积分方程求解及其机械化

New Algorithms for Solving Integral Equations With Mechanization

王玮明 著

甘肃科学技术出版社

社名题词　李政道

责任编辑　韩　波

封面设计　宋　烨

ISBN 978-7-5424-1234-8

定价：35.00元

积分方程求解及其机械化

王玮明　著

兰州
甘肃科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

积分方程求解及其机械化/王玮明著．—兰州：甘肃科学技术出版社，2008.11

ISBN 978-7-5424-1234-8

Ⅰ．积… Ⅱ．王… Ⅲ．积分方程—机械化—算法 Ⅳ．O175.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 163936 号

责任编辑 韩　波（0931-8773237）
封面设计 宋　烨
出版发行 甘肃科学技术出版社（兰州市南滨河东路 520 号　0931-8773237）
印　　刷 甘肃地质印刷厂
开　　本 787mm×1092mm　1/16
印　　张 9.5
字　　数 190 千
插　　页 5
版　　次 2008 年 12 月第 1 版　2008 年 12 月第 1 次印刷
印　　数 1～500
书　　号 ISBN 978-7-5424-1234-8
定　　价 35.00 元

前言

积分方程是继微分方程之后出现的一个新的近代数学的重要分支, 也是科学研究和解决工程技术问题的重要工具之一, 具有广泛的应用. 方程求解是积分方程研究的热点和难点之一. 本书在前人研究的基础上, 利用吴文俊院士所倡导的"数学机械化"的思想和方法研究了积分方程求解以及机械化算法等问题. 主要工作包括如下几个部分:

第一章, 简要综述了积分方程研究简史、积分方程求解方法、数学机械化及其应用等; 第二章, 研究了 Fredholm 积分方程和方程组的豫解核求解法及其机械化算法, 利用这些算法求解 Fredholm 积分方程时, 所要做的全部事情就是输入描述方程的信息, 然后机械化算法将给出所求方程的解析解. 特别地, 在机械化求解的算法设计中, 为了增加求解过程的逻辑性和理解度, 设计了可读性求解过程输出, 使得机械化求解结果与我们用纸和笔求解方程时的过程几乎是一样的; 第三章, 研究了 Volterra 积分方程的 Neumann 级数与 Taylor 级数求解法, 以及求解 Volterra 积分方程组的迭代法. 特别是在利用 Neumann 级数法求解 Volterra 积分方程的过程中, 将得到的有限迭代核序列 $k^N(s,t)\,(N=1,2,\cdots,10)$ "分解" 为若干个部分, 对每一部分逐一运用数学归纳法, 最后再按照原来 "分解" 的逻辑顺序合并在一起, 从而获取了迭代核的通项公式 $k^n(s,t)$, 对此无穷求和获得了该类积分方程的解析解, 也就是探论了利用有限项结果通过数学归纳法得到通项公式并最终得到解析解的自动化推理问题; 第四章, 研究了高阶非线性 Volterra-Fredholm 积分 — 微分方程的 Taylor 多项式解的算法, 利用该算法获得了此类积分 — 微分方程的 Taylor 多项式解或解析解. 在此基础上, 研究了所建立的机械化算法用于求解高阶常微分方程的问题. 第五章, 给出了积分方程求解及其机械化算法研究的总结与相关讨论. 为了更清楚展示符号计算算法建立的思想与过程, 将符号积分算法研究及其在微分中值定理自动推证中的应用列于附录中.

本书的编写得到浙江省新世纪 151 人才工程专项基金和温州大学重点学科建设经费的资助.

由于作者水平和能力有限, 书中难免出现不当之处甚至错误, 恳请读者批评指正.

王玮明

二零零八年九月

目 录

第1章 绪论

积分方程 (integral equation), 即被积函数含有未知函数的方程, 是继微分方程之后出现的一个新的近代数学的重要分支, 它与微分方程、泛函分析、计算数学、位势理论和随机分析有着紧密和重要的联系 [15, 60, 61, 80, 114, 203, 212]. D.Hilbert曾指出 [48], 积分方程的研究对于定积分理论、级数理论、线性微分方程理论和变分法都是重要的 [60, 80].

