21世纪大学数学精品教材

高等数学学习指导

尹水仿　余胜春　主编

（上 册）

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪大学数学精品教材

高等数学学习指导

（上　册）

尹水仿　余胜春　主编

科学出版社

北京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内容简介

本套书根据教育部《工科高等数学教学基本要求》和《全国硕士生入学统一考试数学考试大纲》对该课程的要求编写，分为上、下两册. 本书为上册，内容包括一元微积分学、微分方程.

本书各章内容包括基本要求、内容提要、释疑解难、例题分析、考题选讲、复习题与自测题，并附有复习题与自测题解答.

本书各章具有内容充实、选题灵活、题型丰富、覆盖面广的特点，可作为高等院校理工类各专业高等数学课程的学习指导书，也可作为教师的教学参考书，对报考研究生的学生也具有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 上册 / 尹水仿，余胜春主编. —北京：科学出版社，2010.9

21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-028898-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①尹… ②余… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第173696号

责任编辑：曾 莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010年9月第一次印刷 印张：16 1/2

印数：1—6 500 字数：318 000

定价：27.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

高等数学是高等工科院校的一门重要基础理论课，同时也是硕士研究生入学考试的必考科目，掌握好高等数学的基本知识、基本理论和基本方法，对于学生后续课程的学习，对于培养和提高学生的素质和能力都具有十分重要的作用，甚至对于学生今后的发展都有着深远的影响. 为了帮助正在学习高等数学的大学一年级学生及有志报考硕士研究生的考生系统地掌握好高等数学的知识，我们组织了多年在教学一线从事高等数学教学且教学经验丰富的老师编写了《高等数学学习指导》一书.

本书依据教育部《工科高等数学课程教学基本要求》和《全国硕士生入学统一考试数学考试大纲》对该课程的要求编写，并结合目前高等数学课程的实际教学情况，与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)教材同步，它将成为学生学习高等数学的良师益友.

本书各章按基本要求、内容提要、释疑解难、例题分析、考题选讲、复习题和自测题及复习题解答、自测题解答等内容编写. 基本要求具体地指出了学习每一章应掌握的程度. 内容提要说明了每一章需要掌握的内容，包括基本概念、重要定理、常用公式以及它们之间的关系. 释疑解难通过对各章中的疑难问题，学生在学习中易错的概念和解题过程中常见错误的剖析，指导学生正确地理解和掌握基本概念，提高分析问题和解决问题的能力. 例题分析和考题选讲是本书的重点. 在这里我们选择了大量的例题，大多都具有典型性，由浅入深，由易到难，用例题的形式体现本章的基本内容及具体要求，题型极为丰富，注重基本概念，讲求基本方法，相当部分题目还给出了解题分析或注释，以更好地体现本书的学习指导作用. 考题选讲则选取了全国研究生入学考试部分试题及相关院校的期末考试试题，体现通过学习指导以期达到的辅导目标，各章配有复习题和自测题，复习题供学生检测学习各章时对内容的掌握. 自测题(I)主要用于测试学生对本章基本知识、基本方法的掌握程度，自测题(II)以达到或接近考研水平的题目为主，供学生复习总结时自我检查提高使用.

本书由尹水仿、余胜春任主编，王志明、余东、赵喜林、刘云冰任副主编，并由尹

水仿提出编写思路及编写提纲，各章编写人员：赵喜林（第一章、第十一章），王志明（第二章、第三章），刘云冰（第四章、第十二章），余胜春（第五章、第六章），余东（第七章、第八章），尹水仿（第九章、第十章），全书由尹水仿、余胜春统稿，张平芳、咸艳霞、张青、蒋君、徐树立、曲峰林、陈贵词、丁咏梅、李春丽、熊丹、李琳娜、张学英、张艳红、胡松等参加了编写的整理、复习题和自测题解答的编写及书稿的校对等工作，最后由尹水仿、余胜春定稿.

由于编者水平有限，书中不妥及不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

2010年8月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章　函数与极限

基本要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

内容提要

一、函数

1. 区间与邻域

(1) 区间. ① 开区间: $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$;② 闭区间: $[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;③ 半开区间: $(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$, $[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$;④ 无穷区间: $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$, $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

(2) 邻域. ① a 的 δ 邻域: $U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$;② a 的去心 δ 邻域: $\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$.

2. 映射

(1) 映射: 设 X, Y 是两个非空集,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记为 $f: X \rightarrow Y$.

