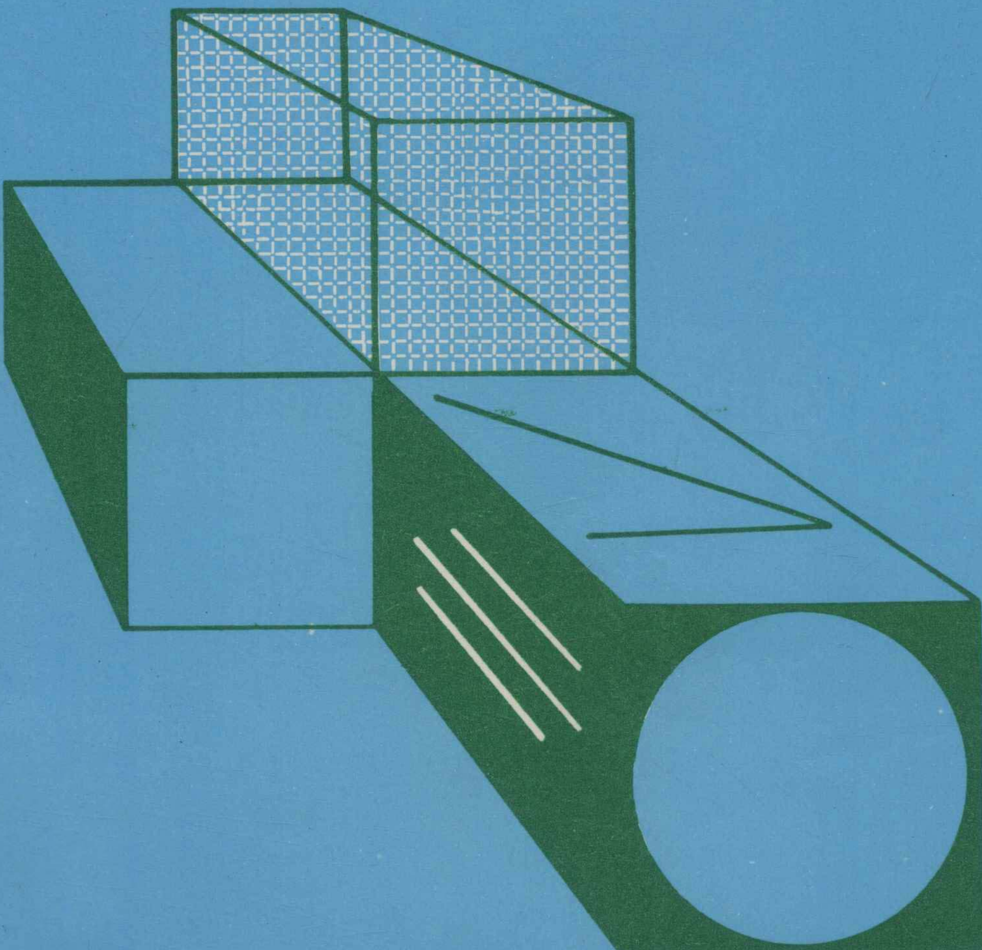
新修訂第五版

工程數學(中)

C. RAY WYLIE
LOUIS C. BARRETT

蘇炎坤 編譯



復文書局

新修訂第五版

工程數學（中）

蘇燮坤　編譯

復　文　書　局

新修訂第五版

工 程 數 學(中)

(1989)民國七十八年十月初版發行

編譯者：蘇　炎　坤

發行者：吳　主　和

發行所：復　文　書　局

地址：台南市林森路二段63號
電話：(06) 2370003 · 2386937
郵撥 0032104－6　FAX：(06)2347222

NO. 63 SECTION 2 LIN-SEN ROAD.
TAINAN. TAIWAN. R.O.C.

