陈 仲/编著

高等数学
竞赛题解析教程

东南大学出版社

高等数学竞赛题解析教程

陈 仲 编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 简 介

本书根据江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会制订的高等数学竞赛大纲和教育部制订的考研数学考试大纲编写，内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题，每个专题含“基本概念与内容提要”、“竞赛题与精选题解析”与“练习题”三个部分。其中竞赛题选自江苏省普通高等学校非理科专业历届高等数学竞赛试题、南京大学等高校历年大学数学竞赛试题、莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题。

高等数学竞赛能激发大学生们学习高等数学的兴趣，活跃思维。高等数学竞赛试题中既含基本题，又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题，这些题目构思绝妙，方法灵活，技巧性强，本书逐条进行解析，并对重要题目深入分析，总结解题方法与技巧。

本书可供准备数学竞赛的老师和学生作为应试教程，也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书，特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛题解析教程/陈仲编著. —南京：东南大学出版社，2009.11

ISBN 978-7-5641-1942-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 210164 号

出版发行：东南大学出版社
社　　址：南京四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人：江　汉
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：溧阳晨明印刷有限公司
开　　本：700mm×1000mm　1/16
印　　张：21
字　　数：412 千字
版　　次：2010 年 1 月第 1 版
印　　次：2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5641-1942-3
定　　价：32.00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与读者服务部联系。电话(传真)：025-83792328

前　言

高等数学(或称大学数学)是所有普通高等学校一年级大学生通修的基础课程,江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会从1991年以来,每两年组织一届全省性的高校非理科专业高等数学竞赛(仅第一届和第二届间隔了三年),参赛学校有东南大学、南京航空航天大学、南京理工大学、河海大学、南京邮电大学、南京工业大学、解放军理工大学、南京农业大学、南京林业大学、南京财经大学、南京审计学院、南京工程学院、扬州大学、苏州大学、江苏大学、江南大学、中国矿业大学、南通大学、三江学院、晓庄学院,各重点高校的二级学院、各类职业技术学院、技术师范学院,各地方工学院、职业大学、高等专科学院等共72所,参赛考生在2008年达到5800多人。参赛类别分为本科一级、本科二级、本科三级、民办本科、专科等五类。南京大学不参加全省的上述高等数学竞赛,校教务处曾组织过多次全校性的大学数学竞赛。

高等数学竞赛的宗旨是贯彻教育部关于本科要注重素质教育的指示,加强普通高校的数学教学工作,推动高等数学的教学改革,提高教学质量。高等数学竞赛能激发大学生们学习高等数学的兴趣,活跃思维,它要求学生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,并具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书根据江苏省普通高等学校非理科专业高等数学竞赛委员会制订的高等数学竞赛大纲和教育部制订的考研数学考试大纲编写,内容分为极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、空间解析几何、级数、微分方程等八个专题,每个专题含"基本概念与内容提要"、"竞赛题与精选题解析"与"练习题"三个部分。其中竞赛题选自江苏省普通高等学校非理科专业历届高等数学竞赛试题、南京大学等高校历年大学数学竞赛试题、莫斯科大学等国外高校大学生数学竞赛试题。这些试题中既含基本题,又含很多具有较高水平和较大难度的趣味题,这些题目构思绝妙,方法灵活,技巧性强,本书逐条进行解析,并对重要题目深入分析,总结解题方法与技巧。

本书可供准备数学竞赛的老师和学生作为应试教程,也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书,特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平。

编者在教学改革过程中得到南京大学金陵学院姚天扬院长、王殿祥书记和数

学系丁南庆教授、朱晓胜教授等的大力支持，在编写和出版本书过程中得到南京大学姚天行教授、姜东平教授、许绍溥教授和东南大学管平教授、黄骏教授、董梅芳教授和徐丰老师等的大力支持和帮助，谨此一并表示衷心的感谢。

书中错误难免，敬请看出错处的智者不吝赐教。

陈　仲

2009 年 12 月于南京大学

目　录

专题 1　极限与连续

1.1　基本概念与内容提要

1. 一元函数基本概念

1）利用已知条件求函数的表达式.

2）函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性.

3）基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数）和初等函数.

4）反函数、复合函数、参数式函数、隐函数.

5）分段函数.

2. 数列的极限

1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$ 的定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

2）收敛数列的性质

定理 1（惟一性）　若数列$\{x_n\}$收敛于 A，则其极限 A 是惟一的.

定理 2（有界性）　若数列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$为有界数列.

定理 3（保向性）　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A > 0(<0)$，则 $\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$x_n > 0 \quad (<0)$$

3. 函数的极限

1）六种极限过程下函数极限的定义

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a+}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a-}f(x)=A$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

例如　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\sigma>0$，当 $0<|x-a|<\sigma$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

定理 1 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A \Leftrightarrow f(a-)=A,\quad f(a+)=A.$

定理 2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow f(-\infty)=A,\quad f(+\infty)=A.$

2）函数极限的性质

定理 3（惟一性） 在某一极限过程下，若函数 $f(x)$ 的极限存在，则其极限是惟一的.

