高等学校试用教材

高等数学

（物理专业用）

第三册第一分册

四川大学数学系高等数学教研组 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

（物理专业用）

第三册第一分册

四川大学数学系高等数学教研组编

高等教育出版社

目　　录

第十二章 线性代数

第一节 行 列 式

§12.1.1 n阶行列式的定义

我们在中学代数里已学过解二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1}$$

用消元法得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\tag{2}$$

不等于零时，二元线性* 方程组(1)有唯一解：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\tag{3}$$

对于三元线性方程组

---

* 由于二元一次方程代表平面上的直线，故习惯上将一次方程称为线性方程，而高于一次的方程称为非线性方程.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{4}$$

可以把后面两个方程中的 x_1 看作常数，并移到等号的右边去，利用公式(3)，解出后面两个方程中的 x_2 和 x_3，再代入第一个方程，即得仅含未知数 x_1 的方程. x_1 的系数可用三阶行列式表示，即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{5}$$

若此行列式之值不为零，则得未知数 x_1 的值:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

同理可得

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

在这一节，我们将把二元和三元线性方程组解的行列式形式推广到 n 元线性方程组去．这一推广，无论是在数学理论上或在实际应用上都有着重大意义．为此，首先要给出 n 阶行列式的定义，而要定义 n 阶行列式，必须先弄清排列的概念．

1　排列　在(2)或(5)式右边每一项内，将字母 a 的第一个附标(称为行标)按从小到大的顺序(即自然顺序)排列后，第二个附标(称为列标)依次写下来，可得：

在(2)中为：

$$12,\ 21$$

在(5)中为：

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321$$

这分别是两个数 1,2 和三个数 1,2,3 的所有排列．一般地，有下述定义

定义 1　由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 阶排列**．

例如，12 是一个二阶排列，312 是一个三阶排列．

我们知道，n 阶排列的总数是

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!\ \ (n!\text{ 读作 } n \text{ 阶乘})$$

在所有 $n!$ 个 n 阶排列中，$1\,2\,3\cdots n$ 是唯一的一个按自然顺序(即递增的顺序)构成的排列，称为 **n 阶标准排列**．

定义 2　在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在后面的数，则称它们构成一个**反序(或逆序)**．一个排列中全部反序的个数称为这个排列的**反序数**．

例如，排列 231 共有三对数：23, 21, 31，其中 21 和 31 都成反序，23 不成反序(有时也说其反序数为零)，所以 231 的反序数是 2．

为了使用方便，我们把排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 的反序数表示为记号

$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，即：

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\text{排列 } j_1j_2\cdots j_n \text{ 的反序数}$$

定义 3 如果 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=$ 偶数（零也算作偶数），排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为**偶排列**；如果 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=$ 奇数，排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为**奇排列**.

例如，因 $\tau(231)=2$，故 2 3 1 是偶排列；$\tau(123)=0$，故 123 是偶排列；$\tau(321)=3$，故 321 是奇排列.

把一个排列中某两个数互换，而其余数不动，就得另一个排列. 这样的变形称为一个**对换**. 例如，排列 231 经过 12 对换，就变成 132，132 再经过 12 对换，又还原成 231 了. 这时，我们看到经过一个对换，偶排列 231 变成了奇排列 132. 一般地，有下列定理.

定理 1 一个偶排列（奇排列）经过一个对换变成奇排列（偶排列），即排列经一次对换改变其奇偶性. 因此，排列经奇数次对换改变其奇偶性，而经偶数次对换保持其奇偶性.

证明 先看要对换的两数在排列中紧接相邻的情形. 排列

$$\cdots jk\cdots \tag{6}$$

经过 j 与 k 对换变成

$$\cdots kj\cdots \tag{7}$$

这里"…"表示那些不动的数. 显然，在排列(6)，(7)中 j 或 k 与前面和后面的各数所构成的反序或顺序都相同，不同的只是 j，k 的次序. 如果原来 j,k 组成反序，则经过对换，整个排列的反序数减少一个；如果原来 j,k 不成反序，则经过对换，反序数就加一个，不论增加 1 或减少 1，排列的反序数的奇偶性总是变了.