(2) 满射：Y 中任意元素 y 都是 X 中某元素的像.

(3) 单射：X 中任意两个不同的元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(4) 一一映射(双射)：既是单射又是满射的映射.

(5) 逆映射：设 f 是 X 到 Y 的单射，定义一个新的映射 $g: R_f \to X$，$\forall y \in R_f$，规定 $g(y) = x$，x 满足 $f(x) = y$. 映射 g 称为 f 的逆映射，记为 $g = f^{-1}$.

(6) 复合映射：设 $g: X \to Y_1$，$f: Y_2 \to Z$，$Y_1 \subset Y_2$，由映射 g 和 f 定义一个从 X 到 Z 的映射 $f \circ g: X \to Z$，规定 $(f \circ g)(x) = f[g(x)] \in Z$，$x \in X$，则称 $f \circ g$ 为映射 g 和 f 构成的复合映射.

3. 函数

(1) 函数：设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常记为 $y = f(x)$，$x \in D$. 其中，x 为自变量，y 为因变量，D 为定义域.

(2) 函数的特性：有界性，单调性，奇偶性，周期性.

(3) 反函数与复合函数. ① 反函数：设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射，则它的逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$ 称为函数 f 的反函数；② 复合函数：设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D) \subset D_1$，则由式 $y = f[g(x)]$，$x \in D$ 确定的函数称为 $u = g(x)$，$y = f(u)$ 构成的复合函数.

(4) 基本初等函数. ① 常数函数：$y = c$；② 幂函数：$y = x^{\mu}$ (μ 为实数)；③ 指数函数：$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$；④ 对数函数：$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$；⑤ 三角函数：$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$；⑥ 反三角函数：$y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

(5) 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合步骤而构成且可由一个式子表示的函数称为初等函数.

二、极限

1. 极限的概念和性质

表 1.1

	$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
定义	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$\lvert x_n - A \rvert < \varepsilon$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $\lvert x \rvert > X$ 时，$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 时，$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
性	唯一性：若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 的极限唯一	唯一性：若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在，则极限唯一	唯一性：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一
质	有界性：若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 为有界数列	局部有界性：若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在，则当 $\lvert x \rvert$ 大于某正数时，$\lvert f(x) \rvert \leqslant M$	局部有界性：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则在某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内，$\lvert f(x) \rvert \leqslant M$

续表

	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$
性质	局部保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$，从某项起，即当 $n > N$ 时，$x_n > 0$	局部保号性：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A > 0$，则当 $\lvert x\rvert$ 大于某 X 时，$f(x) > 0$	局部保号性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$，则在某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内，$f(x) > 0$
	推论：若 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geqslant 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $A \geqslant 0$	推论：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 且 $f(x) \geqslant 0$，则 $A \geqslant 0$	推论：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $f(x) \geqslant 0$，则 $A \geqslant 0$

单侧极限的定义类似，叙述从略.

2. 极限与单侧极限的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x),\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)\text{ 分别存在且相等}$$

3. 无穷小量和无穷大量

无穷小：某变化过程中，极限为零的量；无穷大：某变化过程中，绝对值无限增大的量.

注 在自变量的同一变化过程中，无穷小和无穷大互为倒数关系.

4. 无穷小的比较

设 $\lim\alpha(x) = 0$，$\lim\beta(x) = 0$，则

$$\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \begin{cases} 0, & \beta(x)\text{ 是 }\alpha(x)\text{ 的高阶无穷小} \\ c\neq 0, & \beta(x)\text{ 是 }\alpha(x)\text{ 的同阶无穷小} \\ 1, & \beta(x)\text{ 是 }\alpha(x)\text{ 的等价无穷小} \\ \infty, & \beta(x)\text{ 是 }\alpha(x)\text{ 的低阶无穷小} \end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小有

$$\sin x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \tan x \sim x,\ \arctan x \sim x,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x - 1 \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a, \ln(1+x) \sim x,\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$$

5. 关于无穷小量的几个结论

(1) 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小.

(3) 无穷小与有界量的积仍是无穷小.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，$\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(5) 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'} = A$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

6. 极限运算的重要结论

(1) 设 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\lim[f(x)\pm g(x)] = A\pm B,\qquad \lim f(x)g(x) = AB$$
$$\lim[f(x)]^n = A^n,\qquad \lim kf(x) = k\lim f(x)$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\quad (B\neq 0)$$

(2) 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

(3) 夹逼准则：设 $\lim f(x) = \lim g(x) = A$，且 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim h(x) = A$.