众所周知, 数学模型是解决实际问题的一种重要手段. 同一个问题, 既可以用微分方程的定解问题来描述, 也可以用积分方程来描述. 而微分方程的定解问题又可以化为等价的积分方程, 这不仅可以降低维数, 减少计算时所用节点的个数, 缩短计算时间, 还可使未知函数性质上的限制减弱 (只要满足积分方程即可), 这样可以不再通过寻求微分方程所有可能的解到最后再利用定解条件来确定满足定解问题的解, 而是把满足方程与适合定解条件同时体现在积分方程这一紧凑的形式中. 特别地, 积分算子常常较微分算子具有更好的性质, 更适合于分析和论证 [60, 80, 114, 203]. 此外, 有些刻画扩散与迁移现象的数学问题, 不能用微分方程来表示, 为了解决这些问题, 就必须用积分方程或积分 — 微分方程来解决, 如中子迁移理论中的一些问题等 [114].

另外, 积分方程也是科学研究和解决工程技术问题的一个重要数学工具. 在静电学、电动力学、弹性力学、流体力学、电磁场理论、辐射学、地球物理勘探以及航空航天、土木、机械等领域的前沿问题研究中, 许多问题都可化为求解对应的积分方程, 因而有着广泛的应用 [15, 60, 61, 67, 80, 114, 203, 212].

由于 V. Volterra, I. Fredholm 以及 E. Schmidt 等一大批研究人员关于积分方程的出色工作, 使得积分方程这门学科的研究在相当长一段时间内成了一种世界性的狂热, 也使积分方程的研究无论从深度和广度来讲都有了很大的发展, 产生了大量的文献, 而且很多文献具有一定的应用价值. 后来, 由于积分方程的复杂性, 研究的热度有所下降 [60]. 目前, 随着计算机科学与技术的迅猛发展, 为科学界和工程界提供了有力的计算工具, 积分方程及其应用的研究也随之活跃起来, 有关的杂志、会议及出版物也不断涌现, 预示着积分方程及其应用的研究又可能出现新的高潮 [80, 114, 203, 212].

而我们正处在信息时代, 在这个以计算机为标志的革命性时代中, 特别是在吴文俊所创立的数学机械化以及数学机械化在数学的诸多领域成功应用的背景下, 对

于目前相对较为"冷清"的积分方程研究应该有什么样的创新与之相适应呢? 正是基于上述考虑, 本书将结合数学机械化的思想和方法, 展开对积分方程机械化求解的研究.

本章将从积分方程研究简史、积分方程求解方法、数学机械化及其应用等方面进行简要综述.

1.1 积分方程研究概况

根据已有资料, 特别是参考了文献 [15, 60, 61, 80, 114, 203, 212] 中关于积分方程发展简史的有关论述, 本节将综述积分方程研究概况, 并且较详细地叙述在后续几章中涉及到的重要概念或定义, 在此基础上, 本节最后简单归纳总结目前积分方程研究的主要方面.

积分方程如同微分方程一样起源于数学物理问题. 积分方程的一般理论是在 20 世纪逐步发展和成熟起来的. 但是, 积分方程的研究则在 18 世纪末就已经出现了. 早在 1782 年, P. Laplace 就考虑过由

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} g(t) dt \tag{1.1}$$

给出的 $g(t)$ 的积分方程, 而这是今天广泛应用的关于 $g(t)$ 的 Laplace 变换公式. 1823 年, S. Poisson 给出了问题 (1.1) 中 $g(t)$ 的表达式, 即:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{xt} f(x) dx \tag{1.2}$$

其中, α 充分大.