再看一般情形. 设 j 与 k 之间有 s 个数，即排列为

$$\cdots j i_1 i_2\cdots i_s k\cdots \tag{8}$$

经 j 与 k 对换，排列(8)变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \tag{9}$$

不难看出，这样一个不相邻两数的对换可以通过若干次相邻的对换来实现. 从(8)出发，把 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换，…，经过 $s+1$ 次(因为 k 向左移完时经过了 s 个数 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 和一个数 j)相邻的对换，排列(8)变成

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \tag{10}$$

从(10)出发，把 j 一位一位地向右移，经过 s 次(因 j 经过 s 个数)相邻的对换，排列(10)变成排列(9). 因此，j 与 k 的对换总共通过 $2s+1$ 次(奇数次)相邻的对换来实现. 前面已证明，相邻两数的一个对换改变排列的奇偶性，因而，奇数次的相邻对换最终也改变排列的奇偶性.

定理2 任一 n 阶排列都可以经若干个对换变成标准排列 $1\ 2 \cdots n$，而且所作对换个数与这个 n 阶排列有相同的奇偶性.

证明 当 $n=2$ 时，共有两个排列 12，21. 排列 21 经过一个对换变成 12，而且对换的个数 1 与 21 这个排列有相同的奇性，即本定理在 $n=2$ 时正确.

今设定理的前一结论对任一 $n-1$ 阶排列成立. 现证明它对任一 n 阶排列也成立.

设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个任意 n 阶排列. 如果 $j_n=n$，则根据归纳法假设，$n-1$阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 可以经若干次对换变成 $1, 2, \cdots, n-1$，因而 n 阶排列也同时变成 $1\ 2 \cdots n$. 如果 $j_n \neq n$，则对 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 作 j_n 与 n 的对换，变成 $j_1' j_2' \cdots j_{n-1}' n$，这又归结于上面的情形. 因此，定理的第一结论普遍成立.

因为 $1\ 2 \cdots n$ 是偶排列，故由定理 1，如果排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列，则变成 $1\ 2 \cdots n$ 所作对换的个数为偶数；如果排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列，则变成 $1\ 2 \cdots n$ 所作对换的次数为奇数. 定理完全得到证明.

习　题　1

排列

1. 计算下列各排列的反序数

1) $\tau(1\ 2\ 3\cdots n)$

2) $\tau(n\ n-1\cdots 2\ 1)$

3) $\tau(5\ 2\ 1\ 3\ 6\ 4\ 8\ 7)$

4) $\tau(8\ 5\ 2\ 7\ 4\ 1\ 6\ 3)$

5) $\tau(2n+1\ 2n\ 2n-1\cdots 3\ 2\ 1)$

6) 排列 2 4 5 3 1 6 7 经多少次对换变成标准排列？由此确定它是偶排列或奇排列.

2. 1) 写出 1, 2, 3 的所有奇排列，所有偶排列. 在 1, 2, 3 的全部排列数中，奇排列和偶排列各占多少个？

2) 证明 $1,2,\cdots,n$ 的偶排列总数等于其奇排列总数，并且都等于$\frac{n!}{2}$

(提示：任何一个偶(奇)排列经对换元素 1, 2 之后成为奇(偶)排列)

3. 设$\cdots ijk\cdots$是偶排列，试确定下面两个排列的奇偶性 1) $\cdots kij\cdots$ 2) $\cdots jki\cdots$

2　*n* 阶行列式的定义　有了上述排列的预备知识，不难给出 n 阶行列式的定义了. 为此，先看一下二阶行列式(2)和三阶行列式(5)的构成规律. 显然，它们都是一些乘积的代数和，而每一项都是行列式中位于不同行和不同列的元素的乘积，并且恰恰就是一切可能的这种乘积. 在 $n=2$ 时由(2)中不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ 这两项；在 $n=3$ 时，(5)中这样的项共有 $3!=6$ 项，此外，每一项乘积都带有正号或负号. 在三阶行列式的展开式(5)中，各项的一般形式可写成：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是1, 2, 3 的某个排列. 易见，当反序数 $\tau(j_1j_2j_3)=$偶数时，相应的项带有正号；当$\tau(j_1j_2j_3)=$奇数时，相应的项带有

负号．二阶行列式的情形也如此．由此不难给出 n 阶行列式的定义．

定义 4　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列（a_{ij} 是位于第 i 行第 j 列的元素），在其两边各画一条竖线，并把它定义为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{s_1s_2\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n} \quad (11)$$