(4) 单调有界准则：单调增加(减少)而有上界(下界)的数列必有极限.

三、函数的连续性

1. $f(x)$在x_0处连续的三个等价定义

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) 当 $\Delta x = x - x_0\to 0$ 时，$\Delta y = f(x) - f(x_0)\to 0$.

(3) $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. 单侧连续

左连续：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$；右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

$$f(x)\text{在 } x_0\text{处连续}\Leftrightarrow f(x)\text{在 } x_0\text{处左连续且右连续}$$

3. 函数的间断点及分类

表 1.2

	定　义	分　类	
		第 一 类	第 二 类
间断点	① $f(x)$在x_0处无定义； ② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在； ③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. 上述三种情形之一	可去间断点： $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 跳跃间断点： $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$	无穷间断点： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 振荡间断点 其他间断点

4. 连续函数的重要结论

(1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)在其共同的连续区间上连续.

(2) 严格单调连续函数的反函数仍是单调连续函数.

(3) 设 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续，而 $u = g(x)$ 在点 $x = x_0$处连续，且$u_0 = g(x_0)$，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 $x = x_0$处连续.

(4) 基本初等函数在其定义域上连续.

(5) 初等函数在其定义区间上连续.

(6) 闭区间上的连续函数必有最大值和最小值存在,因而必为有界函数.

(7) 闭区间$[a, b]$上的连续函数$f(x)$必取介于$f(a)$与$f(b)$(设$f(a)\neq f(b)$)之间的任意值.

(8) 闭区间上的连续函数必取介于最大值和最小值之间的一切值.

(9) 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续,且$f(a)f(b)<0$,则在(a, b)内至少存在一点ξ,使$f(\xi)=0$.

释 疑 解 难

问题 1 构成映射的要素是什么?构成函数的要素是什么?二者有何不同?

答 构成映射的要素为三个:定义域D_f、值域的范围Y、对应法则f. 函数作为一个特殊的映射,定义中已经规定值域的范围是实数集$\mathbf{R}$,因此,构成函数的要素只有两个:定义域和对应法则. 定义域和对应法则一旦确定,值域也就自然确定. 判断两个函数是否相同,只要比较定义域和对应法则是否相同.

问题 2 数列$\{x_n\}$无界与$x_n\to\infty(n\to\infty)$有何区别?

答 $\{x_n\}$无界,指的是不存在正数M,使$|x_n|\leqslant M$;$x_n\to\infty$直观上理解,是指当$n\to\infty$时,x_n的变化趋势为无穷大,强调的是变化趋势. 例如,$x_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$,显然$\{x_n\}$无界,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不是无穷大,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在. 因为随着$n$的增加,$n\sin\frac{n\pi}{2}$的变化趋势不"专一". 反过来,若$x_n\to\infty$,则$\{x_n\}$一定无界.

问题 3 高阶无穷小有怎样的运算规律?

答 关于高阶无穷小的运算,有如下规律:当$x\to 0$时,① $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$;② 当$m>n$时,$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)$;③ $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$;④ 设$\varphi(x)$有界,则$\varphi(x)\cdot o(x^n)=o(x^n)$.

注 下面两个结论都是错误的:① $o(x^n)-o(x^n)=0$,例如,$x^2=o(x)$,$x^3=o(x)$,但$x^2-x^3\neq 0$;② $o(x^m)/o(x^n)=o(x^{m-n})(m>n)$,例如,$x^3=o(x^2)$,$x^4=o(x)$,但$x^3/x^4\neq o(x)$.

问题 4 无限个无穷小的乘积是否为无穷小?

答 无限个无穷小的乘积不一定是无穷小. 这个问题中有两个变化过程:一个是无穷小对应的自变量的变化过程,另一个是无穷小的个数趋向无穷大这个变化过程,这是两个变量变化的极限问题,详细讨论比较复杂.