19 世纪, 由于科学技术的发展, 从一些实际问题中提出了许多关于积分方程的问题. 例如, 热理论中关于

$$f(x) = \int_0^{\infty} \cos(xt) u(t) dt \tag{1.3}$$

的反演问题是真正属于积分方程史的值得注意的结果, 1811 年, J.Fourier 解决了问题 (1.3), 并指出函数

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xt) f(x) dx$$

即为问题 (1.3) 的解.

第一个直接应用并求解积分方程的数学家是 N. H. Abel. Abel 提出了在地球引力场中的一个质点下落问题: 在一个垂直平面内, 求一个质量为 m 的质点在垂直

等加速条件下下落所经的路径, 使其下落的时间等于下落垂直距离 h 的已知函数 $T(h)$.

Abel 从下落质点的动能和势能之间的关系着手研究这一问题. 假设质点下落过程中没有摩擦, 从高度 h 下落到 $y\,(<h)$ 时, 有:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(h-y),$$

其中, $\frac{ds}{dt}$ 是在 t 时刻的切线速度, s 是弧长, g 是重力加速度. 解出 dt, 并且求积, 即得:

$$\int_h^0 \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = T(h).$$

令 $ds = -u(y)dy$, 即可得下述积分方程:

$$\int_0^h \frac{u(y)dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = T(h).$$

在此基础上, Abel 在后续研究中导出了更一般形式的积分方程, 后人称之为 Abel 积分方程:

$$u(x) = \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^a}dt, \quad (0<a<1,\ u(a)=0), \tag{1.4}$$

其中, $u(x)$ 是已知函数, $f(y)$ 是未知函数. 并且, 他给出了方程 (1.4) 的解为:

$$f(y) = \frac{\sin a\pi}{\pi}\frac{d}{dy}\int_a^y \frac{u'(x)}{(y-x)^{1-a}}dx$$

此后, Abel 方程成为许多数学家研究的对象, 并从多方面加以推广.

J. Liouville 独立于 Abel, 自 1832 年起解决了一些特殊形式的积分方程. Liouville 跨出的最有意义的一步是表明某些微分方程的解可以通过解相应的积分方程而得. 例如, 所要求解的微分方程是

$$y'' + [\rho^2 - \sigma(x)]y = 0, \tag{1.5}$$

其中, $a \leqslant x \leqslant b$, ρ 是参数. 设 $u(x)$ 是满足初始条件

$$u(a) = 1, \quad u'(a) = 0 \tag{1.6}$$

的一个特解, 则 $u(x)$ 必定是非齐次方程

$$y'' + \rho^2 y = \sigma(x)u(x)$$

的解. 应用常微分方程的基本结果, 便有:

$$u(x)=\cos\rho(x-a)+\frac{1}{\rho}\int_a^x \rho(t)\sin\rho(x-t)u(t)dt. \tag{1.7}$$

这样, 如果能够求解积分方程 (1.7), 即可得到二阶微分方程 (1.5) 满足初始条件 (1.6) 的解.

Liouville 得到形如 (1.7) 的解, 用的是被认为属于 C.G.Neumann 的逐次逼近法. 而 Neumann 的涉及讨论逐次逼近法的著作《对数和牛顿位势的研究》(Untersuchungen *über* das logarithmische und Newton'sche Potential, 1877) 是四十多年后的 1877 年出版的. 逐次逼近法在今天仍是积分方程求解的有效算法之一.

Abel 和 Liouville 所研究的积分方程都属于基本的类型, Abel 研究的是

$$f(x)=\int_a^x k(x,t)u(t)dt, \tag{1.8}$$

而 Liouville 的则是:

$$f(x)=u(x)-\int_a^x k(x,t)u(t)dt, \tag{1.9}$$

在这两种情形中, $f(x)$ 与 $k(x,t)$ 是已知的, 而 $u(x)$ 是待定的函数. 用 Hilbert [48] 引入的今天仍然在使用着的术语来说, 它们分别属于第一种 (the first kind, 未知函数只在方程中的积分号里面出现) 和第二种 (the second kind, 未知函数既出现于方程的积分号下, 也出现在方程的其他地方) 积分方程, $k(x,t)$ 称为积分方程的核 (kernel).