本書局經行政院新聞局核准登記發給
出版事業登記證局版台業字第0370號

A-101-1　特價 276 元

序 言

本書初版之編着，目的在介紹微積分以後的數學其他分支，以提供一般重視分析的工程師或物理學者學習，以便有效的推進其工作，且與這些工作領域的進代發展，齊頭並進。此版本中，大多數的內容雖改寫、增删及修改，但和以前第二、三及四版本相同，均希望對上述的目的，有更多的貢獻。

學習應用科學的學生，在微積分之後，馬上需要用到的數學爲常微分方程，且因爲解簡單常微分方程的技巧，以微積分爲起源，因此本書第一章就討論首階常微分方程式及應用。後面的一章則說明線性微分方程式的理論和應用，並特別的注意一些屬於常係數的。爲了對常係數線性微分系統的討論作準備，所以另外一章將介紹線性代數。它內容的主要用途在第四章，用來研究聯立微分方程式系統，但如果讀者已經熟悉矩陣、行列式及聯立線性代數方程式的解法，則可以略過本章。第五章討論有限差分，並含有挿值法、數值微分和積分中的應用。對於微分方程式的逐步數值解法，則介紹龍奇－庫塔及米納的方法。希望依本章的內容，能提供傳統有限差分的可靠背景，以作爲計算機性向，數值分析課程的基礎。第六章將前面幾章的觀念，應用於機械系統及電氣線路上，而且和以前的四種版本一樣，特別的重視不同領域的數學相關性。

從第六章討論的週期現象，自然的延伸到第七章所述的傅立葉級數及傅立葉積分。本書比以前的版本更重視傅立葉積分的應用。第八章所談爲由傅立葉積分所產生的拉普拉斯轉換法，並且詳細的討論它的性質和應用。後面的兩章分別說明偏微分方程式及邊界值問題；並談到貝賽爾函數和賴勒特多項式，而且內容和第四版大致相同。這裏的傅立葉級數在滿足原始及邊界條件時，產生很重要的作用；並促使討論和利用一般性的正交函數展開的情形。這幾章中列出許多新增加的例題，並且另外增加了兩節，一節說明偏微分方程式的特徵線

和分類，另一節說明偏微分方程式的數值解。

第十一、十二兩章又回到線性代數，討論向量空間、線性變換、葛林函數的存在性，以及矩陣的其他性質，和特徵值及特徵向量等。第十三章是向量分析，且和第四版類似，爲幾何觀念的發展而形成。第十四章說明變分學及在動力學中的應用。最後四章介紹複函數的理論，及在流體力學和二維位勢理論中的應用，實數定積分的求出，拉普拉斯變換理論中的複數反積分，穩定性的判斷，保角的映象，及席瓦茲－克里斯多夫變換法等。

總括言之，本書可分爲三大部份，前面十章對於常微分方程式，偏微分方程式及應用，有相當完整的說明，後面四章包含線性代數、向量分析、及變分學的有關項目。最後四章爲複變函數的基本理論和應用。上面的內容含有足夠的教材，以提供微積分以後，二學年應用的數學課程用；且可以用作短期個別課程的教材用。

本書和前四次版本一樣，盡力使說明能夠詳細清晰，同時保持精密性及正確性到相當的地步。爲達到這目標，特別含有比較常見的例題，及仔細繪製的圖形，且在每一次推演的過程中，特別將每一步驟逐步加以詳細的說明，以便使一般已經具有良好的微積分的基礎的，只是用紙、筆就可以實施，而且不會猶疑過久。本書增加許多新的習題。現在總數已經超過 3100 題。其中或有涉及比本書範圍更深入的，或有因篇幅限制來不及介紹的項目。有很多習題附有提示，且本書附有習題中單數題的答案。且和前四次版本一樣，凡是有非正式定義的名詞和詞句，都用黑體字排印，而斜體字常用在應該重視的地方，課文中的例題，改用較小的字體。

本人對於授業恩師、同事及學生的感激，難以一一列名致謝；而對於本書著作，曾大力相助及鼓勵的人，也只能在這裏一起道謝。尤其是對使用本書的教師及學生，不時的來信提供以前四版的意見、批評和指正；及對本版本提出與改革的地方，深感謝意。最後還須感謝拙荆 Ellen 及 Betty ，不但由於她們的幫助和鼓勵，且因本人長期專注於原稿期間，她們付出的耐心和了解。

C. Ray Wylie

Louis C. Barrett

致學生

本書的編着，在幫助各位成爲一個應用科學家；而不論是工程師、物理學家、化學家、或是數學家。書中的內容都很重要，不但今後在技術方面的課程中有用，就算畢業後，在各位專長範圍內的專業工作，遭遇到分析性的問題時，亦將有用。