定理 4（有界性） 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，则存在 $x=a$ 的去心邻域$\mathring{U}$，使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}$ 上有界.

定理 5（保向性） 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0(<0)$，则存在 $x=a$ 的去心邻域$\mathring{U}$，使得 $x\in\mathring{U}$ 时 $f(x)>0(<0)$.

4. 证明数列或函数极限存在的方法

定理 1（夹逼准则） 设三个数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

定理 2（夹逼准则） 设三个函数 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域中满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

注 对于其他的极限过程，类似的结论留给读者自己写出.

定理 3（单调有界准则） 若数列$\{x_n\}$单调增加，并有上界（或单调减少，并有下界），则数列$\{x_n\}$必收敛.

5. 无穷小量

1）若在某极限过程中（$x\to a,x\to a+,x\to a-,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$中任一个），某变量或函数 $\alpha(x)\to 0$，则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程下的**无穷小量**，简称**无穷小**. 在同一极限过程中的有限个无穷小量之和仍为无穷小量；在同一极限过程中的有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量；无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量. 例如

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0\quad\left(因\ x\to 0,\quad \sin\frac{1}{x}\ 有界\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\quad\left(因\frac{1}{x}\to 0,\quad \sin x\ 有界\right)$$

定理 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，这里 $x\to a$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小量.

2）无穷小的比较

假设在某极限过程中（以 $x\to a$ 为例），α,β 都是无穷小量.

(1) 若$\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$，则称 α 是 β 的**高阶无穷小**，记为 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 若$\frac{\alpha}{\beta}\to\infty$,则称$\alpha$是$\beta$的**低阶无穷小**.

(3) 若$\frac{\alpha}{\beta}\to c(c\neq 0,c\in\mathbf{R})$,则称$\alpha$与$\beta$为**同阶无穷小**. 特别,当$c=1$时,称$\alpha$与$\beta$为**等价无穷小**,记为$\alpha\sim\beta(x\to a)$.

(4) 若$\frac{\alpha}{x^k}\to c(c\neq 0,k>0)$,则称$\alpha$是$x$的**$k$阶无穷小**. 此时$\alpha\sim cx^k$,称$cx^k$为$\alpha$的**无穷小主部**.

6. 无穷大量

1) 当$n\to\infty$时,下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n,\quad n^{\alpha}(\alpha>0),\quad n^{\beta}(\beta>\alpha>0),\quad a^{n}(a>1),\quad n^{n}$$

2) 当$x\to+\infty$时,下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x,\quad x^{\alpha}(\alpha>0),\quad x^{\beta}(\beta>\alpha>0),\quad a^{x}(a>1),\quad x^{x}$$

7. 求数列或函数的极限的方法

1) 四则运算法则.
2) 利用夹逼准则求极限.
3) 先利用单调有界准则证明数列的极限存在,再求其极限.
4) 利用两个重要极限求极限:

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1,\qquad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$$

例如　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\cos x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}=\mathrm{e}$　(这里$\square=\cos x-1$)

5) 利用等价无穷小因子代换求极限.

定理　当$\square\to 0$时,有下列无穷小的等价性:

$$\square\sim\sin\square\sim\arcsin\square\sim\tan x\sim\arctan\square\sim\ln(1+\square)\sim\mathrm{e}^{\square}-1$$

$$(1+\square)^{\lambda}-1\sim\lambda\square\quad(\lambda>0)$$

$$1-\cos\square\sim\frac{1}{2}\square^{2}$$

6) 利用洛必达法则求极限(关于洛必达法则见第2.1节).
7) 利用马克劳林展开求极限(关于马克劳林展式见第2.1节).
8) 利用导数的定义求极限.
9) 利用定积分的定义求极限.

8. 函数的连续性

1) 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续的定义：设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内定义，若

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处**连续**；若函数 $f(x)$ 在某区间 (a,b) 上每一点皆连续，称 $f(x)$ **在 (a,b) 上连续**，记为 $f\in C(a,b)$；若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右**连续**（即 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$），在 $x=b$ 处左连续（即 $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$），则称 $f(x)$ **在 $[a,b]$ 上连续**，记为 $f\in C[a,b]$.

2) 连续函数的四则运算性质.

3) 复合函数的极限与连续性.

定理 1 若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b$，函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 处连续，则

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to a}\varphi(x)) = f(b)$$

定理 2 若函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，函数 $f(x)$ 在 $x=b=\varphi(a)$ 处连续，则 $f(\varphi(x))$ 在 $x=a$ 处连续，即有

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a))$$

定理 3 初等函数在其定义域上每一点皆连续.

4) 间断点的分类.

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续，则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的**间断点**. 间断点分为两类.

(1) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 皆存在时，称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**（若 $f(a-) = f(a+)$，称 $x=a$ 为**可去型**；若 $f(a-)\neq f(a+)$，称 $x=a$ 为**跳跃型**）.

(2) 若 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 中至少有一个不存在时，称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

5) 闭区间上的连续函数的性质.

定理 4（有界定理） 若 $f\in C[a,b]$，则 $\exists k>0$，使得 $\forall x\in[a,b]$，$|f(x)|\geqslant k$.