一般地, (1.8), (1.9) 也称为 Volterra 积分方程, 而当上限 x 是固定数 b 时, 它们就称为 Fredholm 积分方程, 即:

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{1.10}$$

$$f(x)=u(x)-\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{1.11}$$

分别称为第一种和第二种 Fredholm 积分方程.

实际上, Volterra 积分方程是相应的 Fredholm 积分方程的特殊情形, 因为在 (1.10), (1.11) 中当 $t>x$ 时取 $k(x,t)=0$ 即可得相应的 (1.8), (1.9). 而 $f(x)=0$ 时的第二种积分方程这一特殊情形称为对应的齐次方程.

19 世纪中叶, 积分方程的主要兴趣是围绕着求解 Laplace 方程

$$\triangle u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.12}$$

(也称为 "Dirichlet" 问题或 "位势方程", $\triangle$ 称为 Laplace 算子) 有关的边值问题而展开的, 方程要在某条曲线 C 所围成的已知平面区域内成立. u 的边值是某一函数 $f(s)$, 它作为沿曲线 C 的弧长 s 的函数给出. 这时位势方程的一个解可以表示成:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C \rho(s)\log\frac{1}{r(s;x,y)}ds,$$

其中, $r(s;x,y)$ 是点 s 到区域内部或边界上任一点 (x,y) 的距离, 而 $\rho(s)$ 是一个未知函数, 它对 C 上的点 $s=(x,y)$ 满足

$$f(s)=\frac{1}{2\pi}\int_C \rho(t)\log\frac{1}{r(t;x,y)}dt. \tag{1.13}$$

显然, 这是关于 $\rho(t)$ 的第一种积分方程. 换一种选择, 如果把方程 (1.12) 的满足同样边界条件的解取作

$$v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C u(s)\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r(s;x,y)}\right)ds,$$

其中, $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示边界上的法向微商, 那么 $u(s)$ 必须满足积分方程

$$f(s)=\frac{1}{2}\phi(s)+\frac{1}{2\pi}\int_C u(t)\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r(t;x,y)}\right)dt. \tag{1.14}$$

这是第二种积分方程.

由此可见, 同一个问题既可以用第一种积分方程表示, 也可用第二种积分方程表示. 事实上, 第一种积分方程在一定的条件下可以转化为第二种积分方程.

偏微分方程的另一个问题 — 波动方程, 也是通过积分方程解决的. 1894 年, 大数学家 H.Poincaré 考虑了带复 λ 值的波动方程:

$$\triangle u+\lambda u=f(x,y),$$

在此基础上, 1896 年, 他研究了由上述偏微分方程导出的下列形式的积分方程:

$$u(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)u(y)dy=\psi(x),$$

并且断言, 其解是 λ 的亚纯函数.

但值得一提的是, "积分方程" 一词是 1888 年 D. Reymond 第一个提出的.

1884 年起, 罗马的数学物理教授 V. Volterra 在积分方程方面的工作, 是线性积分方程研究的重要转折点, 他也因此被认为是积分方程一般理论的创始人. Volterra 研究了形如 (1.9) 的积分方程, 即第二种 Volterra 积分方程:

$$f(x)=u(x)-\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt, \tag{1.15}$$

并且证明了: 如果 $k(x,t)$ 在正方形 $a \leqslant x,t \leqslant b$ 上连续, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则对任意的 λ, 方程 (1.15) 有且只有唯一连续解, 并且该解可用逐次逼近法求得. 此外, Volterra 还给出了第一种 Volterra 积分方程

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \tag{1.16}$$

的求解方法, 用的方法是将第一种积分方程 (1.16) 化为第二种积分方程 (1.15) 的形式求解. 这种求解方法一直延续至今仍在使用. 在研究过程中, Volterra 还发现, 第一种 Volterra 积分方程能够转化为含 n 个未知数的 n 个线性代数方程组的形式 $(n \to \infty)$.