设$x_n^m=\begin{cases}1, & n<m,\\ \mathrm{e}^m/\mathrm{e}^{n/2}, & n\geqslant m,\end{cases}$ 其中,$m=1, 2, \cdots$. 显然,对任意固定的m,$n\to\infty$,$\{x_n^m\}$是无穷小,但当$m\geqslant n$时,

$$P_n^m = x_n^1 x_n^2 \cdots x_n^m = \frac{e^1}{e^{n/2}} \cdot \frac{e^2}{e^{n/2}} \cdot \cdots \cdot \frac{e^n}{e^{n/2}} \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = \frac{e^{n(n+1)/2}}{e^{n^2/2}} = e^{n/2}$$

显然，当 $m \to \infty, m \geqslant n$ 时 P_n^m 不是无穷小. 该例说明：无限个无穷小的乘积不一定是无穷小. 本例中的 e 换成任何大于 1 的数都可以.

一般地，无限个无穷小的乘积是未定型.

问题 5 讨论函数的极限时，什么情况下要考虑左、右极限？

答 一般说，讨论函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限，都应先看一看单侧极限的情况. 如果当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 的两侧变化趋势一致，则不必分开研究；如果两侧变化趋势可能有差别，就应分别研究左、右极限.

例如，求分段函数在分段点处的极限时，必须研究左、右极限；有些三角函数在特殊点的左、右极限不一样，如 $\tan x$ 在 $x \to \pi/2$ 时；有些反三角函数、指数函数也有类似情况，如 $\arctan \dfrac{1}{x}$，$e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x \to 0$ 时左、右极限都不一样.

问题 6 使用极限四则运算法则应该注意什么问题？如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，就有 $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = a$，那么必有 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n} = 1$，对吗？

答 极限的四则运算法则都是以参与运算的各个数列或函数的极限存在为前提的，并且在商的极限运算法则中，分母的极限不能为零.

若 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 且 $a \neq 0$，那么 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n} = 1$ 是正确的；而当 $a = 0$ 时，极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在，也可能不存在，存在的话，也不一定等于 1. 例如，数列 $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$，而 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$ 不存在；又如，$x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2}$；再如，$\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}} = 1^\infty = 1$，也是错误的，因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ 不存在.

另外，在用极限的四则运算法则时，要注意参与运算的项必须为有限项. 例如，$\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}\right)$ 不能这样做：$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2} + \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n^2} = 0 + \cdots + 0 = 0$，因为随着 $n \to \infty$，参与和的运算的项为无限项，正确做法为

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

问题 7 如何求幂指函数的极限 $\lim u(x)^{v(x)}$？

答 如果 $\lim u(x)$，$\lim v(x)$ 分别存在，则 $\lim u(x)^{v(x)}=[\lim u(x)]^{\lim v(x)}$. 例如，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2x+1}=[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)]^{\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)}=1$.

若 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$，这是最常见的一种未定式 1^{∞} 情形，常用解法有两种：① 利用重要极限，$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\{1+[u(x)-1]\}^{\frac{1}{u(x)-1}[u(x)-1]v(x)}$，如果 $\lim[u(x)-1]v(x)$ 存在的话，则 $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim[u(x)-1]v(x)}$；② 利用洛必达法则（洛必达法则在第三章介绍），$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\exp[v(x)\ln u(x)]$，而 $\lim[v(x)\ln u(x)]$ 可化为 $\lim\dfrac{\ln u(x)}{1/v(x)}$，为 $\dfrac{0}{0}$ 型，用洛必达法则求极限.

归纳起来，求幂指函数的极限，有下述方法：① 当 $\lim u(x)=A>0$ 且 $A\neq 1$ 时，$\lim u(x)^{v(x)}=A^{\lim v(x)}$；② 当 $\lim v(x)=B\neq 0$ 时，$\lim u(x)^{v(x)}=[\lim u(x)]^{B}$；③ 当 $\lim u(x)=1$ 时，$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim[u(x)-1]v(x)}$；④ 一般总有 $\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim[v(x)\ln u(x)]}$.

问题 8 如何求曲线的斜渐近线？

答 所谓渐近线，就是指这样的定直线 L，当动点沿曲线 $y=f(x)$ 无限远离原点时，它和 L 的距离趋向于零，则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，直线 L：$Y=kX+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，$M(x,f(x))$ 为曲线上的任一点，根据点到定直线 L 的距离公式 $|MN|=\dfrac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}$ 及渐近线的定义，当 $x\to+\infty$ 时，有 $|MN|\to 0$. 所以，如果 L 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，那么常数 k 与 b 必须满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0 \qquad ①$$

从而有 $f(x)=kx+b+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$. 于是

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-b-\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad ②$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-\alpha(x)]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx] \qquad ③$$

反之，若②、③式均成立，就有 $\dfrac{f(x)}{x}=k+\beta_1(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\beta_1(x)=0$. $f(x)=kx+b+\beta_2(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\beta_2(x)=0$. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to+\infty}\beta_2(x)=0$$

即①式成立，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}|MN|=0$，这就证明了由②、③式确定的 k，b 为斜率和截距的直线 $y=kx+b$ 的斜渐近线.