本人希望此書能使各位感到有用，而且容易學習，至少也要達到高等數學中容易學的程度。書中有些理論的部份，將作爲將來對不是常規的應用的基礎，但是沒有任何一個地方是爲了理論本身着想，用來迎合純數學家的興趣及合法性。本人對理論的探討，只是用來說明原理，指導它的推廣，以便建立對某些技巧的使用安全極限，或者指出缺點，避免誤用。在另一方面，利用許多的例題，表示出如何從已知的資料建立物理問題的數學模式，再進行運算及求解，並說明其結果等等常用的步驟。這些例題，沒有一個例外，都要小心的規劃並完全加以整理，但是只列出其中最簡單的步驟，所以必需隨時利用紙和筆小心研讀，以便全部了解。若能如此，各位將發現書中具挑戰性的習題，各位仍有能力解決。

課文中未正式定義的項目，常常利用黑體字排印，而斜體字用於該重視的地方。本人建議閱讀的時候，先流覽各節一遍以了解大意，然後再集中詳細敍述。有時會發現一段中不容易了解的地方，將在下一段中加以說明並討論。

本書內容很多，而且適合多種課程的教材，所以各位的指導老師或許會選擇其中的一章開始。但依本書的構造來說：前面十章致力於常微分方程式及偏微分方程式，及有關項目的一般性主題。各位將會發現對於連續變量的物理問題，其方程式的建立，及求解時分析的技巧。第十一到十四章是線性代數、矩陣理論、向量分析，以及變分學的相關課題。第十五到十八章，是複變函數的

初步理論及應用。

使用本書的讀者，曾來信表示閱讀的反應，指出書中之錯誤，並建議改進等，本人非常感激。各位若對本書有任何意見，尚祈不吝賜教。最後祝順利及成功。

C. Ray Wylie

Louis C. Barrett

目　錄

第七章　傅立葉級數和積分 ………… ***1***

7－1　週期函數 ………… 1
7－2　歐拉係數 ………… 7
7－3　傅立葉係數的不同公式 ………… 18
7－4　半幅展開式 ………… 31
7－5　傅立葉級數的其他形式 ………… 42
7－6　傅立葉級數的應用 ………… 48
7－7　傅立葉積分作爲傅立葉級數的極限 ………… 66
7－8　傅立葉積分的應用 ………… 84
7－9　由傅立葉積分到拉普拉斯變換 ………… 96

第八章　拉普拉斯變換法 ………… ***103***

8－1　準備理論 ………… 103
8－2　一般方法 ………… 115
8－3　特殊函數的變換 ………… 124
8－4　其他通用定理 ………… 137
8－5　海維賽展開定理 ………… 161
8－6　週期函數的變換 ………… 172
8－7　廻旋和杜愛默公式 ………… 189

第九章　偏微分方程式 ………… ***211***

9－1　介紹 ………… 211

9－2　方程式的導出……211
9－3　波形方程式達郎白辦法……235
9－4　偏微分方程式的特徵及分類……247
9－5　分離變數……257
9－6　正交函數及一般展開式問題……283
9－7　更多的應用……325
9－8　拉普拉斯轉換法……356
9－9　偏微分方程式的數值……367

第十章　貝斯函數及雷建德多項式……383

10－1　初步的理論……383
10－2　貝斯方程式的級數解……400
10－3　修正的貝斯函數……414
10－4　可以用貝斯函數解的方程式……424
10－5　貝斯函數的恒等式……432
10－6　貝斯函數的正交性……455
10－7　貝斯函數的應用……468
10－8　雷建德的項式……506

第十一章　向量空間及線性轉換……533

11－1　向量空間……533
11－2　次空間、線性相依及線性獨立……550
11－3　基底及因次……568
11－4　線性轉換……586
11－5　線性轉換的總和、乘積及逆向……597
11－6　線性運算子方程式……613

第十二章　矩陣的應用及進一步的性質 ……………… *625*

12－1　轉移性質的質量彈簧系統系統 ……………… 625
12－2　同義矩陣的品級 ……………… 632
12－3　格林函數的存在性及用於解非齊次微分系統 ……………… 647
12－4　二次形式 ……………… 661
12－5　矩陣的特徵及特徵向量 ……………… 675
12－6　矩陣的轉換 ……………… 698
12－7　方陣的函數 ……………… 722