与此同时, 斯德哥尔摩的数学教授 I. Fredholm 也一直潜心于 Dirichlet 问题的求解, 他吸收了这一时期关于积分方程的各种论述和研究思想, 系统地研究了积分方程理论. 1899 年, 他在给老师 Mittag-Leffler 的一封信中提出了如下形式的积分方程:

$$f(x) = u(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)dt, \tag{1.17}$$

其中, $k(x,t)$ 是正方形 $0 \leqslant x,t \leqslant 1$ 上的已知连续函数, $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 而 $u(x)$ 是未知函数. Fredholm 认为, 积分方程 (1.17) 的解可以表示为 λ 的两个整函数的商的形式. 1900 年, Fredholm 发表了第一篇关于积分方程求解理论的论文 [32], 提出了与核函数 $k(x,t)$ 有关的 Fredholm 行列式 $d(\lambda)$ 和 Fredholm 子式 $D_\lambda(x,t)$, 并且证明了它们都是 λ 的整函数. 在该文中, Fredholm 还巧妙地证明了: 如果 λ 是函数 $d(\lambda)$ 的一个零点, 则积分方程 (1.17) 的齐次方程

$$u(x) + \int_0^1 k(x,t)u(t)dt = 0$$

有不恒等于 0 的解. 此即为著名的 Fredholm 第二定理.

1903 年, Fredholm 又发表了另一篇论文 [33], 对积分方程 (1.17) 作了进一步的研究, 他取 $\lambda = 1$, 得到了如下结果: 如果 $d(1) \neq 0$, 则有且仅有一个函数 $u(x)$ 满足积分方程 (1.17), 并可表示为:

$$u(x) = f(x) - \int_0^1 \frac{D_1(x,t)}{d(1)} f(t)dt.$$

此即 Fredholm 第一定理.

Fredholm 得到的关于积分方程的很多结果, 极其密切地平行于齐次与非齐次线性代数方程组的理论.

由于 Volterra, Fredholm 等人关于积分方程的出色工作, 使得积分方程这一研究领域吸引了许多数学家的注意, 尤其是 D. Hilbert 在积分方程理论的宏伟工作.

从 1904—1910 年, Hilbert 在《拉丁根自然科学皇家学会报告》(Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttinggen) 上一连发表了 6 篇论文, 后收录于其专著《线性积分方程一般理论的原理》(Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 1912) [48] 中, 系统研究了线性积分方程的一般理论, 并且把积分方程应用到各种几何和数学物理问题的解决中.

Hilbert 关于积分方程的工作有许多重大成果, 其中包括, 他用定义完备正交系这一重要概念把无限多个变量二次型理论运用到积分方程; 关于对称核建立了一般的谱理论; 建立了任一连续函数展开成核的特征函数的级数理论 (Hilbert-Schmidt 定理); 引进了双线性形式, 开创了双线性对称形式的谱理论; 证明了一个函数展成第二种积分方程的特征函数的展开式取决于相应的第一种积分方程是否可解; 等等. 而他最有价值的成就之一是把微分方程的 Sturm–Liouville 边值问题化成积分方程的创举. Hilbert 证明了

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u+\lambda u=0 \tag{1.18}$$

满足边界条件

$$u(a)=0, \quad u(b)=0$$

(甚至更一般的边界条件) 的特征值和特征函数, 恰恰是积分方程

$$u(x)-\lambda\int_a^b G(x,t)u(t)dt=0 \tag{1.19}$$

的特征值和特征函数, 其中 $G(x,t)$ 是方程 (1.18) 的 Green 函数, 即

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=0$$

的特解, 它满足一定的可微条件, 并且它的一阶偏微商在 $x=t$ 有等于 $-\frac{1}{p(t)}$ 的奇性跳跃. 类似的结果对偏微分方程也成立. 据此, 积分方程变成了求解微分方程的一种方法, 这种研究方法被成功地用于解决愈来愈多的物理问题. 后来, 人们还发现, n 阶常微分方程的边值问题、偏微分方程问题的研究都可归于某个积分方程的研究. 从而, 掀起了积分方程的理论及其应用研究的世界性狂热.