其中 $\sum\limits_{s_1s_2\cdots s_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 阶排列求和（见附录）．这样一个数学符号 (11) 称为一个 **n 阶行列式**．它是一个含有 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是由行列式中每一行和每一列任取一个元素所成的乘积，而且这一项前面的符号确定如下：当该项的因子的行标按自然数序排列，而相应的列标成偶排列时，符号为正；当相应的列标成奇排列时，符号为负．

由此定义推知，n 阶行列式的展开式是由 $n!$ 项组成，其中一半的项前面带正号，另一半的项前面带负号（见习题 1，2.2)）．符号 $|A|$ 又可写为 $\det|a_{ij}|$ 或 $|a_{ij}|$（但须注意，不要把 $|a_{ij}|$ 与 a_{ij} 的绝对值混淆起来！）

于此定义中令 $n=2$ 和 $n=3$ 就得出二阶行列式(2)与三阶行列式(5)．

在行列式的定义中，每一项的 n 个元素的行标排列成标准排列．其实，由于数的乘法是可以交换的，因而，一般地，n 阶行列式中的项（不计符号）一般可写成

$$a_{i_1s_1}a_{i_2s_2}\cdots a_{i_ns_n} \quad (12)$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$s_1s_2\cdots s_n$ 是两个 n 阶排列．可以证明(12)前面的符

号是

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(s_1s_2\cdots s_n)} \tag{13}$$

事实上，为了根据定义来决定(12)的符号，就要把(12)中各因子适当对换使它们的行标成标准排列，即得

$$a_{1s_1'}a_{2s_2'}\cdots a_{ns_n'} \tag{14}$$

因而它前面的符号是

$$(-1)^{\tau(s_1's_2'\cdots s_n')} \tag{15}$$

现证明(13)与(15)是一致的．我们知道(12)中两因子每作一次调换时，整个项的行标的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与列标的排列 $s_1s_2\cdots s_n$ 都同时作一次对换；即两个数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 和 $\tau(s_1s_2\cdots s_n)$ 都同时改变奇偶性，因而它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(s_1s_2\cdots s_n)$$

的奇偶性不改变．即是说，对(12)作一次两因子的调换不改变(13)的值．在若干次因子的调换后(12)变成(14)，同时有

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(s_1s_2\cdots s_n)}&=(-1)^{\tau(1\,2\cdots n)+\tau(s_1's_2'\cdots s_n')}\\&=(-1)^{\tau(s_1's_2'\cdots s_n')}\end{aligned}$$

即(13)与(15)一致．

例如，$a_{23}a_{12}a_{31}$ 是三阶行列式(5)中的一项，其行标排列的反序数 $\tau(213)=1$，列标排列的反序数 $\tau(321)=3$，因此这项的符号为 $(-1)^{1+3}=+1$．如其行标成标准排列 123，即 $a_{12}a_{23}a_{31}$，则对其列标排列有 $\tau(231)=2$，因而其符号也是 $(-1)^2=+1$．

按(12)和(13)来写行列式每一项的好处在于，行标与列标的地位是平等的(而不象定义 4 中的行标必须由小排到大)．因此，我们也有权把每一项按列标由小到大排列起来，而导出与定义 4 等价的定义

$$\det|a_{ij}|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{16}$$

最后指出，还有一种与定义 4 等价的定义：

$$\det|a_{ij}| = \sum_{s_1 s_2 \cdots s_n} (-1)^r a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n} \tag{17}$$

其中 r 是 n 阶排列 $s_1 s_2 \cdots s_n$ 变成排列 $12\cdots n$ 所作对换的个数.

事实上，根据定理 2，r 与 $s_1 s_2 \cdots s_n$ 有相同的奇偶性，$(-1)^r = (-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)}$，故(17)与(11)等价也与(16)等价.