解答 ……………… *743*

第七章　傅立葉級數和積分

7-1 週期函數

在第2章，我們學過綫性、常係數微分方程式，含有形式爲

(1) $$A\cos\omega t + B\sin\omega t + C$$

的非齊次項，可以對所有常數值 A，B，C，和 ω 解出。然後於第6章我們發現這些方程式是研究遭受到週期性激動的物理系統的基礎。然而在這多情形下，作用於一系統的力、力矩、電壓，或電流，也是週期性的，但並非簡單的可以用如(1)式的表示式來表示。例如加至一電路的電壓可能是一連串的脈波，如圖7－1 a 所示，或一機械系統遭受的擾動影響，可能是由一等大小但週期性瞬間改變方向的力所造成，如圖7－1 b 所示。這些圖所描述的函數，稱爲週期函數（periodic functions）。

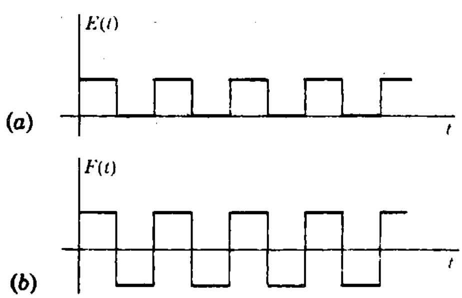


圖7－1　典型的週期函數

《定義1》 函數f爲週期性，若且唯若，存有一正數$2p$，使得在f定義域中的每一個t，$f(t+2p)=f(t)$。此數$(2p)$稱爲f的週期(period)。

很容易的可以證明出，若$2p$爲f的週期，且n爲一正整數，則$2np$亦爲f的週期。此意謂着每一週期函數的定義域包括有任意大的數。若$2p$爲f的最小週期，則稱$2p$爲基本週期(fundomental period)，或簡稱爲週期，因此，一函數稱爲週期爲$2p$；若且唯若，$2p$爲其基本週期。有些週期函數沒有基本週期。

【例1.】

函數$\tan t$對$t=\pi/2+m\pi$，其中m爲整數，尚未定義。雖然如此，因爲對函數定義域中的每一t，$\tan(t+m\pi)=\tan t$，故此函數爲週期性。當然m必須是正的，$m\pi$爲週期。$\tan t$的基本週期爲π。

【例2.】

f爲定義於$T\leq t<\infty$，$f(t)=c$的函數。對每一正數$2p$及f定義域中的每一t值，$f(t+2p)=f(t)=c$。故由定義1知f爲週期性。每一正數均爲f的週期。因爲沒有最小正數存在，故f沒有基本週期。

【例3.】

已知ω爲非零常數，討論定義於$(-\infty,\infty)$，$g(t)=\cos\omega t$的函數g的週期性。

因爲$\cos\omega t$，$\cos(-\omega t)$，$\cos(-\omega)t$分別爲相同的函數，我們可以限定我們的注意力在正的ω值。若$0<2p<2\pi$，$\cos(\omega t+2p)=\cos\omega t$的關係對任意的$t$值不能成立，因爲$2\pi$爲餘弦函數族的週期。在另一方面，$\cos(\omega t+2\pi)\equiv\cos\omega t$及

$$\cos\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\equiv\cos\omega t \tag{2}$$

對t均爲恒等式。對$g(t)$的項，(2)式成爲

$$g\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\equiv g(t)$$

導得 $\cos\omega t$ 爲以 $2\pi/\omega$ 爲週期的週期函數。以相同的方法，也可顯示出 $2\pi/\omega$ 爲 $\sin\omega t$ 的基本週期。

【例4.】

若 m 爲整數，p 爲正，證明所有如 $\cos(m\pi t/p)$ 及 $\sin(m\pi t/p)$ 類型的函數，均以 $2p$ 爲週期。

如同我們在上一個例題的指出，我們只需考慮 $m=0$ 及 $m=n$ 的情形，其中 n 爲正整數。沒有其他的說明，我們一般假設所有的函數定義於 $(-\infty,\infty)$。