Hilbert 在积分方程方面的工作, 被在德国几所大学担任数学教授的 E. Schmidt 简化了, 他用的方法是 H. Schwarz 在位势理论研究中创立的. 他最有意义的工作是在 1907 年把特征函数的概念推广到带非对称核的积分方程.

匈牙利数学教授 F. Riesz 在 1907 年继续了 Hilbert 的工作, 特别是创造性地引进了 Lebesgue 平方可积函数的定义, 即二重 Lebesque 积分

$$\int_a^b |k(x,y)|^2dxdy<\infty$$

存在. 在此基础上, Riesz 证明了如果 $f(x)$ 与 $k(x,t)$ 是 Lebesgue 平方可积的, 则第二种 Fredholm 积分方程 (1.11) 是可解的, 并且除了一个在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 积分为 0 的函数外, 解是唯一的. 而 Riesz 1910 年发表在《Mathematatische Annalen》中的论文被认为是泛函分析核心的抽象算子研究的开端. 在该文中, 他把第二种 Fredholm 积分方程 (1.11) 的解推广到 L^p 空间中的函数, 并把 Fredholm 积分算子

$$\lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

设想成作用在某一 Banach 空间中的全连续算子, 而未知函数 $u(x)$ 与已知函数 $f(x)$ 是该空间中的点. Riesz 的这一结果, 后来被 J. Schauder 作了补充, 并发展成为泛函分析中关于全连续算子的 Riesz-Schauder 理论.

与此同时, 科伦大学数学教授 B. Fischer 引进了平均收敛的概念, 即当

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Big(f(x) - f_n(x)\Big)^2 = 0$$

时, 称函数序列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上平均收敛到唯一确定的函数 $f(x)$. 这里的积分是 Lebesgue 积分. 在区间 $[a,b]$ 上, Lebesgue 平方可积的函数集合记为 $L^2[a,b]$, 或简记为 L^2. Fischer 的主要结果是说, $L^2[a,b]$ 在平均收敛意义下是完备的, 即: 若 $f_n \in L^2$, 并且 $\{f_n\}$ 平均收敛, 那么在 L^2 中存在一个函数 $f(x)$, 使得 $\{f_n\}$ 平均收敛到 $f(x)$. 这种完备性是平方可积函数的主要优点. 另外, Fischer 还强调 Lebesgue 平方可积函数的运用是本质的, 没有更小的函数集合可用.

差不多紧接着 Fredholm 积分方程理论的出现, 与它本质上完全不同的奇异积分方程理论也随之产生了, 这类积分方程是人们从不同角度研究不同问题而提出的. Hilbert 在研究解析函数的某些边值问题时发现了它们 [48], 几乎同时, Poincaré 在研究潮汐现象时也发现了它们 [104]. 这类具有代表性的奇异积分方程是下列形式的积分方程 [15]:

$$A(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{k(x,\tau)}{\tau - t}\varphi(t) = \eta(t),\ t \in L, \tag{1.20}$$

其中, L 是平面上的光滑曲线, 系数 $A(t)$, 自由项 $\eta(t)$ 和核 $k(x,t)$ 都是曲线弧 L 上按 Holder 意义连续的已知函数, $\varphi(t)$ 是未知函数. 积分方程 (1.20) 在一定条件下是按 Cauchy 主值的意义存在, 故也称之为 Cauchy 核积分方程. 而在研究大气辐射传输问题时, 提出了另一类积分区域是无穷的奇异积分方程, 其代表性的例子是 Wiener-Hopf 方程:

$$\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy = \psi(x),\ 0 \leqslant x < \infty, \tag{1.21}$$

其中, $k(x-y)$ 与 $\psi(x)$ 是已知函数. 这类奇异积分方程的理论也有很大发展, 并且在许多实际问题中有着重要的应用 [15].