注 上面讨论的极限中 $x\to+\infty$ 换成 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 结论仍然成立. 例如，求曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 的斜渐近线. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right]=-1$$

故 $y=\frac{1}{2}x-1$ 是一条斜渐近线.

问题 9 怎样理解函数的间断点及其分类?

答 函数的间断点是以否定连续性来定义的,要讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的连续性,主要讨论极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 只有当 $f(x)$ 在 x_0 的邻域或某个去心邻域内有定义时,才可讨论此极限,否则极限没意义(不是极限不存在),此时讨论 $f(x)$ 在点 x_0 处是连续或间断也就没意义了,例如,$\lim\limits_{x\to 2}\arcsin x$ 没意义,因此讨论 $\arcsin x$ 在点 $x=2$ 处是连续还是间断,也就没意义. 在双侧极限无意义而单侧极限有意义时,也可讨论该点是连续还是间断.

间断点的分类也按极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的情况来分: 左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点;其余的间断点都称为第二类间断点. 双侧极限无意义而单侧极限有意义时,也按单侧极限存在与否对间断点分类,例如,$f(x)=e^{1/x}$,$x=0$ 是第二类间断点;$\ln x$,$x=0$ 是无穷间断点;$\sqrt{x}$, $x=0$ 是右连续点;$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,$x=0$ 是可去间断点.

问题 10 为什么说初等函数在它的定义区间连续,而不说在定义域上连续?

答 基本初等函数在定义域上是连续的,但初等函数在定义域的某些点上不一定连续,如上面问题中讨论的 $\sqrt{\cos x-1}$,对 $x=0$ 是有定义的,但不能说在该点连续. 一般来说,定义域中的"孤立"点的邻近无定义,因而不能讨论函数在该点的连续性.

例 题 分 析

例 1.1 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

解 $$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$$

例 1.2 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$,则 $e^{3a}=8\Rightarrow a=\ln 2$.

例 1.3 设当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x^2$ 是比 $x\tan^n x$ 高阶的无穷小，而 $x\tan^n x$ 是比 $(e^x-1)\ln(1+x)$ 高阶的无穷小，则正整数 $n=$(　　).

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

解　当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x^2\sim\dfrac{x^4}{2}$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$x\tan^n x\sim x^{n+1}$，由题设可知 $2<n+1<4$，所以 $n=2$. 故选 B.

例 1.4 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $\varphi(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则(　　).

A. $\varphi[f(x)]$必有间断点　　　　B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

C. $f[\varphi(x)]$必有间断点　　　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点

解　设 $g(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$，则 $\varphi(x)=f(x)g(x)$，若 $g(x)$没有间断点，则 $g(x)$连续，又 $f(x)$是连续函数，根据连续函数的性质，$\varphi(x)$是连续函数，与已知矛盾. 故选 D.

例 1.5 设映射 $f: X\to Y$，$A\subset X$，记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}\circ f(A)$，证明：

(1) $f^{-1}\circ f(A)\supset A$；　　　　(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}\circ f(A)=A$.

证　(1) $\forall x\in A$，有 $f(x)\in f(A)$，所以 $x\in f^{-1}\circ f(A)$，故 $f^{-1}\circ f(A)\Leftrightarrow A$.

(2) $\forall x\in f^{-1}\circ f(A)$，$f(x)\in f(A)$，所以存在 $x'\in A$，使 $f(x')=f(x)$. 因为 f 是单射，所以 $x'=x$，即 $x\in A$，故 $f^{-1}\circ f(A)\subset A$，与(1)结合得证.

例 1.6 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$$
$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & f(x)\leqslant 0\\ f^2(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}1, & f(x)=0\\ x^2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}1, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$$

注　分段函数 $g[f(x)]$的复合，第一步将 $g(x)$中凡是含 x(包括对应关系式中的 x 和自变量取值范围中的 x)的地方，用 $f(x)$取代；第二步，再对刚才的式子进行分析整理.

例 1.7 观察函数 $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{x-1}{x^2-1}, & x>1,\end{cases}$ 问$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$是否存在?

解　右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$；左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+a)=1+a$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com