下面给出一个按定义计算行列式的例子：

例 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

这是一个 n 阶行列式. 按行列式定义，它有 $n!$ 项，其各项的一般形式

$$a_{1s_1} a_{2s_2} a_{3s_3} \cdots a_{ns_n}$$

显然，如果 $s_1 \neq n$，则 $a_{1s_1} = 0$，从而含 a_{1s_1} 的项等于 0，故只须考虑 $s_1 = n$ 的那些项. 同样，只须考虑 $s_2 = n-1, s_3 = n-2, \cdots, s_n = 1$ 这些列指标的项. 即是说，行列式中不为零的项只有

$$a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n1}$$

这一项，而

$$\begin{aligned} &\tau(n \ \ n-1 \ \ n-2 \cdots 1) \\ &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

习 题 2

行列式的定义

1. 下列乘积是否为四阶或七阶行列式的项？如果是，确定其符号

   1) $a_{13}\,a_{21}\,a_{33}\,a_{42}$

   2) $a_{32}\,a_{21}\,a_{43}\,a_{24}$

   3) $a_{43}\,a_{31}\,a_{12}\,a_{24}$

   4) $a_{12}\,a_{33}\,a_{41}\,a_{24}$

   5) $a_{66}\,a_{24}\,a_{12}\,a_{35}\,a_{43}\,a_{51}\,a_{77}$

2. 证明

$$\sum_{s_1s_2\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}=0$$

3. 写出四阶行列式中一切带负号的

   1) 含有元素 a_{23} 的项

   2) 含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项

4. 一个行列式的主对角线(即从左上角到右下角的对角线)上方的元素全为零，证明它等于其主对角线元素之积.

5. 一个行列式的任何一行任何一列只有一个元素为 1，其余元素为 0，求此行列式的值.

6. 按行列式定义计算

   1)
$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&2\\3&0&0&3\\4&0&0&4\end{vmatrix}$$

   2)
$$D_2=\begin{vmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\x&y&e&f\\j&w&g&h\end{vmatrix}$$

   3)
$$D_3=\begin{vmatrix}x&y&0&0&0\\0&x&y&0&0\\0&0&x&y&0\\0&0&0&x&y\\y&0&0&0&x\end{vmatrix}$$

7. 证明：如果 n 阶行列式 D 含有多于 n^2-n 个的零，则 $D=0$.

8. 如果行列式 $|A|$ 的元素是可微函数 $a_{ik}(x)$，求 $\frac{d}{dx}|A|$.

9. 证明一个行列式的副对角线(从左下角到右上角的对角线)下方的元素全为零，则它等于其副对角线各元素之积乘以 $(-1)^{C_n^2}$.

§12.1.2 行列式的主要性质

由行列式定义可知，一个 n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项，而每一项都是 n 个元素的乘积. 同时还要确定其正负号. 因此，除了二阶和三阶行列式之外，直接用定义来计算行列式是困难的. 为了能够简便地计算行列式的值，我们在这里将介绍行列式的主要性质，以便将复杂的行列式的计算化为简单的行列式的计算，将高阶行列式的计算化为低阶行列式的计算.

性质 1 行列式的行和列依次互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

上述二行列式互称为转置行列式（行列式 $|A|$ 的转置行列式记为 $|A|'$）. 因此，行列式转置后其值不变.

证明 显然，

$$(18)\text{式左边} = \sum_{s_1 s_2\cdots s_n} (-1)^{\tau(s_1 s_2\cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}$$

$$(18)\text{式右边} = \sum_{s_1 s_2\cdots s_n} (-1)^{\tau(s_1 s_2\cdots s_n)} a_{s_1 1} a_{s_2 2}\cdots a_{s_n n}$$

由于定义式(11)与定义式(16)是等价的，故(18)成立.

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的，平等的. 因此，凡是有关行的性质，对列也同样成立. 下面所述行列式的各性质多半是对行说的，对列也有同一性质，就不处处申明了.

必须指出，与行列式转置的方式不同，若将整个行列式反时针或顺时针方向旋转 90°（这时将左右两竖线变成的上下两横线仍移作左右两竖线）所得新行列式的行与列分别为原行列式的列与行. 可以证明，这两种行列式之值仅仅相异一个符号因子 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

事实上，若用 b_{ij} 表示行列式 $|a_{ij}|$ 反时针旋转 90° 后所得新行列式的第 i 行和第 j 列元素，则由下式表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{反时针转 90° 后}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \\ \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-2,2} & \cdots & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

可看出新旧元素之间有下列关系式：

$$b_{ij}=a_{j,n+1-i}\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

按行列式定义 4 有

$\det|b_{ij}|$

$$=\sum_{s_1s_2\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}b_{1s_1}b_{2s_2}\cdots b_{ns_n}$$

$$=\sum_{s_1s_2\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}a_{s_1n}a_{s_2,n-1}\cdots a_{s_n1}$$

$$=(-1)^{\tau(n\ n-1\cdots 2\ 1)}\sum_{s_1s_2\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)+\tau(n n-1\cdots 2\ 1)}a_{s_1n}a_{s_2n-1}\cdots a_{s_n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\det|a_{ij}|$$

最后一步等式的依据是(12)和(13).