另一方面, 由于实际发展的需要, 非线性积分方程的研究也出现了不少结果, 然而, 对一般的非线性积分方程还缺乏系统的理论, 甚至于方程可解性的讨论也比较困难 [44].

随着泛函分析理论的发展和完善, 人们将微分方程和积分方程的研究置于抽象空间的框架之下, 使积分方程的理论更加完善, 应用也更加广泛, 同时也为微分 — 积分方程的研究奠定了基础.

在中国, 最早从事积分方程研究的老一辈专家和学者有张世勋、陈传璋、张石生等. 随着中国各项科学事业的发展, 积分方程也得到相应的发展, 参与工作的新生力量日益增多, 研究的范围几乎涉及积分方程的各个领域. 目前, 许多高校开设了积分方程理论及其应用研究的课程, 这将为积分方程的研究注入新的活力.

虽然, 由于积分方程本身的复杂性, 关于积分方程的研究不再像 20 世纪初期那么狂热, 特别是, 直到现在, 关于第一种 Fredholm 积分方程 (1.10) 尚未建立起系统的理论, 正如从积分方程 (1.10) 本身的构造可看到, 即使方程 (1.10) 的核 $k(x,y)$ 是退化核这种最简单的情形, 此方程也并不总是有解的. 但就积分方程目前主要研究, 可简单归纳为沿着如下七个方面进行的 [212]:

第一个方向在于揭示新的积分方程类, 以及其成立的线性代数方程组的基本定理, Fredholm 关于特征值的分布定理等;

第二个方向是与正交分解和对称核理论相关联的, 特别是 Hilbert 空间中的算子理论;

第三, 研究经典 Fredholm 定理不成立的线性积分方程, 即所谓的奇异积分方程, 如 Cauchy 奇异积分方程、Wiener-Hopf 方程等;

第四, 研究非线性积分方程可解性及求解;

第五, 研究随机积分方程可解性及求解;

第六, 研究各类积分方程的数值解法;

第七, 研究各类积分 — 微分方程可解性及求解.

另外, 关于积分方程在各个领域的应用研究也始终贯穿于积分方程的发展中.

1.2 积分方程求解方法概述

对自然科学中很多问题的研究大致可以分为两大类: 一是定性研究, 二是定量研究. 对于积分方程研究而言, 定性研究即为可解性条件判定, 定量研究即为方程的求解.

积分方程求解是一个古老且在理论和实际中都很重要的研究课题. 积分方程解, 即解析解 (analytic solution, 也称为精确解) 和数值解 (numerical solution), 可以很好地解释各种物理现象, 有助于人们展开对积分方程所刻划的现实物理现象的分析和研究.

上节谈到, 第二种 Fredholm 积分方程 (1.11) 已经建立了系统的理论 (即 Fredholm 理论), 对于第一种 Fredholm 积分方程 (1.10) 到现在尚未建立起系统的理论; 而第一种 Volterra 积分方程 (1.19), 在一般情况下, 可以通过求微商的方法化为第二种 Volterra 积分方程 (1.18). 基于此, 本节将简单归纳积分方程的求解方法及其研究概况, 不详细介绍各种解法的具体步骤, 而对于本书研究中用到的算法将在后续章节中详述.

对于积分方程解的研究大概可以分为以下三个方面:

其一, 在难以求得解析解的情况下, 对解的适定性 (存在性、唯一性、稳定性等) 进行分析;

其二, 借助于计算数学理论和计算机技术, 获取积分方程数值解或近似解;

其三, 应用某些数学技巧或假设, 构造适当的变换使方程简化并求出解析或近似解 (approximate solution).

如同微分方程一样, 由于积分方程本身的复杂性, 已有的大量的积分方程无法获得解析解. 于是, 人们转而设法去求解积分方程的近似解, 并为此发展了许多可行的求解方法.