定理 5（最值定理） 若 $f\in C[a,b]$，则 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$，使得

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$$

定理 6（零点定理） 若 $f\in C[a,b]$，$f(a)f(b)<0$，则 $\exists \xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$（称 $x=\xi$ 为函数 $f(x)$ 的零点）.

1.2　竞赛题与精选题解析

1. 求函数的表达式(例 1.1—1.4)

例 1.1(江苏省 2004 年竞赛题)　已知 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数,且当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$时 $f(x) = \sin x - \cos x + 2$,则当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$时 $f(x) =$ ________.

解析　因 $f(x)$ 为奇函数,所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) = -(\sin(-x) - \cos(-x) + 2) \\ &= \sin x + \cos x - 2 \end{aligned}$$

且 $f(0) = 0$. 因为 $f(x)$ 是周期为 π 的函数,所以当$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-\pi) = \sin(x-\pi) + \cos(x-\pi) - 2 \\ &= -\sin x - \cos x - 2 \end{aligned}$$

例 1.2(江苏省 2000 年竞赛题)　设 $f(x) = \sqrt{x + |x|}$,则 $f(f(x)) =$ ________.

解析　由 $f(u) = \sqrt{u + |u|}$,所以

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \sqrt{f(x) + |f(x)|} = \sqrt{\sqrt{x+|x|} + \left|\sqrt{x+|x|}\right|} \\ &= \begin{cases} \sqrt[4]{8x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 1.3(江苏省 1991 年竞赛题)　函数 $y = \sin x \,|\sin x|$ $\left(其中 |x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$的反函数为________.

解析　当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时 $y = \sin^2 x$, $\sin x = \sqrt{y}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$,所以 $x = \arcsin\sqrt{y}(0 \leqslant y \leqslant 1)$;当$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$时 $y = -\sin^2 x(-1 \leqslant y \leqslant 0)$,所以$\sin^2 x = -y$, $\sin x = -\sqrt{-y}$, $x = \arcsin(-\sqrt{-y}) = -\arcsin(\sqrt{-y})$ $(-1 \leqslant y \leqslant 0)$. 于是所求反函数为

$$y = \begin{cases} \arcsin\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\arcsin(\sqrt{-x}), & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

注　若利用公式 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,类似的分析可得所求反函数为

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\arccos(1-2x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ -\dfrac{1}{2}\arccos(1+2x), & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

例 1.4(莫斯科经济统计学院 1975 年竞赛题) 求

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

的表达式,并作函数 $f(x)$ 的图象.

解析 当 $0\leqslant|x|<1$ 时,$f(x)=(1+0+0)^0=1$;

当 $x=1$ 时,$f(1)=(2+0)^0=1$;

当 $x=-1$ 时,由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+(-1)^{2n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}=(2+0)^0=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+(-1)^{2n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}=\frac{1}{2}$$

所以 $x=-1$ 时 $f(x)$ 无定义;

当 $1<x<2$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x$$

当 $x=2$ 时

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[n]{2+\frac{1}{2^n}}=2(2+0)^0=2$$

当 $|x|>2$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}=\frac{x^2}{2}$$

当 $-2<x<-1$ 时,由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+x^{2n}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n}}&=\lim_{n\to\infty}(-x)\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{x^{2n}}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}\\&=(-x)(0+1+0)^0=-x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n+1}}&=\lim_{n\to\infty}x\cdot\sqrt[2n+1]{\frac{1}{x^{2n+1}}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}\\&=x\cdot(0+1+0)^0=x\end{aligned}$$

所以 $-2<x<-1$ 时 $f(x)$ 无定义；

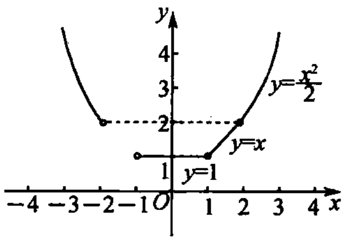
当 $x=-2$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+(-2)^{2n}+(2)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{2^{2n}}+2}=2\cdot(0+2)^{0}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+(-2)^{2n+1}+2^{2n+1}}=1^{0}=1$$

所以 $x=-2$ 时 $f(x)$ 无定义.

函数 $f(x)$ 的图象如右图所示.



2. 利用四则运算求极限(例 1.5—1.18)

例 1.5(江苏省 2000 年竞赛题)　$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$　(　　)

A. 等于 1　　B. 等于 -1

C. 等于 0　　D. 不存在但不是 $+\infty$

解析　当 $x<0$ 时，$x=-\sqrt{x^2}$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+3x}}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^3-2x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}}=-1$$

故选 B.

例 1.6(江苏省 2008 年竞赛题)　当 $a=$ ________，$b=$ ________ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

解析　因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=\frac{a+2}{b-1}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

所以 $a+2=1-b$；又因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+2|x|}{bx-|x|}\arctan x=\frac{a-2}{b+1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

所以 $a-2=b+1$. 解得 $a=1,b=-2$.

例 1.7(南京大学 1995 年竞赛题)　已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$，求 a 和 b.

解析　由

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0\ \Rightarrow\ b=-(1+a)$$