若 $m=0$，得到 $\cos 0=1$，且 $\sin 0=0$，此指出常數函數以 $2p$ 爲週期（例2.中 $T=-\infty$）。若 $m=n$，$\cos(n\pi t/p)$ 及 $\sin(n\pi t/p)$ 均以 $\dfrac{2\pi}{n\pi/p}=\dfrac{2p}{n}$ 爲週期（例3.中，$\omega=n\pi/p$）。因爲任意正整數乘上週期亦爲週期，故 n 乘上 $2p/n$ 也就是 $2p$ 爲所給形式所有函數的週期。

例4.出現了一個問題，就是一般週期性函數是否可用正弦或餘弦項的級數表示。特別的，很自然的問到是否常數 a_0，a_n，及 b_n（$n=1,2,3,\cdots\cdots$）能被發現，使得形如

$$\frac{1}{2}a_0\text{〔註〕}+a_1\cos\frac{\pi t}{p}+a_2\cos\frac{2\pi t}{p}+\cdots\cdots+a_n\cos\frac{n\pi t}{p}+\cdots\cdots$$

$$+b_1\sin\frac{\pi t}{p}+b_2\sin\frac{2\pi t}{p}+\cdots\cdots+b_n\sin\frac{n\pi t}{p}+\cdots\cdots$$

〔註〕：以½爲因子是常用的方法，因爲可以使求係數的公式更對稱。

的級數，用來表示週期爲$2p$的任意函數，在其定義域中每一點。

若在此情形下，則可以用線性微分方程式做爲模式，受$f(t)$週期性擾動而得到的響應，可以用(1)式表示的非齊次項的相關微分方程式，引伸在$f(t)$中而求得：首先將$f(t)$中各項用一特殊頻率單一的諧波擾動，而改變振幅及移項。對一機械系統，可由放大率及相移公式得到〔6－3 節方程式(11)及(12)〕。對一電力系統可由複阻抗而得到〔6－4 節方程式(6)〕。然後總和$f(t)$三角展開式個項的反應，而得到一級數，亦爲$f(t)$本身產生的反應。這一章將專門討論傅立葉分析〔註〕（Fourier analysis），其目的爲研究這種展開式的可能性，及成立時應該如何決定的問題。

習　題

1. 若f爲常數函數，定義爲$f(m)=c$，在$M\leq m<\infty$中的連續整數，則f是否爲週期性？若是求其基本週期。
2. 若在圖7－1 a 及 b 中每一脈波高度相對於水平軸爲$p=2$單位，且若對函數的定義域偶整數缺少時，寫出圖線所應有函數$E(t)$及$F(t)$定義的分析表示式。
3. 下列各函數定義於$(-\infty,\infty)$。求其基本週期。

(a) $1+\cos t+\cos 2t$　　(b) $\sin\pi t+\sin 3\pi t$

(c) $\sin(5t+\pi)$　　(d) $\cos\dfrac{3}{2}(\pi-t)$

(e) $\sum_{n=1}^{10}\left(\cos\dfrac{n\pi t}{p}+\sin\dfrac{n\pi t}{p}\right)p>0$

〔註〕：J.B.J.Fourier 是拿破崙的親信，在1822 年發表有紀念價值的專文"Theorie analytique de la chaleur"，首先對上述的展開式作系統的研究。但這種級用於特殊問題中，早在1700-1782 年時，由百努力用於某種弦線振動問題求解。

(f)　$\cos \pi t \sin 9\pi t$　　(g)　$\ln(1+|\sin t|)$

(h)　$\cos(\sin t)$　　(i)　$\cosh(\cos t+\sin 2t)$

(j)　$e^{\sin(\pi t/2)}$

4. 令 $2b$ 爲週期函數 $f(x)$ 的週期，其定義域爲 $(-\infty,\infty)$。求一正數 k，使得 $f(kt)$ 爲以 $2p$ 爲週期的週期函數。

5. 已知函數 f 在 $(-\infty,\infty)$ 中爲連續，週期爲 $2p$，求所有 d 值使得

$$\int_d^{d+2p} f(t)\,dt=\int_0^{2p} f(t)\,dt$$

6. 自動調溫控制的飛彈艙，溫度 T 週期性的起落，雖觀察到的溫度是時間 t 的離散值，但對所有 $t \geq t_0$ 而言，可作安全的假設，令 T 爲連續函數，如 $T(t)=65+3\sin(\pi t/3)$，其中 t 的單位是小時，$T(t)$ 爲華氏〔註〕(Fahrenheit)溫度單位°F。

