等号成立的充分必要条件。

证明：对任意的 $x\in\rho(A)\cup\rho(B)$,则 $x\in\rho(A)$或者 $x\in\rho(B)$。

若 $x\in\rho(A)$,则 $x\subseteq A$,而 $A\subseteq A\cup B$,于是 $x\subseteq A\cup B$,故 $x\in\rho(A\cup B)$。

同理可证,若 $x\in\rho(B)$,则有 $x\in\rho(A\cup B)$。

因此 $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$。

要使等号成立,应有 $\rho(A\cup B)\subseteq\rho(A)\cup\rho(B)$ 。即对任意 $x\in\rho(A\cup B)$,应有 $x\in\rho(A)\cup\rho(B)$,于是由 $x\subseteq A\cup B$,能推出 $x\subseteq A$ 或 $x\subseteq B$,则有 $A\subseteq B$ 或 $A\subseteq B$。

反之,当 $B\subseteq A$ 或 $A\subseteq B$ 时,必有 $\rho(A\cup B)\subseteq\rho(A)\cup\rho(B)$ 。

因此,要使 $\rho(A)\cup\rho(B)=\rho(A\cup B)$成立的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$ 。

29. 设 $x\in B,y\in B$,证明$\{\{x\},\{x,y\}\}\in\rho(\rho(B))$ 。

证明：由 $x,y\in B$,得$\{x\}\in\rho(B)$,$\{x,y\}\in\rho(B)$,故$\{\{x\},\{x,y\}\}\subseteq\rho(B)$,所以$\{\{x\},$

$\{x,y\}\} \in \rho(\rho(B))$。

30. 设 S 是任意集合，证明：$\{\Phi,\{\Phi\}\} \in \rho\rho\rho(S)$ 。

证明：因为 $\Phi \subseteq S$，所以 $\Phi \in \rho(S)$，$\{\Phi\} \subseteq \rho(S)$，$\{\Phi\} \in \rho\rho(S)$。又因为 $\Phi \subseteq \rho(S)$ ，故 $\Phi \in \rho\rho(S)$，所以 $\{\Phi,\{\Phi\}\} \subseteq \rho\rho(S)$ ，即 $\{\Phi,\{\Phi\}\} \in \rho\rho\rho(S)$ 。

31. 设 A,B 是任意集合，若 $\rho(A)=\rho(B)$，则 $A=B$。

证明：对任意 $x \in A$，则 $\{x\} \subseteq A$，有 $\{x\} \in \rho(A)$，由 $\rho(A)=\rho(B)$，故 $\{x\} \in \rho(B)$，即 $\{x\} \subseteq B$，得到 $x \in B$，所以 $A \subseteq B$。

同理可证 $B \subseteq A$，因此 $A=B$。

32. 设 $A=\{a\}$，判定下列各题正确与错误：

(1) $\Phi \in \rho\rho(A)$；

(2) $\Phi \subseteq \rho\rho(A)$；

(3) $\{\Phi\} \subseteq \rho\rho(A)$；

(4) $\{\Phi\} \in \rho\rho(A)$；

(5) $\{a\} \in \rho\rho(A)$；

(6) $\{a\} \subseteq \rho\rho(A)$。

解：(1) 正确。因为 $\Phi \subseteq \rho(A)$，故有 $\Phi \in \rho\rho(A)$。

(2) 正确。空集 Φ 是所有集合的子集。

(3) 正确。因为 $\Phi \in \rho\rho(A)$，故有 $\{\Phi\} \subseteq \rho\rho(A)$。

(4) 正确。因为 $\Phi \in \rho(A)$，故有 $\{\Phi\} \in \rho\rho(A)$。

(5) 错误。因为 $\rho(A)=\{\Phi,\{a\}\}$，$\rho\rho(A)=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\}$。

(6) 错误。

33. 试求在 1 到 10000 之间不能被 4,5 或 6 整除的整数的个数。

解：设 A_i 是 1 到 10000 之间能被 i 整除的整数的集合，则有：

$|A_4|=2500$，$|A_5|=2000$，$|A_6|=1666$，

$|A_4 \cap A_5|=500$，$|A_4 \cap A_6|=833$，

$|A_5 \cap A_6|=333$，$|A_4 \cap A_5 \cap A_6|=166$，

根据包含排斥原理，有：

$|A_4 \cup A_5 \cup A_6|=|A_4|+|A_5|+|A_6|-|A_4 \cap A_5|-|A_5 \cap A_6|-|A_4 \cap A_6|+|A_4 \cap A_5 \cap A_6|=2500+2000+1666-500-833-333+166=4664$，

所以满足题意的整数个数为：$10000-4664=5334$。

34. 设有集合 $\{1,2,\cdots,n\}$，其不重复的一个排列，

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

满足条件 $a_i \neq i (i=1,2,\cdots,n)$，则称该排列为一个错列。求证集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的错列个数 D_n 为

$$D_n = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) n!$$

证明：设 S 是$\{1,2,\cdots,n\}$的所有不重复排列的集合，则$|S|=n!$。

设有一个排列，如果 j 在第 j 个位置上，称该排列是具有性质 P_j，设 A_j 是具有性质 P_j 的排列的集合，故 $A_j \subseteq S$。

对于$\{1,2,\cdots,n\}$中的任意一个错列，当且仅当这个错列不具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 中的任意一个性质。所以全部错列组成的集合为：

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$

在集合 A_1 中，所有排列具有形式 $1,i_2,i_3,\cdots,i_n$，其中：$i_2,i_3,\cdots,i_n$ 是集合$\{2,3,\cdots,n\}$的一个不重复的排列。因而有$|A_1|=(n-1)!$。

同理当 $1 \leqslant j \leqslant n$，有$|A_j|=(n-1)!$。

在集合 $A_1 \cap A_2$ 中的排列具有形式 $1,2,i_3,\cdots,i_n$，其中：$i_3,i_4,\cdots,i_n$是$\{3,4,\cdots,n\}$的一个不重复的排列。所以有$|A_1 \cap A_2|=(n-2)!$

同理当 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，有$|A_i \cap A_j|=(n-2)!$

一般地，对 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

集合$\{1,2,3,\cdots,n\}$的 k 一组合数是 C_n^k，故由包含排斥原理：

$$\begin{aligned}
D_n &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| \\
&= |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \cdots + (-1)^k C_n^k (n-k)! + \cdots + (-1)^n C_n^n 0! \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\
&= (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}) n!
\end{aligned}$$

35. 设由某项调查，发现学生阅杂志的情况如下：

百分之六十阅读甲类杂志；

百分之五十阅读乙类杂志；

百分之五十阅读丙类杂志；

百分之三十阅读甲类杂志与乙类杂志；

百分之三十阅读甲类杂志与丙类杂志；

百分之三十阅读乙类杂志与丙类杂志；

百分之十阅读三类杂志。

试求：(1)　确定阅读两类杂志的学生的百分比；

(2)　不读任何杂志的学生的百分比。