如果将一个 n 阶行列式旋转 $180°$（相当于连续施行两次 $90°$ 旋转），则所得行列式与原行列式之值相等，这是因为符号因子为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=+1$$

行列式的反时针旋转 $90°$ 与通常所说的转置虽然不同，但二者却有着内在的联系，如果把行列式 $|A|$ 转置得 $|A|'$，先将 $|A|'$ 的第 n 行与第 $n-1$ 行，第 $n-2$ 行，…，第二行，第一行依次对换．这些对换的次数是 $n-1$；次将 $|A|'$ 的第 $n-1$ 行与第 $n-2$ 行，第 $n-3$ 行，…，第一行对换．这些对换的次数是 $n-2$；仿此继续对换下去，总共经过

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

次交换两行，$|A|'$ 变成 $|A|$ 反时针旋转 $90°$ 所得行列式．而每一次交换两行，将使行列式变号（这是下面紧接着要证明的性质 2）．因此将行列式 $|A|$ 反时针旋转 $90°$ 相当于对 $|A|$ 乘上一个符号因子 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$．同理可知，行列式 $|A|$ 顺时针旋转 $90°$ 也如此．

性质 2　将行列式 $|A|$ 的第 h 行(列)和第 k 行(列)元素互换所得行列式等于 $-|A|$．

证明　设所得行列式元素为 b_{ij}，则

$$b_{hj}=a_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n)\quad(h<k)$$

$$b_{kj}=a_{hj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

$$b_{ij}=a_{ij}\quad(i\neq h,i\neq k,j=1,2,\cdots,n)$$

按行列式定义

$$\det|b_{ij}|=\sum_{s_1\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1\cdots s_h\cdots s_k\cdots s_n)}b_{1s_1}b_{2s_2}\cdots b_{hs_h}\cdots b_{ks_k}\cdots b_{ns_n}$$

$$=\sum_{s_1\cdots s}(-1)^{\tau(s_1\cdots s_h\cdots s_k\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ks_h}\cdots a_{hs_k}\cdots a_{ns_n}$$

$$= (-1)^{\tau(12\cdots k\cdots h\cdots n)} \sum_{s_1\cdots s_n} (-1)^{\tau(s_1\cdots s_h\cdots s_k\cdots s_n)+\tau(12\cdots k\cdots h\cdots n)}$$

$$\times a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ks_h}\cdots a_{hs_k}\cdots a_{ns_n}$$

这里 $(-1)^{\tau(12\cdots k\cdots h\cdots n)}=-1$，这是因为 $12\cdots k\cdots h\cdots n$ 是偶排列 $12\cdots h\cdots k\cdots n$ 经 h,k 对换而得的奇排列.

由行列式一般定义式(12)与(13)得到所需证的结论:

$$\det|b_{ij}|=-\det|a_{ij}|$$

由性质2立即可得性质3

性质3 若行列式 $|A|=\det|a_{ij}|$ 中有两行(列)元素相同，则行列式之值为零.

证明 将此相同的两行（列）对换，由性质 2 行列式 $|A|=-|A|$，故 $|A|=0$.

性质4 若行列式 $|A|$ 中某行(列)元素有公因子 K，则 K 可以提到行列式符号外相乘.

证明 设第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 都有公因子 K，即

$$a_{ij}=Kb_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则

$$\begin{aligned}|A|=\det|a_{ij}|&=\sum_{s_1\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1\cdots s_i\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{is_i}\cdots a_{ns_n}\\&=\sum_{s_1\cdots s_i\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1\cdots s_i\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots Kb_{is_i}\cdots a_{ns_n}\\&=K\sum_{s_1\cdots s_n}(-1)^{\tau(s_1\cdots s_i\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots b_{is_i}\cdots a_{ns_n}\\&=K|B|\end{aligned}$$

其中 $|B|$ 为 $|A|$ 中第 i 行提去公因子 K 之后所成行列式.

性质5 若行列式中有两行(列)元素成比例则此行列式之值为零.

证明 设行列式的第 i 行(列)的各元素为第 j 行(列)对应元