(a)　$T(t)$ 起落的終端溫度爲何？

(b)　T 的週期爲何？

(c)　對什麼 t 值，T 有最大值？

7. 密蘇里河的一條支流，平均每日鱒魚的產量，長期由取樣而得到的近似公式爲

$$\bar{P}(n)=5{,}000[1+u(n-12)]-2{,}800n+2{,}090n^2-530n^3+55n^4-2n^5 \qquad 1\leq n\leq 12$$

其中 n 表一年中第 n 個月，由 m 的正負而決定 $u(m)=0$ 或 $u(m)=1$，其中 $\bar{P}$ 的第三大的值及最大值，分別表示彩虹鱒魚及棕色鱒魚的盛產期。

(a)　求彩虹鱒魚及棕色鱒魚盛產的月份，及相對應的 $\bar{P}$ 值。

〔註〕：依德國物理學家 Gabriel D. Fahrenheit (1686-1736) 而命名。

〔提示：以計算機求$\overline{P}$值。〕

令$P(n)$爲對所有正整數n定義的週期性函數，$P(n)=\overline{P}(n)$及$P(n+12)=P(n)$。

(b) 求$P(38)$，並說明這平均月產量的意義。

(c) 求$P(192)\sim P(74)$，並以平均月產量說明此結果。

(d) 對任意年代，或任兩年中，平均最大起落的鱒魚產量爲何。

8. 令f爲在所有有理數Q的集合下，定義$f(t)=c$ 的常數函數。

(a) 證明f爲週期函數。

(b) 求f的週期。

(c) f有無基本週期？說明之。

(d) f小於$\sqrt{2}$的最大週期爲何？說明之。

(e) $f(t)$和$\sin t$的和是否爲週期性？說明之。

(f) 已知g爲週期函數，且定義域爲正整數N的集合，證明$f+g$爲週期性。

〔提示：N爲$f+g$的定義域。〕

(g) $f+g$的基本週期爲何？其是否可以小於1？

9. 週期函數f定義於非整數的實數t，

$$f(t)=\begin{cases}1+kt & 0<t<1\\ 1 & 1<t<2\end{cases} \quad 及 \quad f(t+2)=f(t)$$

(a) 證明若$k\neq 0$，則f的週期爲2。

(b) 若$k=0$，則f的週期爲何？

10. 求定義於$(-\infty,\infty)$的下列各函數的基本週期

(a) $e^{in\pi t/p}$

(b) $e^{-in\pi t/p}$

其中$p>0$，n爲正整數。

7-2 歐拉係數

線性微分方程式的非齊次項如果是週期函數，則性質必定十分合理，否則此方程式將不可能求解。很明顯的，將常數函數展開成三角級數沒有什麼好處。所以從現在開始我們考慮的週期函數，必須滿足適當的連續及可微分的條件，且必須有基本週期。

爲了得到週期爲 $2p$ 的函數 f，展開式

(1) $$f(t)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos\frac{\pi t}{p}+a_2\cos\frac{2\pi t}{p}+\cdots\cdots+a_n\cos\frac{n\pi t}{p}+\cdots\cdots$$

$$+b_1\sin\frac{\pi t}{p}+b_2\sin\frac{2\pi t}{p}+\cdots\cdots+b_n\frac{n\pi t}{p}+\cdots\cdots$$

中係數 a_n 及 b_n 的公式，當然這展開式須存在且代表 $f(x)$，我們將用下列定積分，其對所有的 d 值均爲有效，其中 m 和 n 爲整數且滿足已知的限制：

(2) $$\int_d^{d+2p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt=0 \qquad n\neq 0$$

(3) $$\int_d^{d+2p}\sin\frac{n\pi t}{p}dt=0$$

(4) $$\int_d^{d+2p}\cos\frac{m\pi t}{p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt=0 \qquad m\neq n$$

(5) $$\int_d^{d+2p}\cos^2\frac{n\pi t}{p}dt=p \qquad n\neq 0$$