积分方程求解方法虽然名目繁多, 但通常可以将这些方法分为两类:

一类是对解析解作近似逼近, 例如:

(1) 逐次逼近法 (method of successive approximations) [15, 61, 80] 等;

(2) 迭代法 (iteration method) [2, 13, 15, 61, 80, 81, 100, 203, 217] 等.

这类方法属于经典的应用广泛的求解积分方程的方法, 目前, 单一地使用这些方法显现出很多局限性, 大多数情况下, 人们选择与其他方法混合使用, 已成功地解决了许多方程求解问题.

另一类是化为便于进行数值计算的其他类型的问题, 主要方法有: 将核用退化核代替 (此方法需要经过复杂的数学分析过程), 或者用数值积分公式将积分方程化为代数方程组, 或者把积分方程化为变分问题, 或者通过构造正交基运用待定系数法求解, 等等. 这类方法中很多是近年来发展起来的新算法, 在积分方程求解中具有重要作用. 常见的方法主要有:

(1) 积分法 (quadrature method) [7, 8, 27, 51, 61, 85, 86, 89, 114, 204, 212, 216];

(2) 投影法 (projection method) [2, 61, 77, 106];

(3) 插值法 (interpolation method) [2, 47, 56, 61, 95, 108, 154, 183, 140, 155];

(4) 级数法 (series method), 包括 Taylor 级数法 [61, 93, 94, 110, 184, 185], Walsh 级数法 [111, 119] 等;

(5) 配置法 (collocation method) [6, 11, 14, 45, 52, 57, 61, 77, 99, 198, 197], 以及在此基础上发展的混合插值配置法 (mixed interpolation collocation methods) [9, 10], 级数展开配置法 (Sinc-collocation method) [98, 109], 样条配置法 (spline collocation method) [1, 50, 58, 95, 101, 140];

(6) Tau 方法 (tau method) [49, 102, 105, 107, 112, 214];

(7) Galerkin 法 (Galerkin method) [43, 46, 74, 94, 103, 179, 211];

(8) Adomain 分解法 (Adomain's decomposition method) [3, 5, 151, 152];

(9) 并行算法 (parallel method) [12, 13, 91, 121],

(10) 外推法 (extrapolation method) [51, 75, 88, 126];

(11) 荣格 — 库塔法 (Runge-Kutta method) [4, 90, 201],

(12) 小波法 (wavelet mathod) [43, 74, 78, 82, 92, 113, 123, 124, 179, 200];

(13) 神经网络算法 (neural network) [28, 42, 53, 125, 186, 196, 215], 等等.

详细叙述这些求解方法将会使本书过于冗长且并非本书重点, 故在此不再赘述. 上述求解方法均可在相应的参考文献中查到详细的算法描述及应用举例.

通过上述求解方法, 人们获得了各种积分方程诸多形式的精确解或者近似解. 但是, 由于积分方程求解问题本身的复杂性, 利用这些方法求解时不可避免地遇到冗长繁复、令人望而生畏的各种计算, 且传统的纸笔演算耗时、费力又易出错, 更重要的是积分方程求解过程中出现的超大计算量的人力难以胜任的十分复杂且精确的代数与微分、积分等符号计算以及"中间过程膨胀"等问题, 使得积分方程求解成为该领域研究的难点之一.

所以, 借助计算机的大容量、高速度的特点, 用精确的符号计算, 机械化地实现积分方程求解具有十分重要的意义和广泛的应用前景.

下节我们将讨论数学机械化的若干问题, 为机械化求解积分方程奠定基础.

1.3 数学机械化简介

1.3.1 数学技术

数学是一切科学与技术的基础, 是一切关键技术中的关键. 当代数学的一个重要特征和发展趋势, 是数学内部各分支学科的高度发展和相互之间在内容、概念及方法上的不断交叉和融合, 充分地显示出数学是一个密不可分的整体. 数学与其他学科以及整个外部世界的联系、交叉、渗透与融合也不断得到加强 [63, 118, 195]. 现在看来很冷清的学科, 将来某一天可能会发现重要的应用, 变成很热门的领域. 例